Cálculo Integral

(1º de los Grados en Matemáticas y en Física, Universidad de Cantabria)

Examen final, 12 de junio de 2017

Soluciones

Cuestiones

C$_1$) En este caso la condición es necesaria y suficiente.

Que es *necesaria* se demuestra en el apartado 3 $\Rightarrow$ 4 del teorema 1.33.

Que es *suficiente* se sigue del apartado *C)* del mismo teorema aplicando alguno de estos dos razonmientos:

- $D = \mathbb{R}^3$ es estrellado (basta tomar como $\boldsymbol{p_0}$ cualquier punto de $\mathbb{R}^3$),
- $n = 3$ y además $D = \mathbb{R}^3$.

Observaciones tras la corrección:

1. Se pedía aplicar parte del teorema 1.33 al caso expuesto en esta cuestión, donde $n = 3$ y $D = \mathbb{R}^3$. No bastaba con repetir el enunciado del teorema 1.33.
2. En el enunciado no se dice solamente que $\boldsymbol{F}$ sea un campo vectorial de tres variables, se dice además que su dominio de definición es todo $\mathbb{R}^3$.
3. Cuando P y Q son sentencias lógicas, $P \Rightarrow Q$ es lo mismo que decir que P es condición suficiente para Q y lo mismo que decir que Q es condición necesaria para P.
4. En el apartado *C)* del enunciado del teorema 1.33 se dice que "4 $\Rightarrow$ 3 *siempre que se cumpla* alguna de las siguientes condiciones adicionales". Es incorrecto reformular este enunciado diciendo que "Para que 4 $\Rightarrow$ 3 *hace falta que se cumpla* alguna de las siguientes condiciones. adicionales".

C$_2$)

1. Tomamos una parametrización $\boldsymbol{c}$ de C^+ que sea inyectiva y regular a trozos, aplicamos el teorema 1.15 a la restricción de $\boldsymbol{c}$ a cada subintervalo sobre el que sea regular, y sumamos los resultados. Así obtenemos que $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\, ds$.
2. $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} = \iint_\Sigma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}\, d\sigma$, donde $\boldsymbol{N}$ es la normal unitaria compatible con la orientación de Σ^+ (aplicación directa de la definición 3.31.)

Observaciones tras la corrección:

1. Una igualdad del tipo de $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t)) \cdot \boldsymbol{c'}(t)\, dt$ no es una respuesta válida a la primera parte de esta cuestion, puesto que el segundo miembro de la igualdad no es la integral de una curva sobre C, sino la integral de una función escalar de una variable sobre un intervalo.

   Tampoco una igualdad como $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} = \iint \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(u,v)) \cdot \boldsymbol{n_\Phi}(u,v)\, du\, dv$ respondería a la segunda parte, porque en el miembro de la derecha no estamos escribiendo una integral sobre una superficie sino una integral de dos variables.

2. Los teoremas de Green-Riemann, de Stokes y de la divergencia de Gauss no ayudan a responder a esta cuestión.
3. Una curva simple (definición 1.26(1)) no siempre tiene una parametrización que sea regular, pero el teorema 1.15 sólo es aplicable a caminos que, además de inyectivos, sean regulares. Por eso hemos optado por empezar descomponiendo una parametrización de C^+ es suma de caminos que sean regulares. En general, no se puede aplicar el teorema 1.15 a una paramterización cualquiera de C^+.

$\mathbf{C_3}$) Sea Σ la superficie $x^2+y^2+z^2=4$ y $\mathbf{\Phi}$ su parametrización en coordenadas esféricas, tal como se explica en el ejemplo 3.2, donde $D=[0,\pi]\times[0,2\pi]$. El punto $(0,0,2)=\mathbf{\Phi}(0,\theta)$ no pertenece a $\mathbf{\Phi}(\operatorname{Int} D)$, pero sí que es un punto regular de Σ (ver la definición de punto regular de una superficie al final de la página 134).

Para demostrar esto último, tomar una parametrización $\mathbf{\Phi_0}$ de la esfera, análoga a la $\mathbf{\Phi}$, pero en la que el ángulo φ se mida desde el semieje positivo X y el ángulo θ se mida desde el semieje positivo Y. Entonces, $(0,0,2)=\mathbf{\Phi_0}(\pi/2,\pi/2)$ y $(\pi/2,\pi/2)\in \operatorname{Int} D$.

