CALCULO INTEGRAL (Primer Curso del Grado en Física)

PRUEBA DEL 13 DE FEBRERO DE 2017

Sea C^+ la parábola $y = x^2$, $z = 1$, recorrida desde $(0, 0, 1)$ hasta $(1, 1, 1)$.

(a) Calcular $\int_{C^+}[z^2 \cos x \cos y\,\vec{\boldsymbol{i}} - z^2 \sin x \sin y\,\vec{\boldsymbol{j}} + 2z \sin x \cos y\,\vec{\boldsymbol{k}}] \cdot d\boldsymbol{s}$.

(b) Calcular la longitud de C.

Solución.

(a) Sea $\boldsymbol{F}(x, y, z) = z^2 \cos x \cos y\,\vec{\boldsymbol{i}} - z^2 \sin x \sin y\,\vec{\boldsymbol{j}} + 2z \sin x \cos y\,\vec{\boldsymbol{k}}$.

Primera forma de resolución.

Vamos a aplicar el Teorema 1.33. Se comprueba inmediatamente que se verifica la propiedad (4) de dicho teorema ya que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}[2z \sin x \cos y] &= \frac{\partial}{\partial z}[-z^2 \sin x \sin y], \quad \frac{\partial}{\partial x}[2z \sin x \cos y] = \frac{\partial}{\partial z}[z^2 \cos x \cos y],\\ \frac{\partial}{\partial x}[-z^2 \sin x \sin y] &= \frac{\partial}{\partial y}[z^2 \cos x \cos y].\end{aligned}$$

Además se cumple la tercera condición adicional para que la propiedad (4) del Teorema 1.33 sea equivalente a cualquiera de las otras propiedades enunciadas en dicho teorema. En particular tenenos que $(4) \iff (2)$. Por lo que podemos sustituir la curva simple orientada C^+ por cualquier otra que vaya desde (0,0,1) hasta $(1, 1, 1)$. Considermos el segmento que va del primer punto al segundo. Una parametrización de dicho segmento es $c(t) = (t, t, 1)$, $0 \le t \le 1$, con lo que

$$c'(t) = (1, 1, 0), \quad \boldsymbol{F}(c(t)) = (\cos^2 t, -\sin^2 t, 2 \sin t \cos t).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} &= \int_0^1 (\cos^2 t, -\sin^2 t, 2 \sin t \cos t) \cdot (1, 1, 0)\, dt = \int_0^1 (\cos^2 t - \sin^2 t)\, dt =\\ &= \int_0^1 \cos 2t\, dt = \frac{1}{2}\Big[\sin 2t\Big]_0^1 = \frac{\sin 2}{2}.\end{aligned}$$

Segunda forma de resolución.

Si aplicamos ahora la implicación $(4) \Longrightarrow (3)$ del Teorema 1.33, sabemos que va a existir una función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{grad}\, f = \boldsymbol{F}$. Vamos a encontrar dicha función. Para ello seguimos el método 3 explicado en el Ejemplo 1.32. Sabemos que:

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = z^2 \cos x \cos y, \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = -z^2 \sin x \sin y, \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = 2z \sin x \cos y. \tag{1}$$

De la primera igualdad de (1) se obtiene

$$f(x,y,z) = \int z^2 \cos x \cos y \, dx = z^2 \sin x \cos y + \varphi(y,z).$$

Derivando parcialmente respecto de y,

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = -z^2 \sin x \sin y + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}.$$

Igualando este valor de $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$ con lo que aparece en la segunda igualdad de (1) concluimos que $\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = 0$, es decir, φ es una función que no depende de y, por lo que podemos escribir $\varphi(y,z) = \psi(z)$. Tenemos entonces que

$$f(x,y,z) = z^2 \sin x \cos y + \psi(z).$$

Derivando parcialmente respecto de z,

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2z \sin x \cos y + \psi'(z).$$

Igualando este valor de $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$ con lo que aparece en la tercera igualdad de (1) concluimos que $\psi'(z) = 0$, es decir, ψ es una función constante, que podemos tomar igual a 0.

Se comprueba fácilmente que $f(x,y,z) = z^2 \sin x \cos y$ en efecto verifica que $\boldsymbol{grad}\, f = \boldsymbol{F}$.

Aplicando ahora el teorema fundamental del cálculo generalizado obtenemos que

$$\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = f(1,1,1) - f(0,0,1) = \sin 1 \cos 1.$$

Tercera forma de resolución.

Vamos a calcular directamente la integral pedida. Una parametrización de C^+ viene dada por $c(t) = (t, t^2, 1)$, $\leq t \leq 1$, con lo que

$$c'(t) = (1, 2t, 0), \quad \boldsymbol{F}(c(t)) = (\cos t \cos t^2, -\sin t \sin t^2, 2 \sin t \cos t^2).$$

Por tanto,

$$\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^1 (\cos t \cos t^2 - 2t \sin t \sin t^2) \, dt.$$

Para calcular la últina integral, usamos la fórmula de integración por partes tomando $u = \cos t^2$, $dv = \cos t \, dt$. Entonces tenemos que

$$\int \cos t^2 \cos t \, dt = \cos t^2 \sin t + \int 2t \sin t \sin t^2 \, dt,$$

de donde se deduce que

$$\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \left[\cos t^2 \sin t\right]_0^1 = \sin 1 \cos 1.$$

(b) Sabemos que una parametrización de C viene dada por $c(t) = (t, t^2, 1)$, $0 \leq t \leq 1$, para la que $c'(t) = (1, 2t, 0)$. Por tanto, $\|c'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$, con lo que

$$\ell(C) = \int_0^1 \|c'(t)\| \, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} \, dt.$$

Haciendo el cambio de variable $x = 2t$ y aplicando la fórmula 30 de la tabla de antiderivadas, concluimos que

$$\ell(C) \quad = \quad \left[\frac{1}{2}t\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\log\left|2t + \sqrt{1+4t^2}\right|\right]_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\log(2+\sqrt{5})}{4}.$$