ESTALMAT CANTABRIA
2022 - 2023

Recursividad y Fractales

Elena Álvarez Saiz

*"Robert estaba sentado en su mochila, en medio de la nieve. El frío se le estaba metiendo en los huesos, y seguía nevando. No se veía una luz, una casa, un alma por ningún sitio. ¡Era una verdadera tormenta de nieve! Además, estaba oscuro. ¡Si la cosa seguía así, menuda noche! Sentía los dedos acorchados. No tenía ni idea de dónde estaba. ¿En el Polo Norte quizá?*

*Helado, Robert intentó con desesperación calentarse dándose palmadas. ¡No quería morir congelado! Pero al mismo tiempo un segundo Robert estaba sentado cómodamente en su sillón de mimbre y veía cómo el otro tiritaba. Así que uno puede soñar con uno mismo, pensó.*

*Y entonces los copos de nieve que el viento frío de afuera soplaba en el rostro al otro Robert se hicieron cada vez más grandes, y el primero, el verdadero Robert, que estaba sentado en el cálido sillón, vio que ninguno de esos copos de nieve era igual al otro. Todos esos grandes y suaves copos eran distintos. La mayoría tenía seis puntas o rayos. Y si se miraba con más atención se veía que el dibujo se repetía: estrellas de seis puntas dentro de una estrella de seis puntas, rayos que se ramificaban en rayos cada vez más pequeños, puntas que producían otras puntas.*

*Entonces un dedo le dio unos golpecitos en el hombro, y una voz conocida dijo:*

- *¿No son maravillosos esos copos?*

*Era el diablo de los números, que estaba sentado tras él.*

- *¿Dónde estoy? -preguntó Robert.*

*-Un momento, voy a encender la luz -respondió el anciano. Estrellas de seis puntas dentro de una estrella de seis puntas, rayos que se ramifican en rayos cada vez más pequeños... «¿No son maravillosos estos copos?»*

El diablo de los números. Capítulo 10

**¿Qué vamos a hacer?**

En esa sesión realizaremos un estudio de la autosimilitud introduciendo unos objetos semigeométricos cuya estructura básica se repite a diferentes escalas y que reciben el nombre de fractales. Construiremos algunos fractales con ayuda de Geogebra y descubriremos que estos objetos están presentes en nuestra vida cotidiana modelizando fenómenos de la naturaleza como helechos, nuestros pulmones, en las coles…

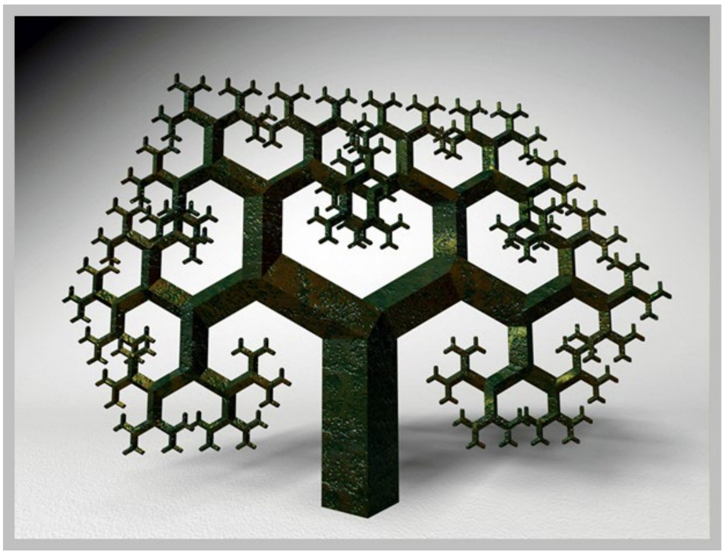


Imagen tomada de http://math-art.net/2008/02/25/the-fractal-tree/

## ¿Qué es un fractal?

El término fractal procede del adjetivo latino *fractus* que significa *interrumpido*, *irregular* o *fraccionario*.

Un fractal es una figura plana o espacial que está compuesta por infinitos elementos. Su principal propiedad es que su aspecto no varía según la escala con que se observe. Por ejemplo, la esfera no es un fractal ya que si se observa a una distancia muy pequeña podría pensarse que es un plano.

Este término fue acuñado por primera vez en 1975 por Benoît Mandelbrot[1]. Según sus palabras "permiten describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a teorías coherentes".

Antes de ver ejemplos de fractales vamos a introducir el concepto de recursividad ya que resulta necesario para crear algunas figuras autosemejantes.

## ¿Qué es la recursividad?

La recursividad aparece en numerosas actividades de la vida diaria. Supone la inclusión en un procedimiento del propio procedimiento por lo que algunos dicen que "*para entender qué es la recursividad antes hay que entender lo qué es la recursividad*".

[1] http://es.wikipedia.org/wiki/Beno%C3%AEtM_andelbrot

- Un ejemplo de recursividad es la definición del factorial de un número n entero no negativo y que se escribe n!
  - si n = 0 entonces: 0! = 1
  - si n > 0 entonces: n! = n · (n-1)!

Para calcular 5! se calcularía

5!=5*4!
4!=4*3!
3!=3*2!
2!=2*1!
1!=1*0!
0!=1

Con lo que 5!=5*4*3*2*1

- La definición de la sucesión de Fibonacci también se genera de forma recursiva:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{array}\right\rangle \qquad 1,1,2,3,5,\ldots$$

- Hay algoritmos o estrategias que se utilizan para resolver problemas que consisten en descomponer el problema original en subproblemas siendo cada uno de ellos similar al de origen. El proceso continúa hasta que los subproblemas llegan a ser tan sencillos que se resuelven directamente. Al final, las soluciones a cada uno de estos subproblemas se pueden combinar para encontrar la solución del problema original.

  Ejemplo: Si se desea calcular el máximo común divisor de dos números m y n, suponiendo que m es mayor que n, se podría realizar lo siguiente

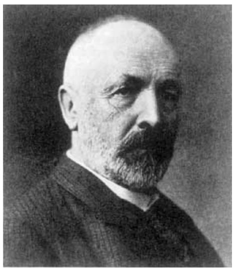
  - Si n divide a m entonces el MCD(m,n)=n
  - Si n no divide a m entonces MCD(m,n)=MCD(n, r) siendo r el resto de dividir m entre n.

  Así MCD(24,15)=MCD(15,9)=MCD(9,6)=MCD(6,3)=3

  Es claro que el cálculo de MCD(m,n) se define en términos de un subproblema que requiere cálculos del mismo tipo.

  Ejemplo: Si se quiere buscar un elemento A en una colección de n números ordenadas se podría proceder de la siguiente forma: tomar el elemento que está a la mitad de dicha colección de números y si A es mayor que ese número buscar en la segunda mitad mientras que si es menor hacerlo en la mitad inferior. Se podría repetir el proceso sucesivamente hasta ver si A está o no en la colección de números dada.

## Actividad 1: Conjunto de Cantor



Para entender mejor qué es un fractal vamos a comenzar las actividades mostrando uno de los más famosos. Recibe el nombre de Georg F. L. P. Cantor que en 1883 lo utilizó como herramienta de investigación para uno de sus estudios.

Su construcción es sencilla, basta realizar los siguientes pasos:

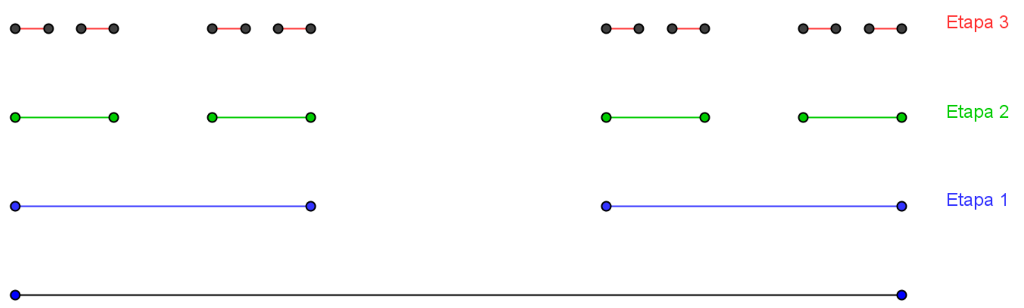
Paso 1: Dibujamos un segmento.