Observación tras la corrección:

Una cosa es que *una función sea regular en un punto* (ver página 120) y otra que *un punto de una superficie sea regular* (ver página 134). La pregunta hacía referencia a puntos regulares de una superficie, por lo que mostrar puntos regulares de la parametrización $\mathbf{\Phi}$ que no estén en $\mathbf{\Phi}(\operatorname{Int} D)$ no contestaba a la pregunta.

$\mathbf{C_4}$) Podemos asegurar que f es integrable, porque todas sus discontinuidades están contenidas en una superficie y por tanto forman un conjunto despreciable para la integración triple (definición 4.1).

Observaciones tras la corrección:

1. No es cierto que $\Sigma\cap W$ tenga sólo 6 puntos, o que sea finito. La superficie esférica Σ está inscrita en el cubo W, por lo que $\Sigma\subset W$, luego $\Sigma\cap W=\Sigma$, que es infinito. Lo que sí consta de 6 puntos es $\Sigma\cap\partial W$, pero esto no nos ayuda en nada para responder a la cuestión.
2. El concepto de función integrable Riemann es global, no local. No tiene sentido decir que una función es integrable o no integrable en un punto.
3. La diferencia conjuntista de W menos Σ puede escribirse como $W\backslash\Sigma$, pero no como W/Σ.

$\mathbf{C_5}$) $0\le z\le 2x$ y $x\le 3$ implican $0\le z\le 6$;

$x\le 3$ y $z\le 2x$ implican $z/2\le x\le 3$;

$x\le y\le 6-x$ implica (obviamente) $x\le y\le 6-x$.

Hemos demostrado la implicación hacia la derecha de la siguiente equivalencia:

$$\left.\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & x & \leq & 3 \\ x & \leq & y & \leq & 6-x \\ 0 & \leq & z & \leq & 2x \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & z & \leq & 6 \\ z/2 & \leq & x & \leq & 3 \\ x & \leq & y & \leq & 6-x \end{array}\right.$$

La implicación hacia la izquierda se demuestra de manera análoga: $0 \leq z$ y $z/2 \leq x \leq 3$ implican $0 \leq x \leq 3$; $0 \leq z$ y $z/2 \leq z$ implican $0 \leq z \leq 2x$.

Como además

$$z \leq 6 \;\Rightarrow\; z/2 \leq 3 \qquad \text{y} \qquad x \leq 3 \;\Rightarrow\; x \leq 6-x,$$

podemos poner

$$\int_0^3 \int_x^{6-x} \int_0^{2x} dz\, dy\, dx = \int_0^6 \int_{z/2}^3 \int_x^{6-x} dy\, dx\, dz.$$

OBSERVACIONES TRAS LA CORRECCIÓN:

1. No tiene sentido escribir $\int_0^{2x} \int_{\cdots}^{\cdots} \int_{\cdots}^{\cdots} dy\, dx\, dz$. En una integral reiterada los límites de la última integral que se va a calcular siempre tienen que ser constantes, es decir, no pueden depender de ninguna de las variables de integración.
2. La respuesta a esta cuestión, al igual que el resto de respuestas, requería una justificación. No bastaba con dar el resultado sin más.
3. La justificación también podía hacerse argumentando sobre un dibujo aproximado del recinto de integración, que es el tetraedro de vértices $(0,0,0)$, $(0,6,0)$, $(3,3,0)$ y $(3,3,6)$.
4. En caso de que la respuesta se haga a través de desigualdades no se puede omitir la implicación hacia la izquierda entre los dos sistemas de inecuaciones. Y tampoco las implicaciones $z \leq 6 \;\Rightarrow\; z/2 \leq 3$, $x \leq 3 \;\Rightarrow\; x \leq 6-x$, porque hay que asegurarse de que se cumplen todas las condiciones de las definiciones 2.19 (en particular, que $\varphi_1 \leq \varphi_2$ sobre $[a,b]$) y 4.3 (en particular, que $\alpha \leq \beta$ sobre D).

