SOLUCIONES

Problema

Parametrizaremos Σ de dos maneras diferentes, inspiradas en los ejemplos 3.1 y 3.6 de los apuntes. Cada parametrización llevará aparejada una orientación.

Con una parametrización explícita. Sobre el conjunto $D = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ la función $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ es de clase $\mathscr{C}^1$, luego

$$\mathbf{\Phi_1} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{\Phi_1}(x,y) = (x, y, g(x,y))$$

es una parametrización de Σ. En cada punto de Σ el vector normal asociado a $\mathbf{\Phi_1}$ es

$$\boldsymbol{n_1} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right),$$

de modo que $\boxed{\text{el sentido en el que se atraviesa } \Sigma \text{ es “de abajo hacia arriba”}}$. Llamamos Σ^+ a la superficie del enunciado dotada de esta orientación. Entonces

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_D \left(-\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} - 1\right) dx\, dy = \\
&= \iint_D \left(-\sqrt{x^2+y^2} - 1\right) dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_1^2 r(-r-1)\, dr\, d\theta = \\
&= -2\pi \left[\frac{1}{3} r^3 + \frac{1}{2} r^2\right]_1^2 = \boxed{-\frac{23\pi}{3}},
\end{aligned}$$

donde para resolver la integral doble hemos hecho un cambio a coordenadas polares.

Con una parametrización usando coordenadas cilíndricas. Otra posibilidad es comenzar utilizando coordenadas cilíndricas para describir Σ, lo que nos da

$$\mathbf{\Phi_2} : [0, 2\pi] \times [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{\Phi_2}(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z).$$

Para esta parametrización el vector normal es (las operaciones son rutinarias)

$$\boldsymbol{n_2} = \frac{\partial \mathbf{\Phi_2}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi_2}}{\partial z} = (z\cos\theta, z\sin\theta, -z).$$

Como la tercera coordenada de $\boldsymbol{n_2}$ siempre es negativa, sabemos que con la parametrización $\mathbf{\Phi_2}$ estaremos $\boxed{\text{atravesando la superficie } \Sigma \text{ “de arriba hacia abajo”}}$. Para ser coherentes con la notación que hemos usado en el caso anterior, a la superficie Σ dotada de la orientación inducida por $\boldsymbol{n_2}$ deberé llamarla Σ^-. Entonces

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma^-} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 (2z\cos\theta, 2z\sin\theta, z-1) \cdot (z\cos\theta, z\sin\theta, -z)\, dz\, d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 (z^2 + z)\, dz\, d\theta = 2\pi \left[\frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{2} z^2\right]_1^2 = \boxed{\frac{23\pi}{3}}.
\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN: De acuerdo con la definición 3.31, el cálculo de la integral de un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ sobre una superficie orientada Σ^+ puede plantearse de dos formas:

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(u,v))\cdot \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}(u,v)\,du\,dv; \qquad \iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{N}\,d\sigma.$$

Lo que *no es cierto en general* es que $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(u,v))\cdot \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{\Phi}}(u,v)\,du\,dv$.

Cuestiones

C₁) La respuesta es afirmativa, como se explica en el ejemplo 3.27.

Como muestra sirve cualquier superficie que admita una expresión explícita como las del ejemplo 3.6, para las cuales la normal unitaria $\boldsymbol{N}$ de la definición 3.25 es una orientación. En particular,

- sirve uno de los ejemplos de la solución a la cuestión C_2:

$$\Sigma:\ z=1-x-y,\ D=\{(x,y): x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\};\quad \boldsymbol{N}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

- también sirve como ejemplo la superficie del problema:

$$\Sigma:\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ 1\le z\le 2;\quad \boldsymbol{N}=\left(\frac{-x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

OBSERVACIÓN: Es falso que la cinta de Möbius sea un ejemplo que sirva para demostrar que la respuesta es "no". El motivo es que la cinta de Möbius no tiene una parametrización que cumpla las condiciones que se citan en el enunciado de la cuestión. La parametrización del ejemplo 3.28 *no es inyectiva*, dado que $\boldsymbol{\Phi}(0,v)=\boldsymbol{\Phi}(\pi,-v)$ para cualquier $v\in[-1,1]$ (ver la figura K.8).

C₂) Un ejemplo es el triángulo $\Sigma: x+y+z=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$. En efecto, Σ admite las parametrizaciones explícitas definidas mediante

- $z=g(x,y)=1-x-y$; $D=\{(x,y): x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$
- $x=h(y,z)=1-y-z$; $E=\{(y,z): y\ge 0,\ z\ge 0,\ y+z\le 1\}$
- $y=f(z,x)=1-z-x$; $H=\{(z,x): z\ge 0,\ x\ge 0,\ z+x\le 1\}$.

OBSERVACIÓN: No sirve como ejemplo la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y las definiciones

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2},\quad y=\sqrt{1-x^2-z^2},\quad x=\sqrt{1-y^2-z^2},$$

porque cada una de estas cuatro igualdades define un conjunto diferente.

Sí que se podría describir con estas funciones un mismo octante de la esfera (por ejemplo, el octante con todas las coordenadas no negativas). Pero las funciones no son diferenciables en todos los puntos del dominio. Por ejemplo, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ sobre $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$, no es diferenciable en $(1,0)$.