Paso 2: El segmento anterior lo dividimos en tres partes iguales y borramos la parte central.

Paso 3: A cada uno de los nuevos segmentos le aplicamos el paso 2.

Paso 4: Repetimos el paso 3 indefinidamente.

Evidentemente solo podemos mostrar unos pocos pasos de la construcción de este conjunto:



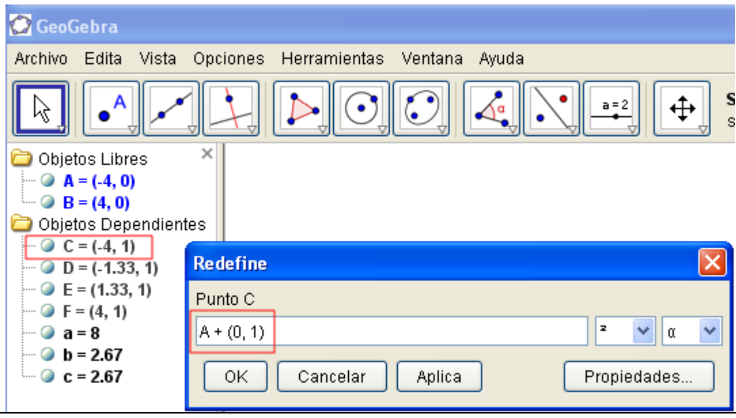

Los puntos extremos de los intervalos que generan el conjunto de Cantor nunca se quita, por lo que este conjunto tiene una cantidad infinita de puntos.

Vamos a construir el conjunto de Cantor con ayuda del programa Geogebra[2].

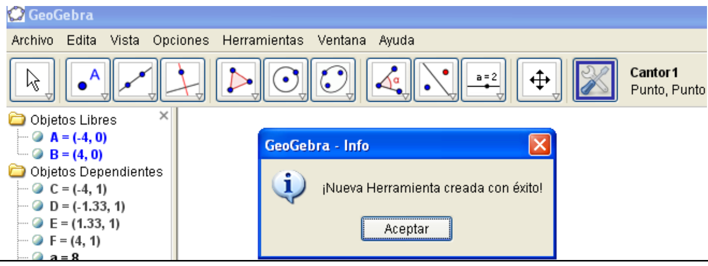
- Definir un segmento de lados A y B
- Reducir el segmento AB a la tercera parte dando lugar al segmento AC
- Crear otro segmento DB que es la traslación del anterior una distancia de 2/3*Distancia(A,B).

| Acciones | Pasos a realizar |
|---|---|
| Abrir Geogebra | Hacer doble clic sobre el icono GeoGebra |
| Modificar el aspecto de la vista gráfica | Elegir Menú Vista. Desmarcar opción ejes<br>Elegir Menú Vista. Desmarcar opción cuadrícula. |
| Definir un segmento AB | Teclear en el campo entrada: A=(-4,0)<br>Teclear en el campo entrada: B=(4,0)<br>Teclear en el campo entrada: a=Segmento[A,B] |

[2] Para obtener información del programa se puede visitar la página http://www.geogebra.org/cms/

| | |
|---|---|
| Generamos los segmentos de la etapa 1 | Tecleamos en el campo entrada:<br>C=A<br>D=A+1/3*(B-A)<br>E=A+2/3*(B-A)<br>F=B<br>b=Segmento[C,D]<br>c=Segmento[E,F] |
| Para visualizar mejor los segmentos de la etapa anterior desplazamos los puntos C, D, E, F una unidad verticalmente hacia arriba | Basta hacer clic sobre los puntos C, D, E, F que se encuentran en el listado de objetos dependientes y redefinirles sumándoles (0,1)<br> |

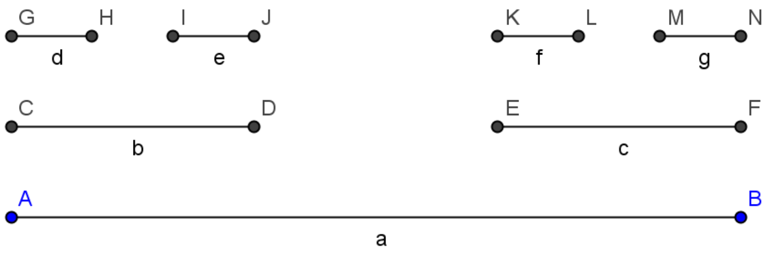
Definida esta etapa vamos a automatizar el proceso seguido definiendo una herramienta que permita realizar todos los pasos anteriores. Para ello

| Acciones | Pasos a realizar |
|---|---|
| Creamos una herramienta que se llamará Cantor1 | Seleccionar del menú Herramientas la opción Creación de Herramientas nueva.<br>En la pestaña Objetos de Salida elegimos C, D, E, F, b, c<br>En la pestaña Objetos de entrada dejamos los puntos A y B<br>En la pestaña Nombre e Icono elegimos Cantor1<br>Pulsamos sobre el botón Concluido.<br> |

Disponemos ya de una nueva herramienta que permite aplicar a dos puntos los pasos seguidos en la construcción de la etapa 1.

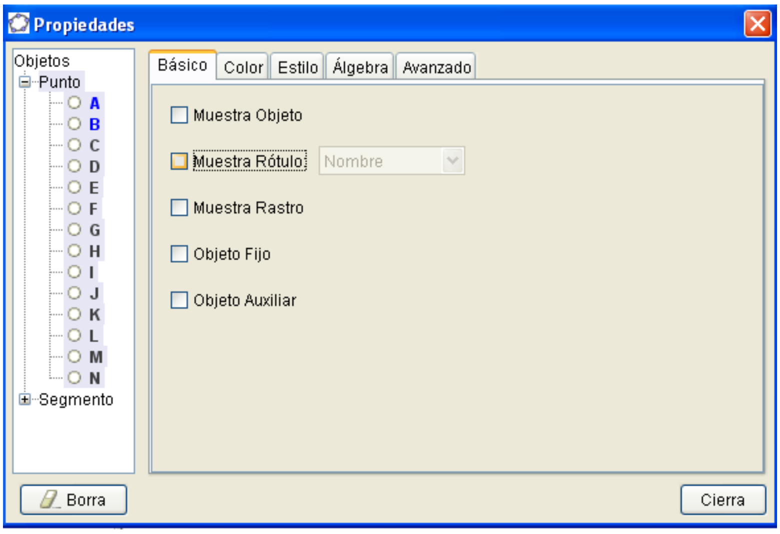
Para construir la etapa 2 basta:

- elegir los puntos C y D teniendo seleccionada la herramienta Cantor1 recientemente creada
- elegir los puntos E y F teniendo seleccionada la herramienta Cantor1 recientemente creada




Para construir la etapa 3 se repetiría el proceso para los segmentos GH, IJ, KL y MN.

Nota: Si se quiere eliminar los puntos y los nombres de los objetos utilizados basta con elegir el menú Edita y la opción Propiedades. Teniendo seleccionados todos los puntos desmarcar la opción Muestra Objeto y Muestra Rótulo y teniendo seleccionados todos los segmentos desmarcar únicamente la opción Muestra Rótulo.




Veamos ahora alguna propiedad de este curioso conjunto. Para ello rellena la siguiente tabla

| Etapa | Número de segmentos | Longitud de cada segmento | Suma de las longitudes de todos los segmentos |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 unidad | 1 unidad |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| … | | | |
| n | | | |

*Pregunta*: ¿Qué observas en relación a la longitud de este conjunto?

Algunas propiedades de este conjunto son las siguientes:

- Su longitud es cero, pero tiene tantos puntos como toda la recta real.
- Es un conjunto totalmente disconexo: entre cada dos puntos siempre hay infinitos puntos que no pertenecen al conjunto.
- Si tomamos A=0 y B=1 este conjunto está formado por aquellos puntos del intervalo unidad cuya expresión en base 3 no contienen el dígito 1.

