

CÁLCULO INTEGRAL

(1º de los Grados en Matemáticas y en Física, Universidad de Cantabria)

EXAMEN FINAL, 6 DE SEPTIEMBRE DE 2017

SOLUCIONES

Cuestiones

C₁) No, ver observación 41.

OBSERVACIÓN:

No debe confundirse la *imagen* de una función con la *gráfica* de la misma función (ver también la observación 25).

C₂) Ver ejemplo L.5.

OBSERVACIÓN:

Había que buscar un cambio de variable ad hoc para la cuestión. En este caso un cambio a cilíndricas o a esféricas no ayuda en nada.

C₃) Que sobre ambas sea válida la fórmula de Stokes y además que $\partial\Sigma_1 = \partial\Sigma_2$.

OBSERVACIONES:

- En el enunciado se decía que *las superficies* eran distintas, por lo que no tenía sentido considerar *dos parametrizaciones* distintas de una misma superficie.
- Se pedían condiciones sobre las superficies para que el resultado sea cierto cualquiera que sea el campo. Por tanto, la hipótesis de que las integrales fueran nulas no resolvía la cuestión.

C₄) La integral sobre la superficie será nula, puesto que coincide con la integral del producto escalar del campo vectorial por la normal unitaria, y estos dos vectores son ortogonales.

Pero la integral a lo largo de la curva es también (suma de un número finito de) la integral del producto escalar por la tangente unitaria, y en este caso los vectores son colineales, luego la integral no tiene por qué ser nula. Por ejemplo, si tomamos como C^+ el segmento $[0, 2] \times \{0\}$ orientado de izquierda a derecha, y como $\mathbf{F}$ el campo constante $\mathbf{F}(x, y) = (1, 0)$, entonces $\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 2$.

C₅) El conjunto sobre el que está planteada la primera integral reiterada viene definido por las seis desigualdades

$$0 \leq z \leq 6, \quad 0 \leq y \leq 3 - \frac{z}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2 - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z,$$

CÁLCULO INTEGRAL

(1º de los Grados en Matemáticas y en Física, Universidad de Cantabria)

EXAMEN FINAL, 6 DE SEPTIEMBRE DE 2017

que vamos a utilizar para obtener las seis que necesitamos en la segunda integral reiterada, mediante los siguientes razonamientos:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 2 - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ 0 \leq y \\ 0 \leq z \end{array} \right\} \Rightarrow x \leq 2;$$

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 2 - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \Rightarrow y \leq 3 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z \\ 0 \leq z \end{array} \right\} \Rightarrow y \leq 3 - \frac{3}{2}x;$$

$$x \leq 2 - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \Rightarrow z \leq 6 - 3x - 2y;$$

de donde deducimos fácilmente la equivalencia

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 6 \\ 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z \\ 0 \leq x \leq 2 - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x \\ 0 \leq z \leq 6 - 3x - 2y \end{array} \right.$$

Como además

$$x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 3 - \frac{3}{2}x, \quad y \leq 3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow 0 \leq 6 - 3x - 2y,$$

podemos poner

$$\int_0^6 \int_0^{3-\frac{1}{2}z} \int_0^{2-\frac{1}{3}z-\frac{2}{3}y} dx dy dz = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \int_0^{6-3x-2y} dz dy dx.$$

Problemas

P₁) Aplicando la fórmula de Green-Riemann,

$$\int_{\partial D^+} (ye^x, xe^y) \cdot d\mathbf{s} = \iint_D (e^y - e^x) dA,$$

sin más que tomar sobre ∂D la orientación definida por la propia fórmula.

De acuerdo con el enunciado,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq x\},$$

por tanto

$$\begin{aligned} \iint_D (e^y - e^x) dA &= \int_1^2 \int_0^x (e^y - e^x) dy dx = \int_1^2 (e^x - xe^x - 1) dx = \\ &= \left[2e^x - xe^x - x \right]_1^2 = -e - 1, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la fórmula 56 de la tabla de integrales.

CÁLCULO INTEGRAL

(1º de los Grados en Matemáticas y en Física, Universidad de Cantabria)

EXAMEN FINAL, 6 DE SEPTIEMBRE DE 2017

P₂) Para simplificar la integral introducimos una variante del cambio a polares:

$$x = 2r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Con este cambio el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ pasa a ser $\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$. Y el valor absoluto del determinante jacobiano es igual a $2r$ (las operaciones son inmediatas). Por tanto,

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2} \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 2r \sqrt{1 - r^2} \, dr = -\frac{\pi}{3} \left[(1 - r^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

P₃) La proyección sobre el plano $z = 0$ del conjunto W es el conjunto definido por $x^2 + y^2 \leq 2y$, que no es otra cosa que el círculo D de centro el punto $(0, 1)$ y radio 1.

$$V(W) = \iiint_W dV = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{2y} dz \right) dx \, dy = \iint_D (2y - x^2 - y^2) \, dA,$$

Para calcular la integral doble utilizamos el cambio

$$x = r \cos \theta, \quad y = 1 + r \sin \theta,$$

para el que el valor absoluto del jacobiano es r . Por tanto,

$$V(W) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(1 - r^2) \, d\theta \, dr = 2\pi \int_0^1 (r - r^3) \, dr = \frac{\pi}{2}.$$

OBSERVACIONES:

- También se resuelve fácilmente con el cambio a polares estándar, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Es necesario observar que entonces el ángulo θ solamente llega hasta π , no hasta 2π .
- Es inadmisibles que como resultado de un volumen se dé un número negativo.

P₄) Llamamos W a la esfera de radio 3 definida por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, cuyo borde ∂W es precisamente la superficie esférica Σ , y aplicamos el teorema de la divergencia de Gauss (calculamos previamente la divergencia de $\mathbf{F}$, $\operatorname{div} \mathbf{F} = 6x + 10$). Entonces, para la orientación exterior a W sobre $\partial W = \Sigma$,

$$\iint_{\Sigma^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W (6x + 10) \, dV = 10 V(W) = 10 \frac{4}{3} \pi 3^3 = 360 \pi,$$

donde hemos utilizado la antisimetría de la función x sobre W para deducir que $\iiint_W x \, dV = 0$.