Problemas

P_1) De acuerdo con la observación 106, la región D a la que se refiere el enunciado es la definida por las desigualdades

$$0 \leq y-x \leq 2, \qquad 0 \leq y+x \leq 1,$$

que es un rectángulo cuyos lados no son paralelos a los ejes.

La propia descripción de D nos sugiere que cambiemos las variables x, y por otras nuevas, $u = y - x$, $v = y + x$, para que el nuevo dominio sí que sea un rectángulo de lados paralelos a los ejes, $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 1$:

$$\boldsymbol{T} : \Delta = [0,2] \times [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{T}(\Delta) = D, \quad \boldsymbol{T}(u,v) = (x,y) = \left(\frac{v-u}{2}, \frac{v+u}{2}\right).$$

El valor absoluto del jacobiano de $\boldsymbol{T}$ en cualquier punto es $\frac{1}{2}$, por lo que se cumplen todas las hipótesis del corolario 2.26, tomando $N = \varnothing$, y podemos aplicar la fórmula del cambio de variable y el teorema de Fubini para funciones continuas,

$$\iint_D xe^{x-y}\,dx\,dy \overset{FCV}{=} \iint_\Delta \frac{1}{2}\,\frac{v-u}{2}e^{-u}\,du\,dv \overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{4}\int_0^2 \int_0^1 (v-u)e^{-u}\,dv\,du \overset{(56)}{=}$$
$$\overset{(56)}{=} \frac{1}{4}\int_0^2 e^{-u}\left[\frac{1}{2}v^2 - uv\right]_{v=0}^{v=1} = \frac{1}{8}\int_0^2 e^{-u}(1-2u)\,du \overset{(56)}{=}$$
$$\overset{(56)}{=} \frac{1}{8}\left[e^{-u}(1+2u)\right]_{u=0}^{u=2} = \frac{1}{8}\left(\frac{5}{e^2} - 1\right)$$

(hemos hecho uso de la fórmula 56 de la tabla de integrales).

Observaciones tras la corrección:

1. El cambio de variables es una aplicación que transforma las variables $(u.v)$ en las variables (x,y), y no al revés. Por tanto, el coeficiente que hay que introducir en el cálculo de la integral es $\frac{1}{2}$, y no 2.
2. También se podía resolver el problema de otras formas: (a) sin hacer un cambio de variable, para lo que resulta necesario descomponer D en tres regiones simples; (b) aplicando teorema de Green-Riemann a un campo vectorial, por ejemplo $\boldsymbol{F} = (xe^{x-y}, 0)$, para convertir la integral doble sobre D en una integral de línea sobre ∂D.

   Ambas alternativas hacen bastante más larga la solución y más complejos los cálculos, con lo que son más costosas en tiempo y más propensas a cometer errores.

$\mathbf{P_2}$) Dado que las desigualdades que definen a W son simétricas cuando cambiamos x por $-x$, y que xy es una función antisimétrica respecto del mismo cambio, podemos garantizar que $\iiint_W xy\,dV = 0$ (ver el ejemplo L.5). Por tanto, solamente tenemos que calcular $\iiint_W z\,dV$. *No obstante, vamos a iniciar la solución del problema como si no nos hubiéramos dado cuenta de esta simplificación.*

En coordenadas cilíndricas. Como en las desigualdades que definen a W aparece repetidamente la expresión $x^2 + y^2$, pasamos la descripción de W a coordenadas cilíndricas, en la esperanza de que se nos simplifique la tarea:

$$y \ge 0 \;\Leftrightarrow\; r\sin\theta \ge 0 \;\Leftrightarrow\; \sin\theta \ge 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \le \theta \le \pi;$$

$$x^2+y^2 \le z^2 \le x^2+y^2 \;\Leftrightarrow\; \left.\begin{array}{rl} r^2 \le z^2 & \le 18-r^2 \\ z & \ge 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow\; r \le z \le \sqrt{18-r^2}.$$