**Dimensión fractal** (dimensión de autosemejanza)

Además de la propiedad de autosimilitud los fractales poseen otra propiedad que hace referencia a su irregularidad. Se denomina dimensión fractal y normalmente es un número fraccionario.

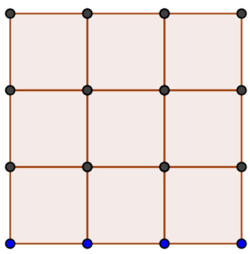
Si observamos el conjunto de Cantor, vemos que en cada paso se reduce la longitud 1/3. Felix Hausdorff definió en 1919 un nuevo concepto de dimensión que Mandrelbrot tomó para caracterizar los fractales. Así, si un todo se puede descomponer en N partes que se obtienen mediante una homotecia de razón R entonces la figura se dice que tiene una dimensión fractal D dada por la expresión:

$$N\left(R\right)^{D}=1 \qquad D=\frac{\log\left(N\right)}{\log(1/R)}$$

Por ejemplo, un segmento tiene dimensión fractal 1

| | |
|---|---|
|  | $3\left(\frac{1}{3}\right)^{1}=1$<br>R=1/3, N=3<br>$D=\frac{\log\left(3\right)}{\log(3)}=1$ |

Un cuadrado tiene dimensión fractal 2 ya que

| | |
|---|---|
|  | $9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=1$<br>R=1/3, N=9<br>$D=\frac{\log\left(9\right)}{\log(3)}=2$ |

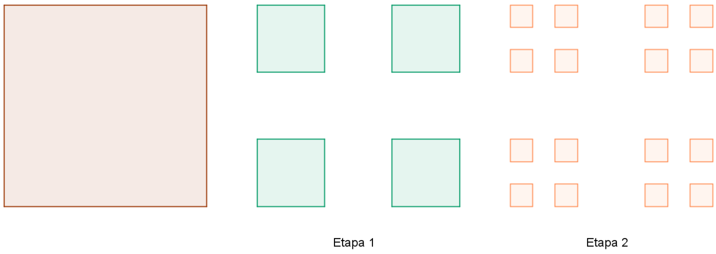
*Pregunta*: Y ¿un cubo dividido en 27 partes?

Observa que: El conjunto de Cantor tiene una dimensión fraccionaria entre 0 y 1 (es algo más que un punto pero menos que un segmento). Su dimensión se puede calcular con la fórmula anterior teniendo en cuenta que N=2 y R=1/3

$$D=\frac{\log\left(2\right)}{\log(3)}\approx 0.6309$$

### Actividad 2: Cuadrado de Cantor

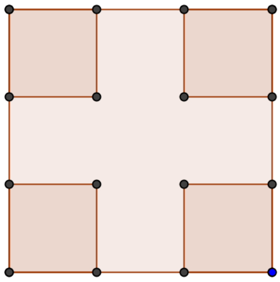
Podríamos seguir el mismo esquema obteniendo así el cuadrado de Cantor.




Para construir con Geogebra este conjunto se deberá:

- Definir un cuadrado R de lado el segmento que une los puntos A y B. Llamamos L al lado de este cuadrado.
- Reducir el cuadrado R a la tercera parte dando lugar a un nuevo cuadrado R1 de lado A1A2.
- Trasladar horizontalmente el cuadrado R1 a la derecha 2/3 de la Distancia(A,B). Llamamos R2 a este cuadrado y A3A4 a uno de sus lados.
- Trasladamos verticalmente 2/3 L los dos cuadrados anteriores R1 y R2 obteniendo así R3 y R4.
- Aplicar a R1, R2, R3 y R4 los mismo pasos aplicados a R y repetir el proceso indefinidamente.

| Acciones | Pasos a realizar |
|---|---|
| Abrir Geogebra | Hacer doble clic sobre el icono   |
| Modificar el aspecto de la vista gráfica | Elegir Menú Edita. Desmarcar opción ejes<br>Elegir Menú Edita. Desmarcar opción cuadrícula. |
| Definir un cuadrado de lado el segmento AB | Teclear en el campo entrada: A=(-4,0)<br>Teclear en el campo entrada: B=(0,0)<br>Teclear en el campo entrada: r=Polígono[A,B,4] |
| Generamos los cuadrados correspondientes a la etapa 1 | Tecleamos en el campo entrada:<br>L=Distancia[A,B]<br>A1=A<br>A2=A+1/3*(B-A)<br>A3=A+2/3*(B-A)<br>A4=B<br>r1=Polígono[A1,A2,4]<br>r2=Segmento[A3,A4]<br>u=(0,2/3*L)<br>A5=A1+u<br>A6=A2+u<br>A7=A3+u<br>A8=A4+u<br>r3=Polígono[A5,A6,4]<br>r4=Segmento[A7,A8] |

| | |
|---|---|
| | |
| Modificamos el dibujo para que no se visualice nada más que los puntos y los cuadrados. | Elegir del menú Edita la opción Propiedades y desmarcar la opción Muestra Objeto y Muestra Rótulo de aquellos objetos que se desee.  |
| Para visualizar mejor los segmentos de la etapa anterior se pueden desplazar los puntos A1, … , A8 horizontalmente una longitud L+1. | Basta hacer clic sobre los puntos A1, …, A8 que se encuentran en el listado de objetos dependientes y redefinirles sumándoles (0,2/3*L) |
| Crear una herramienta que sea Cantor2 para repetir el proceso sobre cualquier cuadrado. | Elegir del menú Herramientas la opción Creación de Herramientas Nueva.<br>En la pestaña Objetos de Salida incluir A1, A2, …, A8, r1, r2, r3, r4.<br>En la pestaña Objetos de Entrada incluir A y B.<br>En la pestaña Nombre e Icono elegir Cantor2.<br>Pulsar sobre el botón Concluido. |

Rellena ahora la siguiente tabla suponiendo que el cuadrado inicial tiene de área una unidad cuadrada:

| Etapa | Número de cuadrados | Perímetro de cada cuadrado | Área de cada cuadrado | Perímetro total | Área total |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 4 unidades de longitud | 1 unidad de área | | |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| … | | | | | |
| n | | | | | |

*Pregunta*: ¿Qué puedes deducir respecto al perímetro y al área del cuadrado de Cantor si este proceso continuara indefinidamente?

*Pregunta*: ¿Cuál será la dimensión fractal? En este caso R=1/3 y N=4 luego

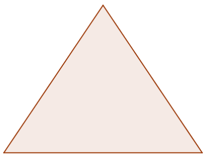
## Actividad 3: Triángulo de Sierpinski

El triángulo de Sierpinski es otro fractal muy conocido y estudiado.

Se introdujo en 1916 por el matemático polaco Maclaw Sierpinski (1882 – 1969). En su honor, uno de los cráteres de la luna fue bautizado con su nombre.

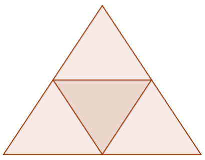
Para su construcción realizamos los siguientes pasos:

Paso 1: Dibujamos un triángulo T equilátero de lado el segmento que une dos puntos A y B. Sea L el lado de T.

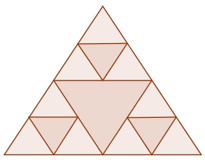


Paso 2: Creamos un nuevo triangulo cuyos vértices son los puntos medios del triángulo T.

Paso 3: De los cuatro pequeños triángulos que se han formado, desechamos el triángulo central.



