Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

5 de septiembre de 2014 (Teoría)

- El 40 % de la nota del examen final se obtiene por las cuestiones y el 60 % restante se obtiene por los problemas.
- Todas las cuestiones puntúan por igual para la nota del examen final.
- Las cuestiones $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_2$ se utilizan además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del primer bloque.
- Las cuestiones $\mathbf{C}_3$ y $\mathbf{C}_4$ se utilizan además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del segundo bloque.

Responder de forma razonada a las siguientes cuestiones:

$\mathbf{C_1}$ Dibujar el arco simple $C = \{(x, |x|) : |x| \leq 1\}$. ¿Es posible dar una parametrización de C que sea de clase $\mathcal{C}^1$ (es decir, con derivada continua en todos los puntos)?

$\mathbf{C_2}$ Sea $f : D = [-10, 10] \times [-10, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada de la que sabemos que es continua en todos los puntos del cuadrado D menos en los del círculo $x^2 + y^2 \leq 4$. ¿Podemos asegurar que f es integrable sobre D?

$\mathbf{C_3}$ Considérese una superficie Σ parametrizada mediante $\Phi : D \longrightarrow \Sigma$, y un punto suyo $(x_0, y_0, z_0) = \Phi(u_0, v_0)$.

1. Dar una fórmula para el plano tangente a Σ en (x_0, y_0, z_0).
2. Explicar por qué al tomar otra parametrización Ψ de Σ, la fórmula análoga define el mismo plano.

$\mathbf{C_4}$ Expresar la integral de un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ sobre una superficie orientada Σ^+ como la integral de un cierto campo escalar sobre Σ. (Sugerencia: hacer uso de una normal unitaria $\boldsymbol{N}$ sobre Σ.)

$\mathbf{C_5}$ Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$ sobre todo $\mathbb{R}^3$. Usar el teorema de la Divergencia de Gauss para deducir el valor de la integral $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$, donde Σ es una superficie esférica cualquiera.

Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

5 de septiembre de 2014 (Problemas)

- El 60 % de la nota del examen final se obtiene por los problemas y el 40 % restante se obtiene por las cuestiones.
- Todos los problemas puntúan por igual para la nota del examen final.
- El problema $\mathbf{P}_1$ se utiliza además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del primer bloque.
- El problema $\mathbf{P}_3$ se utiliza además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del segundo bloque.

$\mathbf{P_1}$ Consideremos la fuerza $\boldsymbol{F}$ definida por $\boldsymbol{F}(x,y,z) = x^2\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z^5\boldsymbol{k}$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la curva $y = x^3$, $z = 2$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

$\mathbf{P_2}$ Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 \leq y \leq 4 - x^2,\ y \geq 0\}$. Calcular $\iint_D x^2\, dA$.

$\mathbf{P_3}$ Consideremos el campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (2x^3 - 3y^4 + 7z)\boldsymbol{i} - 5y\boldsymbol{j} - 5z\boldsymbol{k}$. Sea Σ la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$y^2 + z^2 = 3, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

Elegir una orientación positiva para Σ y calcular $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$.

$\mathbf{P_4}$ Sea W la región de $\mathbb{R}^3$ limitada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el paraboloide $z = 6 - x^2 - y^2$. Sea $\boldsymbol{F}$ el campo definido por $\boldsymbol{F}(x,y,z) = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Aplicando el Teorema de la Divergencia de Gauss, calcular $\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$, considerando en ∂W^+ la orientación de las normales exteriores.

Entregar cada problema en una hoja distinta.