De las desigualdades $r^2 \le z^2 \le 18-r^2$ deducimos además que $r^2 \le 9$, lo que equivale a $|r| \le 3$, que a su vez equivale (puesto que $r \ge 0$) a $0 \le r \le 3$. Por último, si $0 \le r \le 3$, siempre existe algún z positivo para el cual $r^2 \le z^2 \le 18-r^2$ Recapitulando, una descripción de W en coordenadas cilíndricas como región simple en la dirección de las z es

$$0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le r \le 3, \quad r^2 \le z^2 \le 18-r^2,$$

luego

$$\iiint_W (xy+z)\, dx\, dy\, dz \overset{\text{(T.4.5 y T.4.9)}}{=} \int_0^\pi \int_0^3 \int_r^{\sqrt{18-r^2}} (r^3\cos\theta\sin\theta + rz)\, dz\, dr\, d\theta.$$

En lugar de resolver la integral reiterada en el orden en el que la hemos planteado, que se nos complicaría al intentar calcular la integral indefinida $\int \cos\theta\sin\theta\, r^3\sqrt{18-r^2}\, dr$, observamos que si integramos primero sobre la variable θ, el primer sumando tiene integral nula, $\int_0^\pi \sin\theta\cos\theta\; d\theta = \frac{1}{2}[\sin^2\theta]_0^\pi = 0$, y nos desaparece la dificultad. (Esencialmente, esto se debe a la simetría de la que hablamos al principio.) Entonces

$$\begin{aligned}\iiint_W (xy+z)\; dV &= \int_0^3 \int_r^{\sqrt{18-r^2}} \int_0^\pi (r^3\cos\theta\sin\theta + rz)\; d\theta\, dz\, dr = \\ &= \pi \int_0^3 r\left[\frac{z^2}{2}\right]_r^{\sqrt{18-r^2}} dr = \pi\int_0^3 (9r-r^3)\; dr = \pi\left[\frac{9}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^3 = \\ &= \frac{81}{4}\,\pi.\end{aligned}$$

En coordenadas esféricas. La región W es el conjunto que se encuentra en el semiespacio $y \ge 0$ y está por encima del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y por debajo de la semiesfera de radio $\sqrt{18}$, $z = \sqrt{18-x^2-y^2}$. Una figura justifica de manera inmediata la siguiente descripción de W en coordenadas esféricas:

$$W: \qquad 0 \le \rho \le \sqrt{18}, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}.$$

También pueden obtenerse las mismas desigualdades para W recurriendo a las del enunciado, sin utilizar para nada la figura:

$$z^2 \le 18-x^2-y^2 \;\Leftrightarrow\; \rho^2 \le 18 \;\Leftrightarrow\; 0 \le \rho \le \sqrt{18}$$
$$y \ge 0 \;\Leftrightarrow\; \sin\theta \ge 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \le \theta \le \pi$$
$$\left.\begin{array}{rl} x^2+y^2 \le z^2 \le \sin^2\varphi & \le \cos^2\varphi \\ z \ge 0 \;\Leftrightarrow\; \cos\varphi & \ge 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow\; \sin\varphi \le \cos\varphi \Leftrightarrow\; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$$

(para las equivalencias hemos utilizado que tanto ρ como $\sin\varphi$ son positivos). Entonces,

$$\iiint_W (xy+z)\,dV = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{18}} (\rho^4\sin\varphi\cos\theta\sin\theta + \rho^3\sin\varphi\cos\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

Igual que hicimos cuando integrábamos en cilíndricas, cambiamos el orden de iteración para integrar primero respecto de θ, puesto $\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = 0$, con lo que

$$\iiint_W (xy+z)\,dV = \int_0^{\sqrt{18}}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi} \rho^3\sin\varphi\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi\,d\rho =$$
$$= \pi\frac{1}{2}\Big[\sin^2\varphi\Big]_0^{\pi/4}\frac{1}{4}\Big[\rho^4\Big]_0^{\sqrt{18}} = \frac{81}{4}\,\pi.$$