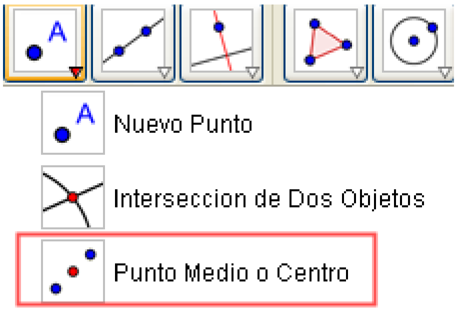
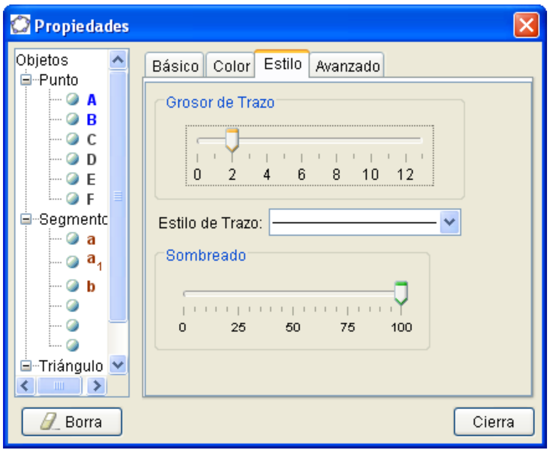
Paso 4: Para cada uno de los tres triángulos restantes aplicamos nuevamente los pasos 2 y 3. La región formada por los triángulos no desechados se llama triángulo de Sierpinski de orden 2.

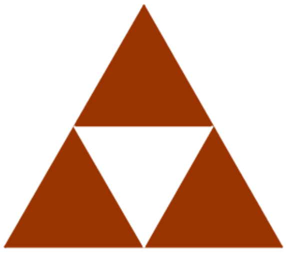


Paso 5: Aplicamos el paso 4 indefinidamente.

Dibujamos con Geogebra el triángulo de Sierpinski:

| Acciones | Pasos a realizar |
|---|---|
| Abrir Geogebra | Hacer doble clic sobre el icono   |
| Modificar el aspecto de la vista gráfica | Elegir Menú Vista. Desmarcar opción ejes<br>Elegir Menú Vista. Desmarcar opción cuadrícula. |

| | |
|---|---|
| Definir un triángulo de lado el segmento AB | Teclear en el campo entrada: A=(-3,0)<br>Teclear en el campo entrada: B=(0,3)<br>Teclear en el campo entrada: T=Polígono[A,B,3] |
| Generamos los triángulos correspondientes a la etapa 1 | Elegimos la herramienta Punto Medio:<br><br><br>• Marcamos los puntos A y B. Se obtiene D.<br>• Marcamos los puntos A y C. Se obtiene E.<br>• Marcamos los puntos B y C. Se obtiene F.<br><br>Nota: También se puede obtener el punto medio de otros dos, P y Q, tecleando en la ventana entrada PuntoMedio[P,Q].<br><br>Creamos el triángulo t1 cuyos vértices son los tres puntos obtenidos:<br>• Seleccionamos la herramienta triángulo<br>• Hacemos clic en los puntos D, E, F, D.<br><br>Rellenamos el triángulo generado de blanco. Para ello, le seleccionamos y en sus propiedades elegimos como color blanco y en la pestaña Estilo la opción Sombreado con valor 100.<br><br> |
| Modificamos el dibujo para que no se visualice nada más que los puntos y los cuadrados. | Elegir del menú Edita la opción Propiedades y desmarcar la opción Muestra Objeto y Muestra Rótulo de aquellos objetos que se desee. |

| | |
|---|---|
| |  |
| Crear una herramienta que sea Sierpinski1 para repetir el proceso sobre cualquier cuadrado. | Elegir del menú Herramientas la opción Creación de Herramientas Nueva.<br>En la pestaña Objetos de Salida incluir D,E,F,r1.<br>En la pestaña Objetos de Entrada incluir A y B.<br>En la pestaña Nombre e Icono elegir Sierpinski1.<br>Pulsar sobre el botón Concluido. |

Generar el triángulo de Sierpinski de orden 2, 3 y 4

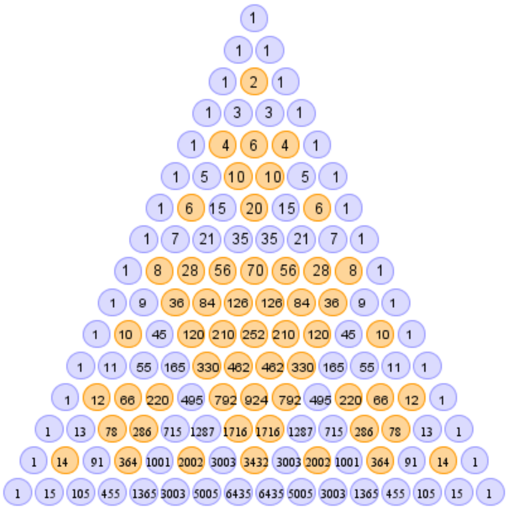
Analizamos ahora alguna propiedad geométrica de este conjunto rellenando la siguiente tabla suponiendo que el lado del triángulo inicial es de longitud 1.

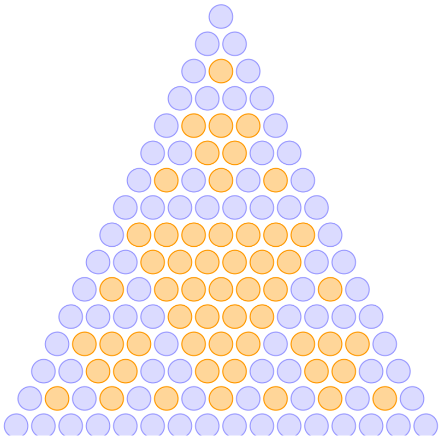
| Etapa | Número de triángulos que se construyen en la etapa | Longitud de la base de los triángulos que se generan | Perímetro total de los triángulos que se generan | Área de los triángulos que se generan |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 3 | $\frac{\sqrt{3}}{8}$ |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| … | | | | |
| n | | | | |

*Pregunta*: ¿Qué puedes decir en relación al perímetro y al área? ¿Cuál es su dimensión fractal?

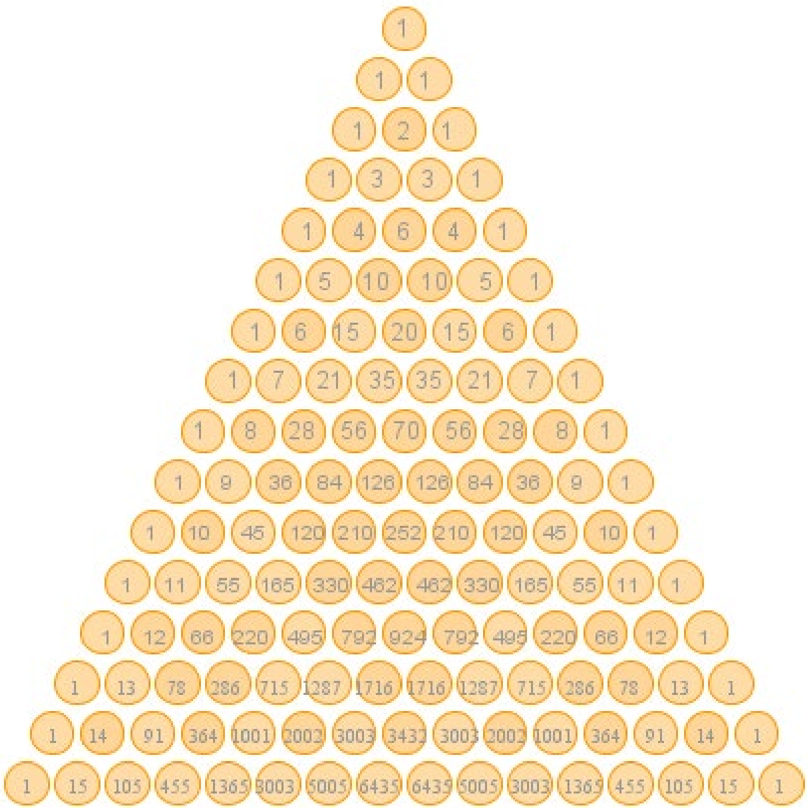
*Observación*: Una propiedad muy llamativa del triángulo de Sierpinski es su conexión con el triángulo de Pascal. El triángulo de Pascal define de arriba abajo los coeficientes de cada uno de los términos del desarrollo de un binomio elevado a la potencia correspondiente a la profundidad del triángulo.

Ahora, superponiendo un triángulo de Sierpinski sobre el de Pascal (siendo los dos de igual tamaño) se puede comprobar que los triángulos coloreados de azul se corresponden con los números impares y los naranjas con los pares.

