Cálculo Integral

(1º de los Grados en Matemáticas y en Física, Universidad de Cantabria)

Examen final, 13 de junio de 2016

Examen de teoría.

Las cuestiones C_1 y C_2 sirven para recuperar la nota del primer parcial.

Las cuestiones C_3 y C_4 sirven para recuperar la nota del segundo parcial.

Responder de forma razonada a las siguientes cuestiones

$\mathbf{C_1}$) Se dispone de un mapa en el que para cada punto se conoce su altitud sobre el nivel del mar. Hemos modelizado sobre ese mapa, en función del tiempo, el recorrido que han hecho dos senderistas, mediante caminos de clase $\mathscr{C}^1$, $\boldsymbol{c_1} : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{c_2} : [0, T + \Delta T] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, respectivamente. La primera senderista no se ha detenido a comer. La segunda sí que se ha detenido, invirtiendo en la comida un tiempo ΔT. Por lo demás, los recorridos de las dos han sido idénticos.

(a) Plantear fórmulas que expresen la altitud media a la que ha estado cada senderista.

(b) ¿Podemos deducir si las altitudes medias de las senderistas han sido iguales?

$\mathbf{C_2}$) Si f es una función de valores reales, definida sobre el rectángulo $R = [0, 1] \times [2, 4]$ y acotada, decir si son ciertas las siguientes implicaciones:

1. Existe la integral doble y existe una de las dos reiteradas $\Longrightarrow$ dicha integral reiterada es igual a la doble.
2. Las dos integrales reiteradas existen y son iguales $\Longrightarrow$ la integral doble de f sobre R existe y es igual a las reiteradas.
3. f es continua $\Longrightarrow$ las dos integrales reiteradas existen y son iguales.

$\mathbf{C_3}$) Completar los límites de integración que faltan en la siguiente igualdad:

$$\int_0^1 \int_{2-x}^2 \int_x^1 dz\, dy\, dx = \int^2 \int^1 \int^z dx\, dz\, dy.$$

(Advertencia: Verificar que para los nuevos extremos de integración se cumplen todas las propiedades que se necesitan para describir un conjunto tridimensional simple.)

$\mathbf{C_4}$) Sean Σ^+ una superficie orientada y $\boldsymbol{N}$ el vector normal unitario que define la orientación. Suponiendo que $\boldsymbol{N}$ esté definido y sea continuo sobre toda la superficie Σ, ¿qué es $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{dS}$?

$\mathbf{C_5}$) (a) Sea Σ_1^+ el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 6$, dotado de la orientación definida por el vector normal hacia dentro del cono. Representar en una figura (aproximada) el conjunto $\partial\Sigma_1^+$, indicando cuál es su orientación.

(b) Misma cuestión para el cono truncado Σ_2^+ definido por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $2 \leq z \leq 6$.

CÁLCULO INTEGRAL

(1º de los Grados en Matemáticas y en Física, Universidad de Cantabria)

EXAMEN FINAL, 13 DE JUNIO DE 2016

Examen de problemas.

El problema P_1 sirve para recuperar la nota del primer parcial.

El problema P_3 sirve para recuperar la nota del segundo parcial.

ENTREGAR CADA PROBLEMA POR SEPARADO

P_1) Sea D la región de $\mathbb{R}^2$ encerrada por las curvas

$$y = |x|, \quad y = 2 - x^2.$$

Calcular $\iint_D |x| \cos y \, dA$.

P_2) Consideremos la superficie Σ en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$x = u^2 + 4v, \quad y = v^2 - u^2, \quad z = u + v, \qquad 0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 1.$$

Hallar una ecuación del plano tangente a Σ en el punto $(5, 0, 2)$.

P_3) Sea W la región del semiespacio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0\}$ limitada por las superficies:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + 6}$$
$$z = x^2 + y^2.$$

Calcular el volumen de W.

P_4) Sea Σ^+ la parte de la semiesfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \ge 0,$$

encerrada dentro del cilindro $x^2 + y^2 \le 1$, con la orientación de las normales hacia afuera. Consideremos el campo $\boldsymbol{F}$ en $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = y^2 \boldsymbol{i} + (x + z)\boldsymbol{j} + 2y\boldsymbol{k}.$$

Calcular $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$.