

CÁLCULO INTEGRAL

(1º del Grado en Matemáticas, Universidad de Cantabria)

PRUEBA DEL 13 DE MARZO DE 2017

Sea C^+ la semicircunferencia $y = \sqrt{1 - x^2}$ recorrida desde $(-1, 0)$ hasta $(1, 0)$.

(a) Calcular $\int_{C^+} [3x(x^2 + y^4)^{1/2} \mathbf{i} + 6y^3(x^2 + y^4)^{1/2} \mathbf{j}] \cdot d\mathbf{s}$.

(b) Calcular $\int_C \frac{y}{3+x} ds$.

SOLUCIÓN DE (a)

Se comprueba inmediatamente que para puntos $(x, y) \neq (0, 0)$, $\frac{\partial}{\partial y} [3x(x^2 + y^4)^{1/2}] = \frac{\partial}{\partial x} [6y^3(x^2 + y^4)^{1/2}]$, lo que nos sugiere que busquemos una función escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo gradiente sea el campo que queremos integrar. Para ello seguimos el método 3 explicado en el ejemplo 1.32:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x(x^2 + y^4)^{1/2}$, luego $f(x, y) = \int [3x(x^2 + y^4)^{1/2}] dx = (x^2 + y^4)^{3/2} + \varphi(y)$.
- $6y^3(x^2 + y^4)^{1/2} = \frac{\partial f}{\partial y} = 6y^3(x^2 + y^4)^{1/2} + \varphi'(y)$, luego $\varphi'(y) = 0$, es decir, ha de ser una función constante: $f(x, y) = (x^2 + y^4)^{3/2} + k$.
- Finalmente, comprobamos (de manera inmediata) que efectivamente **grad** f = campo del enunciado.

El teorema fundamental del cálculo generalizado nos permite concluir que

$$\int_{C^+} [3x(x^2 + y^4)^{1/2} \mathbf{i} + 6y^3(x^2 + y^4)^{1/2} \mathbf{j}] \cdot d\mathbf{s} = \int_{C^+} \mathbf{grad} f \cdot d\mathbf{s} = f(1, 0) - f(-1, 0) = \boxed{0}.$$

Alternativamente, también es posible calcular la integral sin apelar a que el campo es conservativo. Para parametrizar la curva simple C definimos

$$\mathbf{c} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t); \quad \mathbf{c}'(t) = (-\sin t, \cos t),$$

que induce sobre C la orientación opuesta a la del enunciado (puesto que $\mathbf{c}(0) = (1, 0)$ y $\mathbf{c}(\pi) = (-1, 0)$). Haremos los cálculos para esta parametrización y usaremos el hecho de que $\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

$$\begin{aligned} \int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^\pi ((3 \cos t (\cos^2 t + \sin^4 t)^{1/2}), 6 \sin^3 t (\cos^2 t + \sin^4 t)^{1/2}) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \\ &= \int_0^\pi 3(\cos^2 t + \sin^4 t)^{1/2} (-\sin t \cos t + 2 \sin^3 t \cos t) dt = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos^2 t + \sin^4 t)^{1/2} (-2 \sin t \cos t + 4 \sin^3 t \cos t) dt = \\ &= \left[(\cos^2 t + \sin^4 t)^{3/2} \right]_0^\pi = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

CÁLCULO INTEGRAL

(1º del Grado en Matemáticas, Universidad de Cantabria)

PRUEBA DEL 13 DE MARZO DE 2017

Otra manera de calcular la integral del párrafo anterior es aplicar propiedades de simetría de las funciones trigonométricas.

Respecto de $t = \pi/2$, $\sin t$ es simétrico y $\cos t$ es antisimétrico (ver el apartado (B.3) de los apuntes). Como la integral anterior puede descomponerse en

$$\int_0^{\pi/2} 3(\cos^2 t + \sin^4 t)^{1/2} \cos t (-\sin t + 2\sin^3 t) dt + \\ + \int_{\pi/2}^{\pi} 3(\cos^2 t + \sin^4 t)^{1/2} \cos t (-\sin t + 2\sin^3 t) dt,$$

razonando como en la primera igualdad del ejemplo L.2 de los apuntes, es decir, cambiando t por $\pi - t$, concluimos que la suma es igual a 0, sin necesidad de calcular cada sumando.

OBSERVACIÓN:

Al comienzo hemos dicho que se comprueba de modo rutinario que en todos los puntos distintos del origen nuestro campo $\mathbf{F}$ cumple $\partial F_2/\partial x = \partial F_1/\partial y$. Puede comprobarse que también en $(0,0)$ se tiene la misma igualdad, por lo que concluimos que $\mathbf{F}$ cumple la propiedad (4) del teorema 1.33.

Como el dominio de definición de $\mathbf{F}$ es todo $\mathbb{R}^2$, que no tiene agujeros, puede dar la impresión de que podemos aplicar la tesis C) del teorema y concluir que (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2), con lo que podríamos sustituir la curva simple orientada C^+ por cualquier otra que vaya desde el punto $(-1,0)$ hasta el punto $(1,0)$, por ejemplo el segmento que los une, y así simplificar mucho los cálculos.

Sin embargo, no podemos aplicar este razonamiento sin haber comprobado previamente otra de las hipótesis del teorema 1.33, que $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Ocurre que esta hipótesis también es cierta, pero demostrarla no es tan trivial.

SOLUCIÓN DE (b)

Parametrizamos la curva cerrada simple C , sin orientar, mediante

$$\mathbf{c} : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$$

(observar que la orientación asociada a $\mathbf{c}$ no es la de C^+ sino la de C^- , pero para el cálculo de una integral de campo escalar la orientación da igual). Entonces

$$\mathbf{c}'(t) = (-\sin t, \cos t), \quad \|\mathbf{c}'(t)\| = 1.$$

Por tanto,

$$\int_C \frac{y}{3+x} ds = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos t} dt = \left[-\log(3+\cos t) \right]_0^{\pi} = \log 4 - \log 2 = \boxed{\log 2}.$$

CÁLCULO INTEGRAL

(1º del Grado en Matemáticas, Universidad de Cantabria)

PRUEBA DEL 13 DE MARZO DE 2017

OBSERVACIÓN:

Si pretendemos utilizar x como parámetro para describir la curva C , es decir, en lugar de $\mathbf{c}$ pretendemos utilizar el camino $\mathbf{c}_0 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}_0(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$, ocurre que $\mathbf{c}_0$ no es un camino de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, porque en los puntos 1 y -1 no es derivable, por lo que no es una parametrización de la curva simple C en el sentido de la definición 1.26. Y no podemos recurrir a la definición 1.29 para poner $\int_C y/(3+x) \, ds = \int_{\mathbf{c}_0} y/(3+x) \, ds$.

Sin embargo, el resultado que se obtiene mediante $\int_{\mathbf{c}_0} y/(3+x) \, ds$ es correcto, *pero gracias al teorema 2.52(1)*: $\|\mathbf{c}_0'(x)\| = 1/\sqrt{1-x^2}$ no está acotada sobre $(-1, 1)$, pero

$$\int_C \frac{y}{3+x} ds = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{3+x} \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{3+x} dx = \left[\log(3+x) \right]_{-1}^1 = \log 2.$$

Por otra parte, una observación similar a ésta valdría también para el cálculo de la parte (a).