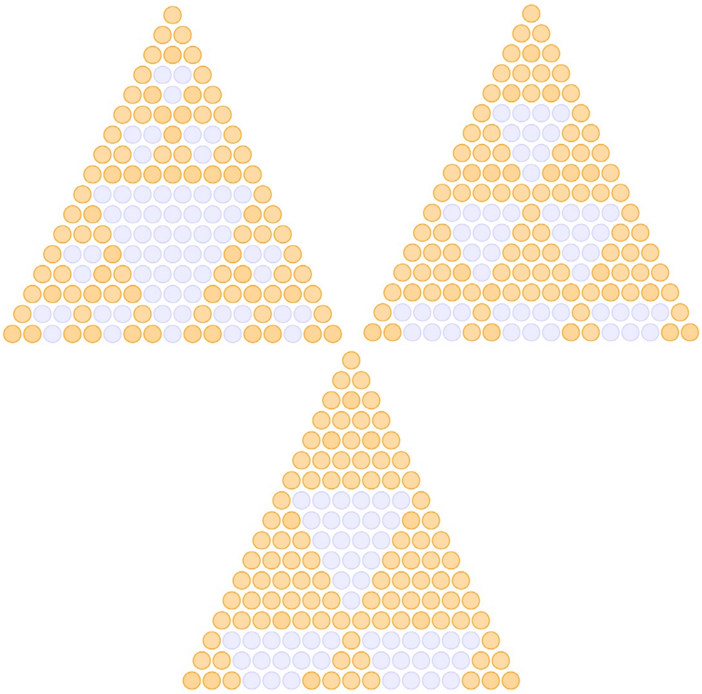




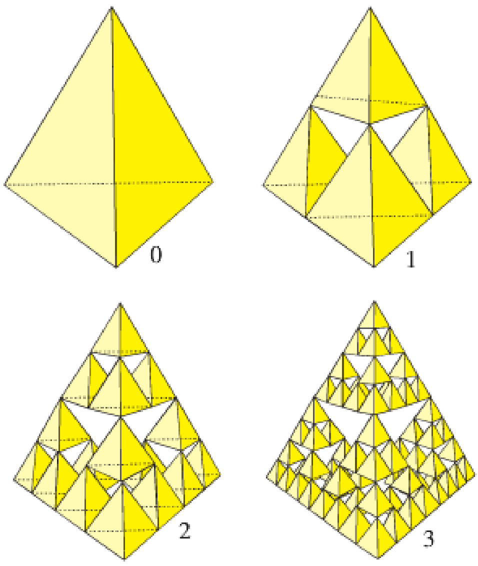
*Pregunta:* ¿Qué pasaría si se pinta de blanco cuando el número al que corresponde la celda es múltiplo de un número concreto (3, 5, 7) o se pinta de negro cuando no es múltiplo? ¿Qué pasaría si pintamos los números primos del triángulo de Pascal?[3]



[3] http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/activities/Pascal1/Index.html



El triángulo de Sierpinski se puede generalizar a una figura en 3D,




*Nota*: Así como el triángulo de Sierpinski tiene perímetro infinito y contiene área finita nula, el tetraedro de Sierpinski tiene una superficie infinita que contiene un volumen nulo. Esto se debe a que si el tetraedro inicial tiene arista *a*.

| Etapa | Volumen total | Superficie total |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ | $\sqrt{3}\,a^3$ |
| n | $4^n\frac{\sqrt{2}}{12}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^3\right]^n=\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{a^3}{2}\right)^n$ | $4^n\sqrt{3}\left(\frac{a}{2}\right)^n=2^n\sqrt{3}a^n$ |

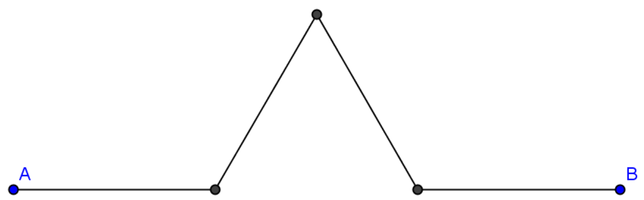
### Actividad 4: Curva de Koch

Esta curva fue estudiada por el matemático sueco Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924) en 1904.

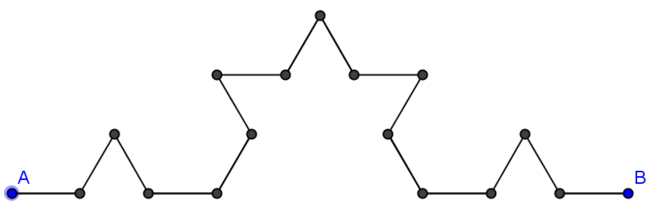
Para su construcción realizamos los siguientes pasos:

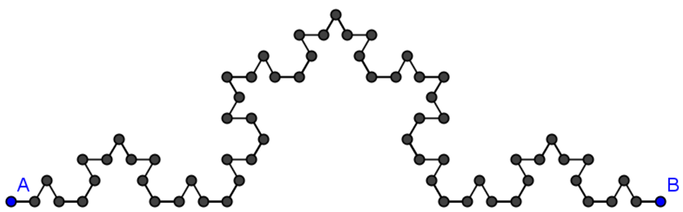
Paso 1: Dibujamos un segmento que une dos puntos A y B. Sea L su longitud.

Paso 2: Dividimos este segmento en tres partes iguales y sobre la parte central se levanta un triángulo equilátero.




Paso 3: Sobre los cuatro nuevos segmentos volvemos a realizar el paso 2.




Dibujamos con Geogebra el triángulo de Sierpinski:

| Acciones | Pasos a realizar |
|---|---|
| Abrir Geogebra | Hacer doble clic sobre el icono  |

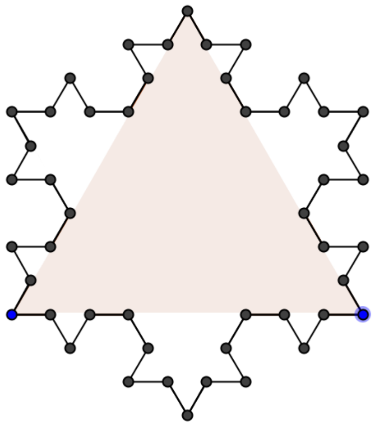
| Acciones | Pasos a realizar |
|---|---|
| Modificar el aspecto de la vista gráfica | Elegir Menú Edita. Desmarcar opción ejes<br>Elegir Menú Edita. Desmarcar opción cuadrícula. |
| Definir un segmento de lados A y B | Teclear en el campo entrada: A=(-3,0)<br>Teclear en el campo entrada: B=(0,3)<br>Teclear en el campo entrada: a=Segmento[A,B] |
| Obtenemos el punto C | c=Circulo de centro A y radio a/3<br>C intersección de c y a.<br>Ocultamos el círculo c |
| Obtenemos el punto D | d=Circulo de centro B y radio a/3<br>D intersección de d y a.<br>Ocultamos el círculo d |
| Obtenemos el punto E y F | e=Circulo de centro C y radio a/3<br>f=Círculo de centro D y radio a/3<br>E=Interseca[e,f]<br>Ocultar punto F.<br>Ocultar círculo e.<br>Ocultar círculo f. |
| Dibujamos segmento AC, CE, ED, DB<br>Dibujamos segmento CD de color blanco y grosor 7. | |
| Creamos la herramienta que permite realizar los pasos sobre cualquier segmento | Elegimos en el menú Herramientas la opción Creación de nueva herramienta. Seleccionamos:<br>Objetos de salida: Puntos C, D, E y Segmentos b,g,h,i,j<br>Objetos de entrada: Segmento a. Eliminamos puntos A y B.<br>Dar un nombre a la herramienta.<br>Pulsar sobre el botón Concluir. |

Rellena ahora la siguiente tabla

| Etapa | Número de segmentos | Longitud de los segmentos | Longitud total |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| … | | | |
| n | | | |

*Pregunta*: ¿Qué dimensión tiene la curva de Knoch?

Si el proceso se realiza sobre los tres lados de un triángulo equilátero se obtiene la curva copo de nieve o de Knoch.