P$_3$) En primer lugar calculamos los valores de u y v tales que $\mathbf{\Phi}(u,v) = (5,4,1)$. Dichos valores se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones

$$u^2+v^2 = 5, \quad 2uv = 4, \quad u^3 = 1.$$

Es fácil ver que la solución de este sistema es $u=1$, $v=2$, con lo que $\mathbf{\Phi}(1,2) = (5,4,1)$. A continuación calculamos $\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial u}(1,2)\times\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial v}(1,2)$. Para todo u,v, se tiene:

$$\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial u}(u,v) = (2u,2v,3u^2), \quad \frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial v}(u,v) = (2v,2u,0),$$
$$\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial v}(u,v) = (-6u^3, 6u^2v, 4u^2-4v^2).$$

En particular, $\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial u}(1,2)\times\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial v}(1,2) = (-6,12,-12)$. Por tanto, una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto $(5,4,1)$ es (véase la página 115 de los apuntes)

$$(x-5, y-4, z-1)\cdot(-6,12,-12) = 0, \text{ es decir, } x-2y+2z+1 = 0.$$

P$_4$) **Primera forma de resolución. Aplicando el teorema de Stokes.**

El teorema de teorema de Stokes se puede aplicar a esta superficie (véase la sección 3.4.2). Entonces,

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Sigma^+}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}.$$

En este caso $\partial\Sigma$ es la circunferencia $x^2+y^2 = 4$ en el plano $z=1$. Una parametrización de esta curva es

$$\boldsymbol{c}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 1), \quad 0\le t\le 2\pi.$$

Como la orientación de las normales es hacia arriba, esta parametrización respeta el criterio de orientaciones establecido en el teorema de Stokes. Además, se comprueba fácilmente que

$$\boldsymbol{c}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0), \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t)) = (2\sin t, -12\cos t\sin t, 16\sin^4 t + 8\cos^3 t).$$

Aplicando ahora la definición 1.13 obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} &= \int_0^{2\pi} (2\sin t, -12\cos t\sin t, 16\sin^4 t + 8\cos^3 t)\cdot(-2\sin t, 2\cos t, 0)\,dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-4\sin^2 t - 24\cos^2 t\sin t)\,dt = \left[-2t + \frac{\sin 2t}{2} + 8\cos^3 t\right]_0^{2\pi} = -4\pi.\end{aligned}$$

Segunda forma de resolución. Aplicando el teorema de la divergencia.

Sea W la semiesfera maciza, es decir, la región de $\mathbb{R}^3$ definida por la desigualdades

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 4, \quad z \ge 1.$$

Se tiene que $\partial W = \Sigma \cup \Sigma_1$, siendo Σ_1 la "tapa de abajo" de W, es decir,

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4,\ z = 1\}. \tag{1}$$

Aplicando el teorema de la divergencia (teorema 4.16) tenemos que:

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{\Sigma_1^+} \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_W \operatorname{div}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}) = 0$$

(ya que la divergencia de un rotacional es nula).

Por tanto,

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = -\iint_{\Sigma_1^+} \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

Recordar que en el teorema de la divergencia la orientación de las normales es "hacia afuera", que en el caso de Σ quiere decir "hacia arriba", es decir, la que se considera en el enunciado del problema.

Calculemos la segunda integral de superficie que aparece en la fórmula anterior. Mediante cálculos sencillos se obtiene que

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})(x,y,z) = (4y^3 z, 2yz - 3x^2, -3y - z^2),$$

Además, de acuerdo com (1), Σ_1 es una superficie en forma explícita dada por $z = 1$, con la condición $(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\}$. Entonces, un vector normal a

Σ_1 apuntando "hacia afuera" (es decir, "hacia abajo") es $n = (0, 0, -1)$ (véase el ejemplo 3.6). Aplicando ahora la definición 3.22 llegamos a que

$$\iint_{\Sigma_1^+} (4y^3 z, 2yz - 3x^2, -3y - z^2) \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D (4y^3, 2y - 3x^2, -3y - 1) \cdot (0, 0, -1)\, dx\, dy =$$
$$= \iint_D (3y + 1)\, dx\, dy = \iint_D 3y\, dx\, dy + \text{área}(D) = 4\pi$$

(por simetría, $\iint_D 3y\, dx\, dy = 0$).

Concluimos que

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = -4\pi.$$

Observación. El alumno interesado puede intentar calcular directamente la integral de superficie que se pide en el enunciado.