CALCULO INTEGRAL (Primer Curso del Grado en Física)

PRUEBA DEL 11 DE ABRIL DE 2017

Sea E el elipsoide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\}$, donde $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$. Calcular

(a) $\iiint_E xyz\,dx\,dy\,dz$.

(b) $\iiint_D xyz\,dx\,dy\,dz$, donde D es la parte del elipsoide E contenida en el octante positivo,

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

Solución.

Para la resolución de los dos apartados es conveniente utilizar coordenadas "cuasi-esféricas":

$$x = a\,\rho \sin\varphi \cos\theta, \quad y = b\,\rho \sin\varphi \sin\theta, \quad z = c\,\rho \cos\varphi.$$

Se comprueba facilmente que el determinante del Jacobiano es $a\,b\,c\,\rho^2 \sin\varphi$.

(a). En este caso $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, ya que se considera todo el elipsoide. Por tanto, aplicando el teorema 4.9 del cambio de variable para integrales triples, obtenemos:

$$\begin{aligned}\iiint_E xyz\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} (a\,\rho \sin\varphi\cos\theta)(b\,\rho\sin\varphi\sin\theta)(c\,\rho\cos\varphi)a\,b\,c\,\rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \\ &= a^2b^2c^2 \int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^{\pi} \sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int_0^1 \rho^5\,d\rho.\end{aligned}$$

La integrales respecto de θ y respecto de φ son nulas, con lo que se obtiene que

$$\iiint_E xyz\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Era de esperar que la anterior integral triple fuese nula, debido a la simetría del problema.

(b). En este caso también se tiene $0 \leq \rho \leq 1$. Por otra parte, las condiciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ son equivalentes a

$$\cos\varphi \geq 0, \quad \sin\varphi \geq 0, \quad \cos\theta \geq 0, \quad \sin\theta \geq 0,$$

es decir, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Procediendo como en el apartado anterior llegamos a que

$$\begin{aligned}\iiint_D xyz\,dx\,dy\,dz &= a^2b^2c^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int_0^1 \rho^5\,d\rho \\ &= a^2b^2c^2 \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\sin^4\varphi}{4}\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = \frac{a^2b^2c^2}{48}.\end{aligned}$$