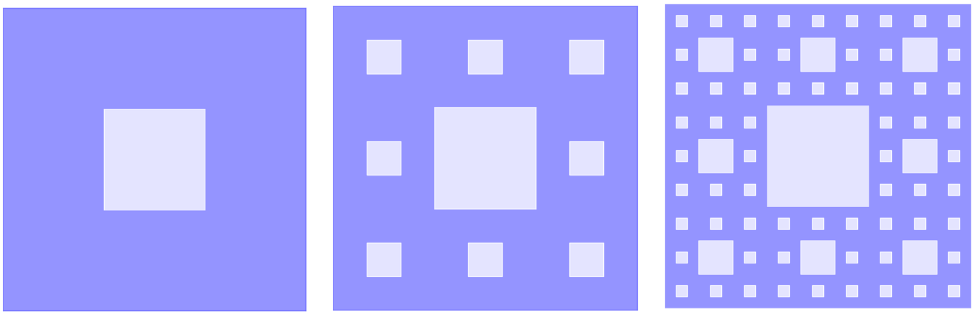
| Etapa | Área | Perímetro |
|---|---|---|
| 0 | | 3L |
| 1 | $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}+\frac{L^2\sqrt{3}}{4\cdot 3}$ | $3L+L$ |
| 2 | $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}+\frac{L^2\sqrt{3}}{4\cdot 3}+\frac{L^2\sqrt{3}}{3^3}$ | $3L+L+\frac{4}{3}L$ |
| 3 | $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}+\frac{L^2\sqrt{3}}{4\cdot 3}+\frac{L^2\sqrt{3}}{3^3}$ | $3L+L+\frac{4}{3}L+\frac{4^2}{3^2}L$ |
| 4 | $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}+\frac{L^2\sqrt{3}}{4\cdot 3}+\frac{L^2\sqrt{3}}{3^3}+\frac{L^2\sqrt{3}}{3^5}$ | $3L+L+\frac{4}{3}L+\frac{4^2}{3^2}L+\frac{4^3}{3^3}L$ |
| … | … | … |
| | 0 | infinita |

El área del copo de Koch es finita y su contorno (frontera) es infinita.

### Actividad 5: Otros fractales[4]

**Alfombra de Sierpinski:** Se genera igual que el triángulo de Sierpinski, pero partiendo de un cuadrado.  La zona de color más oscuro es la alfombra de Sierpinski.

[4] http://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_de_fractales_par_dimension_de_Hausdorff



Rellena ahora la siguiente tabla

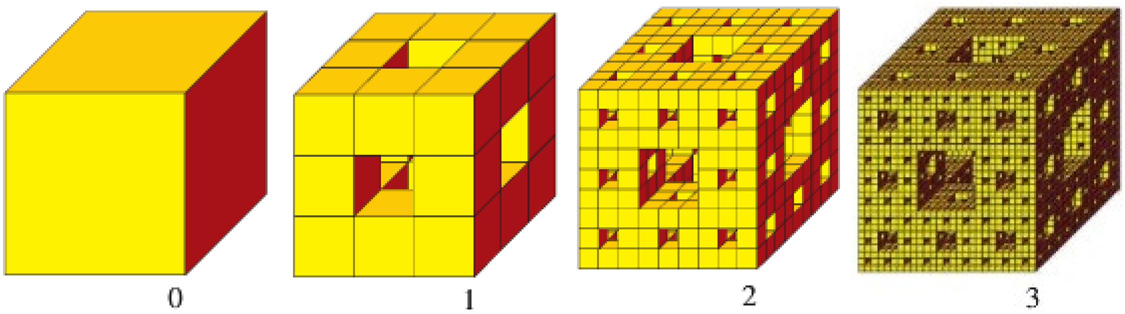
| Etapa | Número de cuadrados | Lado de cada cuadrado | Perímetro total | Área total |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | | 1 |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| … | | | | |
| n | | | | |

*Pregunta*: ¿Qué dimensión fractal tiene la alfombra de Sierpinski?

**Actividad: Fractales en papel.**

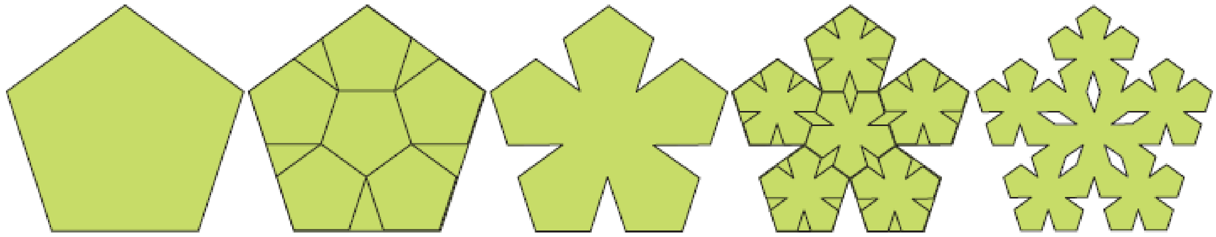
- https://profmate.wordpress.com/fractales-en-papel/
- https://w3.ual.es/eventos/imaginary/actividad-7-construimos.pdf

**Esponja de Menger**

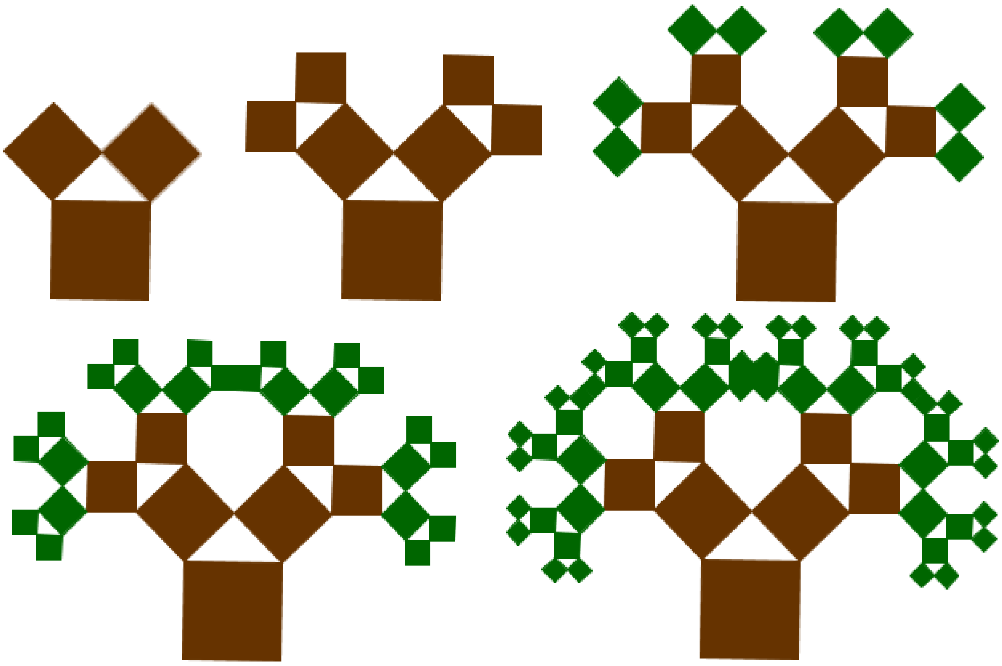



Pregunta: ¿Cuál es el motivo básico que se repite indefinidamente? La esponja de Menger es una superficie fractal que tiene dimensión D entre 2 y 3.

**Fractal de Durero**: Se genera a partir de un pentágono regular generando 6 pentágonos y 5 triángulos isósceles que se eliminan. Se itera el proceso con los pentágonos que se generan en la etapa anterior.

