Recuperación del examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física
5 de septiembre de 2015 (Teoría)

- Todas las cuestiones puntúan por igual para la nota del examen final.
- Las cuestiones $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_2$ se utilizan además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del primer bloque.
- Las cuestiones $\mathbf{C}_3$ y $\mathbf{C}_4$ se utilizan además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del segundo bloque.

Responder de forma razonada a las siguientes cuestiones:

$\mathbf{C_1}$) Sean C^+ un arco simple orientado, $\boldsymbol{T}$ un vector tangente unitario (compatible con la orientación) sobre cada punto de C y $\boldsymbol{n}$ un vector normal unitario sobre cada punto de C. Si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial de clase $\mathscr{C}^1$, ¿cuáles de las siguientes igualdades son ciertas siempre?

1. $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\ ds$
2. $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\ ds$
3. $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_C \operatorname{div} \boldsymbol{F}\ ds$

$\mathbf{C_2}$) Sean $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$ dos regiones simples en las dos direcciones y $D = D_1 \setminus \operatorname{Int} D_2$. Enunciar la fórmula de Green-Riemann sobre D, explicar las orientaciones que aparezcan y añadir hipótesis (a los regiones simples o al campo vectorial) bajo las que podemos asegurar que se cumple la fórmula.

$\mathbf{C_3}$) Sobre una superficie dada, decir cuáles de los siguientes conceptos son independientes de la parametrización: plano tangente en un punto dado; vector normal en un punto dado; recta normal en un punto dado; orientación de la superficie; que el vector normal en un cierto punto sea nulo.

$\mathbf{C_4}$) Considérese la superficie

$$\Sigma : \quad z = |y| \leq 1;\ 0 \leq x \leq 1,$$

que es la unión de dos rectángulos a lo largo de una arista. ¿Es posible que Σ tenga una parametrización $\mathbf{\Phi} : D \longrightarrow \Sigma$ que sea de clase $\mathscr{C}^1$ en todos los puntos de D?

$\mathbf{C_5}$) Supóngase que se tienen una circunferencia y un cilindro, ambos contenidos en $\mathbb{R}^3$ y

- se calculan el perímetro de un polígono inscrito en la circunferencia y el área de un poliedro inscrito en el cilindro;
- a continuación se pasan ambas sumas al límite cuando el máximo de la longitud de los lados del polígono o del poliedro tiende a cero.

¿Podemos asegurar que esos límites coinciden con la longitud de la circunferencia y con el área del cilindro, respectivamente?

Recuperación del examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

5 de septiembre de 2015 (Problemas)

- El 60 % de la nota del examen final se obtiene por los problemas y el 40 % restante se obtiene por las cuestiones.
- Todos los problemas puntúan por igual para la nota del examen final.
- El problema $\mathbf{P}_1$ se utiliza además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del primer bloque.
- El problema $\mathbf{P}_2$ se utiliza además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del segundo bloque.

$\mathbf{P_1}$ Sea D la región de $\mathbb{R}^2$ encerrada por las curvas $y = x^3$, $x = y^2$. Calcular $\iint_D (\sqrt{x} - y)\, dA$.

$\mathbf{P_2}$ Sea W la región de $\mathbb{R}^3$ definida por las desigualdades

$$\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{2 - x^2 - y^2}, \quad x \le 0.$$

Calcular $\iiint_W x\, z\, dV$.

$\mathbf{P_3}$ Sea C la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y - z = 1$. Sea $\boldsymbol{F}$ el campo en $\mathbb{R}^3$ definido por $\boldsymbol{F}(x, y, z) = y\boldsymbol{i} + x\, y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$. Elegir una orientación positiva para C y calcular $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$, de las dos formas siguientes.

(a) Directamente.

(b) Aplicando el Teorema de Stokes. Comprobar que se obtiene el mismo resultado que en (a).