

CÁLCULO INTEGRAL

(1º del Grado en Matemáticas, Universidad de Cantabria)

PRUEBA DEL 11 DE ABRIL DE 2017

Sea $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ la esfera de centro el origen y radio $a > 0$. Calcular

- (a) La integral $\iiint_W (x^2 + y^2 + z^2)xyz \, dx \, dy \, dz$.
- (b) La integral $\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)xyz \, dx \, dy \, dz$, donde Ω es la parte de la esfera W contenida en el octante positivo, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

SOLUCIÓN DE (b)

Pasamos a coordenadas esféricas (sección 4.4 de los apuntes),

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \rho &\in [0, +\infty) \\ \varphi &\in [0, \pi] \\ \theta &\in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

con lo que el dominio vendrá definido por

$$\rho^2 \leq a^2, \quad \rho \sin \varphi \cos \theta \geq 0, \quad \rho \sin \varphi \sin \theta \geq 0, \quad \rho \cos \varphi \geq 0.$$

Como ρ es positivo, la primera inecuación equivale a $0 \leq \rho \leq a$. Ahora podemos simplificar ρ en las otras inecuaciones. A continuación, de $\cos \varphi \geq 0$ deducimos que $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (puesto que φ sólo puede variar entre 0 y π). Entonces $\sin \varphi \geq 0$, de donde deducimos que $\cos \theta \geq 0$ y $\sin \theta \geq 0$.

Resumiendo, las inecuaciones que describen nuestro recinto de integración en coordenadas esféricas son

$$0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

luego la integral pedida es (el jacobiano del cambio de variables es $\rho^2 \sin \varphi$)

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \rho^7 \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \sin^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho &= \\ &= \frac{1}{8} \left[\rho^8 \right]_0^a \frac{1}{2} \left[\sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \left[\sin^4 \varphi \right]_0^{\pi/2} = \frac{a^8}{64}. \end{aligned}$$

SOLUCIÓN DE (a)

Podemos razonar como en (b), teniendo en cuenta que ahora no aparecen las desigualdades $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, luego

$$\iiint_W (x^2 + y^2 + z^2)xyz \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{8} \left[\rho^8 \right]_0^a \frac{1}{2} \left[\sin^2 \theta \right]_0^\pi \frac{1}{4} \left[\sin^4 \varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{64} \times 0 \times 0 = 0.$$

Otra forma más rápida de llegar al mismo resultado es observar la simetría del dominio de integración respecto de los planos coordenados y las simetrías y antisimetrías de la función a integrar. Entonces, razonando como en el ejemplo L.5 de los apuntes, concluimos que la integral es nula.