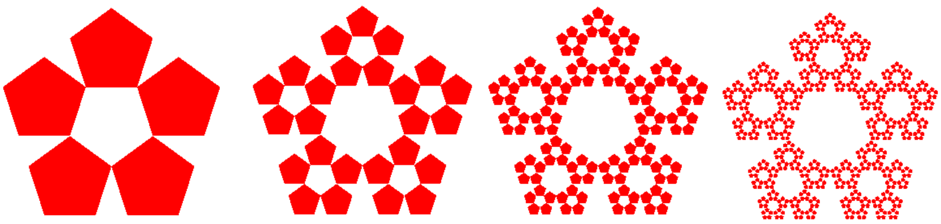


**Árboles pitagóricos:** Se genera a partir de un cuadrado dibujando un triángulo rectángulo e isósceles (isorrectángulo) de forma que la hipotenusa esté sobre uno de los lados del cuadrado. Sobre cada cateto del triángulo se dibuja un cuadrado y se repite el proceso para cada cuadrado que se genere en la etapa anterior.



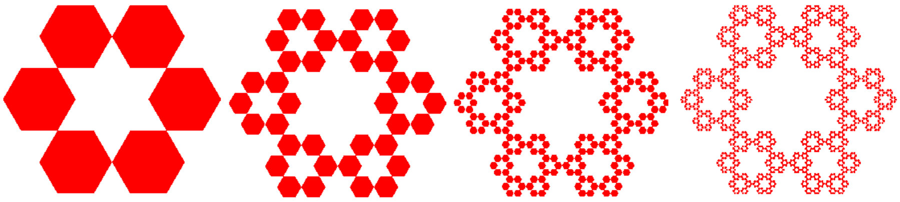
Tomado de **[http://www.geogebra.org/en/upload/files/Josh_Cross/Josh_Cross_Fractal_Tree.html](http://www.geogebra.org/en/upload/files/Josh_Cross/Josh_Cross_Fractal_Tree.html)**

**Pentágono, hexágono y octógono de Sierpinski[5]:** Se generan respectivamente a partir de cinco pentágonos unidos, seis hexágonos unidos y ocho octógonos unidos. Después, cada uno de los pentágonos, hexágonos y octógonos se sustituye por una figura similar a la inicial repitiendo el proceso indefinidamente.

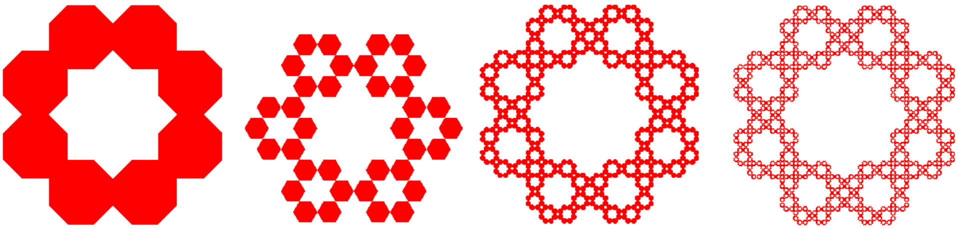


dimensión fractal del pentágono: 1’75647

[5] Imágenes tomadas de http://sabia.tic.udc.es/gc/Contenidos%20adicionales/trabajos/Imagenyvideo/fractales/sierpinski.htm

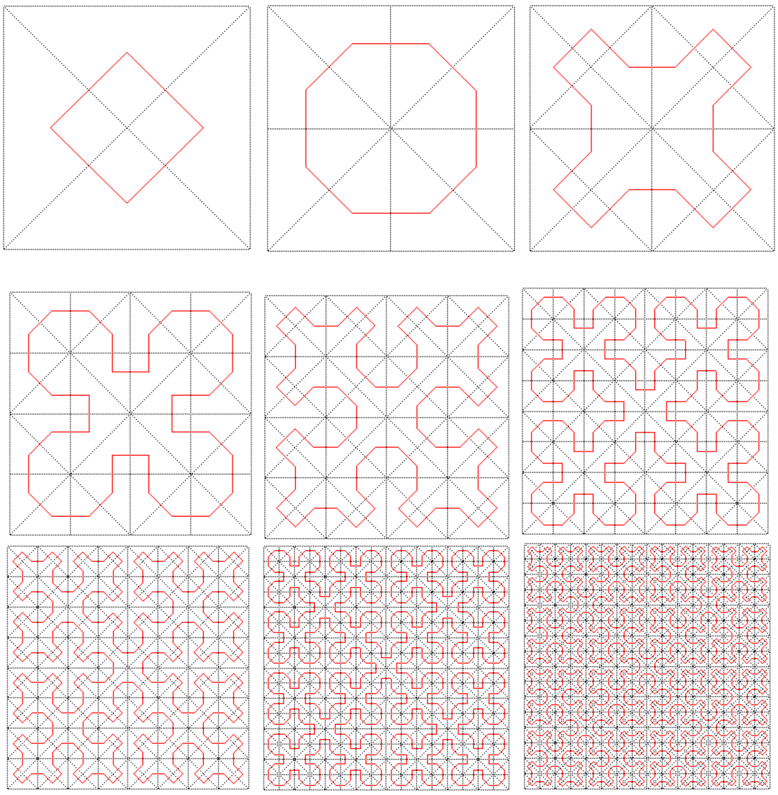


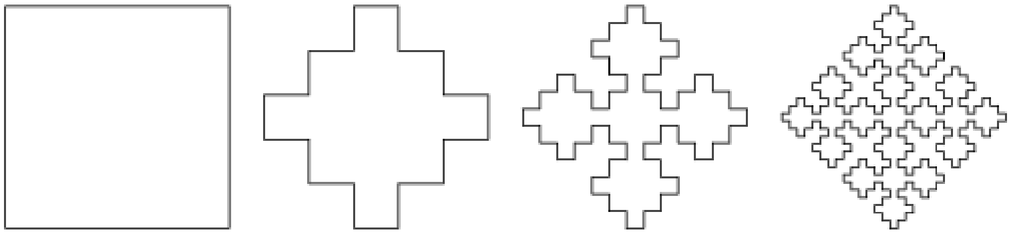
dimensión fractal del hexágono: 1’63093



De los tres el que tiene unas propiedades más interesantes es el hexágono, ya que como se puede ver en las imágenes la parte central del fractal (y por extensión la de los otros hexágonos más pequeños) forman un copo de Koch y, del mismo modo, los perímetros de cada lado de un hexágono son curvas de Koch.

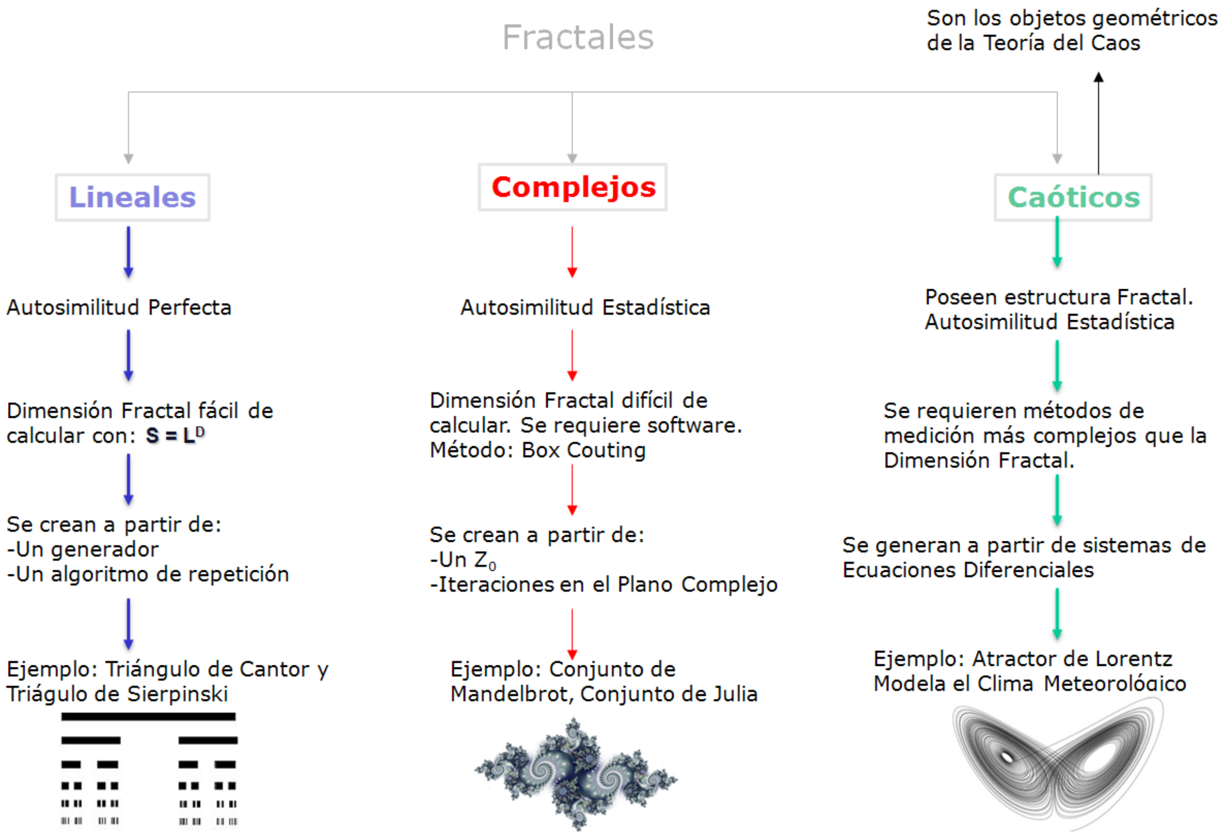
**Otras curvas de Sierpinski**: ¿Cuál es el motivo básico que se repite indefinidamente?





