SOLUCIONES

Cuestiones

C_1) No existe. Lo comprobamos por reducción al absurdo, cosa que se puede hacer de varias maneras. Entre ellas:

1. Supongamos que exista un cambio de parámetros $h : [0, 6\pi] \longrightarrow [0, 2\pi]$ de manera que $\boldsymbol{c_2} = \boldsymbol{c_1} \circ h$, donde $\boldsymbol{c_1}$ es el camino con dominio $[0, 2\pi]$ y $\boldsymbol{c_2}$ es el camino con dominio $[0, 6\pi]$. Entonces

$$(0,1) = \boldsymbol{c_2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{c_2}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \boldsymbol{c_2}\left(\frac{9\pi}{2}\right).$$

   En cambio, $\boldsymbol{c_1}$ sólo alcanza el punto $(0, 1)$ para un único valor del parámetro, $\pi/2$, por lo que necesariamente ha de ocurrir que

$$\frac{\pi}{2} = h\left(\frac{\pi}{2}\right) = h\left(\frac{5\pi}{2}\right) = h\left(\frac{9\pi}{2}\right),$$

   luego h no es una aplicación inyectiva, lo que contradice a la definición 1.20.

2. Si $\boldsymbol{c_2}$ fuese una reparametrización de $\boldsymbol{c_1}$, sabemos que $\int_{\boldsymbol{c_1}} ds = \int_{\boldsymbol{c_2}} ds$ (tomando $f = 1$ en el teorema 1.24). Pero resulta que $\|\boldsymbol{c_1'}\| = \|\boldsymbol{c_2'}\| = 1$, con lo que

$$\int_{\boldsymbol{c_1}} ds = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi, \qquad \int_{\boldsymbol{c_2}} ds = \int_0^{6\pi} dt = 6\pi,$$

   que son obviamente diferentes.

OBSERVACIONES:

1. La aplicación $h : [0, 6\pi] \longrightarrow [0, 2\pi]$, $h(t) = t/3$ es biyectiva, de clase $\mathscr{C}^1$ y con derivada no nula, pero carece de la principal propiedad que tiene que tener un cambio de parámetros, que la composición $\boldsymbol{c_1} \circ h$ coincida con $\boldsymbol{c_2}$.
   No hay más que observar que para cualquier $t \in [0, 6\pi]$,

$$(\boldsymbol{c_1} \circ h)(t) = (\cos(t/3), \sin(t/3)), \quad \boldsymbol{c_2}(t) = (\cos t, \sin t),$$

   que son distintos para muchos valores de t (en realidad, sólo coinciden para $t \in \{0, 3\pi, 6\pi\}$; para el resto de valores de t son siempre puntos distintos).

2. Que los intervalos de definición de los dos caminos sean diferentes no es suficiente para que no exista un cambio de parámetros entre ambos caminos.

C_2) Sí que existen, una muestra es el ejemplo 2.16.

Problema

El conjunto D está limitado en las y por arriba por la parábola $y=-x^2+2$, y por abajo por la recta $y=1$: $1\leq y\leq -x^2+2$. Y en las x el conjunto D está limitado por la izquierda por el eje vertical, $x=0$ y por la derecha por el valor 1 (el extremo 1 se obtiene del corte de la parábola $y=-x^2+2$ con la recta $y=1$): $0\leq x\leq 1$.

Por tanto, la integral es

$$\iint_D xe^y dA = \int_0^1\int_1^{-x^2+2} xe^y\ dy\,dx = \int_0^1 x\Big[e^y\Big]_{y=1}^{y=-x^2+2} = \int_0^1 x\left(e^{-x^2+2}-e\right)dx =$$
$$= \Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2+2}-\frac{1}{2}ex^2\Big]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{2}(e+e-e^2) = \frac{e^2}{2}-e.$$

El mismo resultado puede obtenerse cambiando el orden de integración:

$$\iint_D xe^y dA = \int_1^2\int_0^{\sqrt{2-y}} xe^y\ dx\,dy = \int_1^2 e^y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{2-y}} dy = \frac{1}{2}\int_1^2 e^y(2-y)\ dy =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[2e^y-ye^y+e^y\Big]_{y=1}^{y=2} = \frac{1}{2}\Big[3e^y-ye^y\Big]_{y=1}^{y=2} = \frac{e^2-2e}{2}.$$

OBSERVACIÓN:

En caso de interpretar como conjunto D el situado por debajo de la recta $y=1$, es decir, el definido por las desigualdades $0\leq y\leq 1$, $0\leq x\leq\sqrt{2-y}$, la integral sería (calculando como en la segunda integral reiterada de antes)

$$\iint_D xe^y dA = \int_0^1\int_0^{\sqrt{2-y}} xe^y\ dx\,dy = \ldots\ = \frac{1}{2}\Big[3e^y-ye^y\Big]_{y=0}^{y=1} = e-\frac{3}{2}.$$