Cálculo Integral

(1º de los Grados en Matemáticas y en Física, Universidad de Cantabria)

Recuperación del examen final, 6 de septiembre de 2016

Examen de teoría.

Las cuestiones C_1 y C_2 sirven para recuperar la nota del primer parcial.

Las cuestiones C_3 y C_4 sirven para recuperar la nota del segundo parcial.

Responder DE FORMA RAZONADA a las siguientes cuestiones

C$_1$) Decir si son ciertas las afirmaciones

a) Todo camino de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos es también una suma de caminos de clase $\mathscr{C}^1$.

b) Toda suma de caminos de clase $\mathscr{C}^1$ es también un camino de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos.

c) Todo camino es suma de caminos de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos.

C$_2$) Sean R un cuadrado contenido en $\mathbb{R}^2$ y $h : [0,1] \longrightarrow R$ una función continua. A partir de los resultados dados en el curso, ¿qué podemos decir sobre la integrabilidad Riemann de una función acotada $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua en todos los puntos de R excepto en los de

(a) la circunferencia inscrita en R;

(b) los cuatro lados de R;

(c) los puntos de la imagen $h([0,1])$?

(Responder por separado a cada uno de los tres casos.)

C$_3$) Suponemos que tenemos una superficie Σ y una parametrización suya $\mathbf{\Phi} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Para cada una de estas hipótesis, decir si se puede asegurar que Σ es orientable:

A) D es una región simple y $\mathbf{\Phi}$ es inyectiva y regular en todos los puntos de D, incluidos los de ∂D.

B) Además de lo anterior, los parámetros coinciden con las coordenadas y, z.

C$_4$) Sea Σ^+ una superficie contenida en $\mathbb{R}^3$ y dotada de una orientación; y sea $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathscr{C}^1$. Dar una fórmula que permita convertir $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS}$ en una integral de un campo escalar sobre Σ.

C$_5$) Explicar por qué la fórmula de Stokes puede considerarse una generalización de la fórmula de Green-Riemann.

Cálculo Integral

(1º de los Grados en Matemáticas y en Física, Universidad de Cantabria)

Recuperación del examen final, 6 de septiembre de 2016

Examen de problemas.

El problema P_1 sirve para recuperar la nota del primer parcial.

El problema P_3 sirve para recuperar la nota del segundo parcial.

Entregar cada problema por separado

P_1) Sea D la región de $\mathbb{R}^2$ encerrada por la parábola $y = 4 - x^2$ y el eje X. Elegir una orientación para ∂D y calcular $\int_{\partial D^+} x^2y^2\,dx + x^3y\,dy$.

P_2) Sea Σ la superficie en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \leq 0\},$$

con la orientación de las normales hacia afuera de la esfera. Sea $\boldsymbol{F}$ el campo en $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + (z - xy)\boldsymbol{k}.$$

Calcular $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$.

P_3) Sea W la región de $\mathbb{R}^3$ definida por las desigualdades

$$2z^2 - x^2 \leq y^2, \quad z^2 - x^2 \geq y^2 - 1, \quad y \geq 0.$$

Calcular $\iiint_W (y^2 + 1)\,dV$.

P_4) Sea $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$ y consideremos en ∂W la orientación de las normales hacia adentro. Sea $\boldsymbol{F}$ el campo en $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = -x\boldsymbol{i} + z^3\boldsymbol{j} + y^3\boldsymbol{k}.$$

Calcular $\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$.