Puedes ver un simulador de fractales en la dirección:
http://www.interactiva.matem.unam.mx/fractales/html/simulador.html

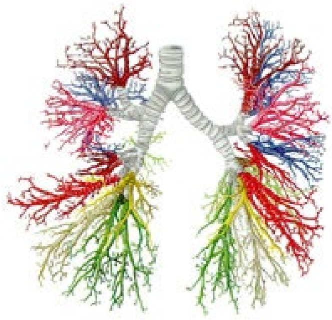
### Actividad 6: Otros ejemplos de fractales

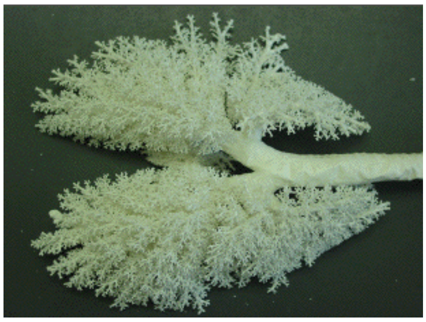


Puedes visitar los siguientes enlaces donde se describen distintos ejemplos

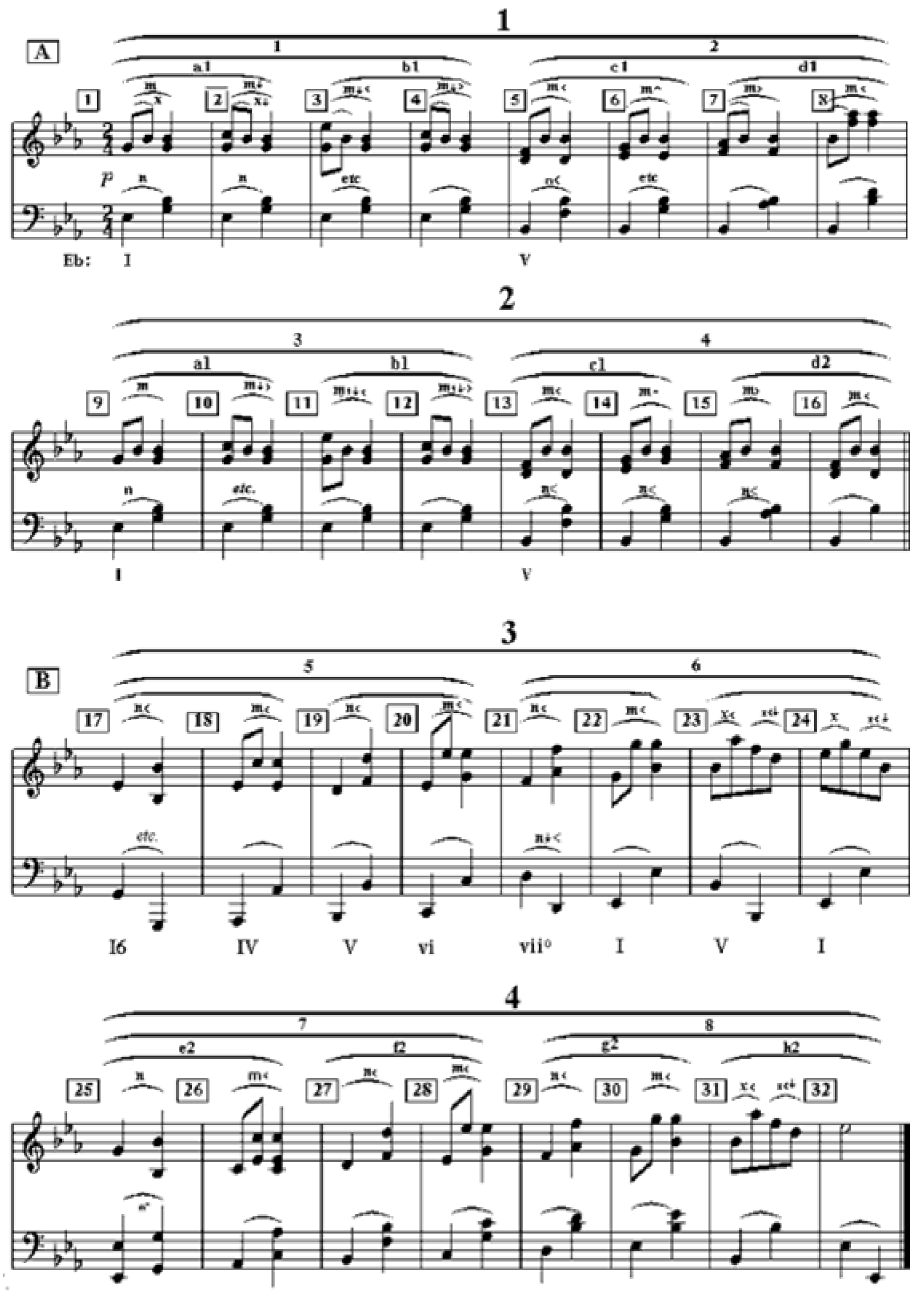
- http://www.youtube.com/w atch?v= QdW5C95Ezw
- http://www.youtube.com/watch?v=pJBieHlQ-r4
- http://www.youtube.com/watch?v=EyOgbY7gvrw
- http://www.youtube.com/watch?v=whsvHZuIyig
- http://www.youtube.com/watch?v=Z2BVKYSYkxc

- **Medicina**:
  - Se han utilizado técnicas fractales para predecir la osteoporosis de los pacientes.
  - El cerebro tiene estructura fractal. La dimensión fractal de la superficie del cerebro es mayor que 2.
  - Los conductos sanguíneos y los alveolos pulmonares.





- **Música:** Se entiende por música fractal aquella que traslada la estructura de un fractal al espacio musical. Piezas clásicas como “Primera Escossaien” de Beethoven tienen una estructura fractal



- **Arte: http://www.fractalina.com/**

**Referencias:**


- **http://www.estalmat.unican.es/documentos/Segundo_Seminario_Estalmat/fractales_madrid.pdf**
- **Triángulos y tetraedros fractales. Suma nº44. Noviembre 2003. pag. 13 a 24.**
- **Fractales: Hasta el infinito o más allá (o más acá). Grupo Pi.**
- **Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria. Suma nº 47, 48.**
- Fractales de papel. La hoja volante. http://www.uam.es/otros/hojavol/hoja12/fractales12.html
- Matemática Maravillosa. Fractales. Fascículos 25, 26 y 27. Fundación Polar.

**Para mí:**

- **http://fractalesphinito.blogspot.com/**
- http://www.pigmeo.net/koch.html
- **http://www.mathcurve.com/fractals/koch/koch.shtml**
- http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/fractales_igl/fractales.htm
- **http://usuarios.multimania.es/sisar/fractales/ambitos.php#42**
- **Listado de fractales por su dimensión:**
  http://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_de_fractales_par_dimension_de_Hausdorff