Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

16 de junio de 2014 (Teoría)

- El 40 % de la nota del examen final se obtiene por las cuestiones y el 60 % restante se obtiene por los problemas.
- Todas las cuestiones puntúan por igual para la nota del examen final.
- Las cuestiones $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_2$ se utilizan además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del primer bloque.
- Las cuestiones $\mathbf{C}_3$ y $\mathbf{C}_4$ se utilizan además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del segundo bloque.

Responder de forma razonada a las siguientes cuestiones:

$\mathbf{C_1}$ Dado cualquier camino de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, $\boldsymbol{c} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, construir una reparametrización de $\boldsymbol{c}$ de manera que invierta la orientación.

$\mathbf{C_2}$ ¿Es cierto que un camino de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos siempre es igual a una suma de caminos que son de clase $\mathcal{C}^1$? (En caso de que la respuesta sea afirmativa, explicar cómo se obtendrían los sumandos; y en caso de que sea negativa, poner un contraejemplo.)

$\mathbf{C_3}$ Para que una superficie Σ sea orientable es necesario, en primer lugar, que tenga una parametrización $\Phi : D_1 \cup \cdots \cup D_m \longrightarrow \Sigma$ de modo que el vector normal unitario $\boldsymbol{n_\Phi}/\|\boldsymbol{n_\Phi}\|$ sea una función continua sobre el subconjunto de Σ formado por la imagen $\Phi(\operatorname{Int} D_1 \cup \cdots \cup \operatorname{Int} D_m)$. ¿Qué otra condición se exige a Φ?

$\mathbf{C_4}$ Supóngase que a una superficie definida explícitamente se le cambia la orientación. ¿Como cambia el valor de la integral de un cierto campo vectorial sobre la curva? ¿Y la integral de un campo escalar?

$\mathbf{C_5}$ Usar la fórmula de Stokes para deducir que la integral sobre una esfera de un campo vectorial que sea el rotacional de otro campo, siempre es nula.

Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

16 de junio de 2014 (Problemas)

- El 60 % de la nota del examen final se obtiene por los problemas y el 40 % restante se obtiene por las cuestiones.
- La puntuación de cada problema o parte de problema aparece junto a su enunciado.
- La parte **(a)** del problema $\mathbf{P}_1$ se utiliza además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del primer bloque.
- El problema $\mathbf{P}_2$ se utiliza además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del segundo bloque.

$\mathbf{P_1}$ Sea C^+ el triángulo en $\mathbb{R}^2$ con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$, recorrido en este orden. Consideremos el campo $\boldsymbol{F}(x,y) = xy\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$. Calcular $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$ de las dos formas siguientes:

(a) [2,5 puntos] Directamente.

(b) [2,5 puntos] Aplicando el Teorema de Riemann-Green.

$\mathbf{P_2}$ [2,5 puntos] Sea W la región de $\mathbb{R}^3$ limitada por las siguientes superficies:

- la semiesfera $z = 2 + \sqrt{5 - x^2 - y^2}$;
- el cono $z = 3 + \sqrt{x^2 + y^2}$.

Calcular el volumen de W.

$\mathbf{P_3}$ [2,5 puntos] Sea Σ^+ la superficie en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$z = 4 - x^2 - y^2, \quad z \geq 3,$$

con la orientación de las normales hacia arriba. Sea $\partial\Sigma^+$ el borde de Σ^+ orientado de acuerdo con con el teorema de Stokes. Consideremos el campo

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (2y^3 - x^5 + z^6 + y)\boldsymbol{i} + (y^4 - 2x^3 + z^5)\boldsymbol{j} + (6z^5x + 5z^4y)\boldsymbol{k}$$

Calcular $\int_{\partial\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$.

Entregar los tres problemas en hojas distintas.