ESTALMAT CANTABRIA
2013 - 2014

Lógica difusa con Geogebra

Elena Álvarez Saiz

¿Qué figura se representa en las siguientes imágenes?

¿Se podría considerar un "poco" rectángulo o un "casi" círculo?

Pensemos en las siguientes situaciones:

- *Si una persona mide 1'80 metros, ¿es alta?*
- *¿Qué cantidad de dinero hay que tener para considerar que una persona es rica?*
- *¿Qué significa levantar el pie ligeramente del embrague?*
- *¿Qué temperatura debe haber para definir la sensación de frío?*

"*La lógica clásica es como quien va a una fiesta vestido con un traje negro, una camisa blanca almidonada, una corbata negra, zapatos lustrosos, etcétera. Y la lógica borrosa es un poco como quien va vestido informalmente con vaqueros, camiseta y zapatillas. En el pasado esta ropa informal no habría sido aceptable. Hoy es la otra manera que hay de vestir*".

Zadeh, 1984

Parte I. Conjuntos difusos

¿Se pueden definir estos conceptos de forma "clásica"?

Los conjuntos clásicos están definidos de tal forma que dividen al universo en dos grupos: los que con toda certeza pertenecen al conjunto (miembros) y los que no pertenecen (no miembros). Por ejemplo, en el conjunto de los números naturales, un conjunto clásico es el de los números pares. Dado cualquier número es posible saber si es par (pertenece al conjunto) o si no es par (no pertenece al conjunto).

Sin embargo, en muchos casos resulta difícil determinar la pertenencia o no a un conjunto en cuanto que intervienen consideraciones subjetivas. En *el conjunto de los hombres pequeños* no puede determinarse un criterio que establezca un límite exacto entre pertenecientes y no pertenecientes al mismo. En estos casos se introduce la vaguedad y desaparece la frontera que divide a los miembros y no miembros de un conjunto. A estos conjuntos se les denomina *difusos*.

Podrá pensarse que en conjuntos como el anterior, el problema reside en que no se ha establecido un criterio para determinar este conjunto. Asi, se puede decir que, por convenio, un hombre pequeño es aquel que no llega a medir los 140 cm de altura.

Sin embargo, si se pretende definir este conjunto de la forma “tradicional” veremos que razonamientos “tradicionales” podrian llevarnos a obtener resultados no adecuados.

Por ejemplo, imaginemos una población de personas con la condición de que los haya de todas las tallas intermedias necesarias para realizar el siguiente argumento. Consideremos $\text{altura}(A)$ una función que indica la talla en cms de la persona A.

Consideremos las siguientes hipótesis:

(1) Existe, por lo menos, un hombre pequeño. Llamemos a esa persona PEQ.
(2) Para cada persona A se tiene que $\text{altura}(A) \leq 300$
(3) Si A es un hombre pequeño y $\text{altura}(B) \leq \text{altura}(A)$ entonces B también es pequeño.

Estas tres condiciones parecen perfectamente razonables a partir del acuerdo de que estamos dispuestos a aceptar la existencia de hombres a los que corresponde el adjetivo "pequeño".

Añadamos además la siguiente regla:

(4) Si A es pequeño y B verifica $0 \leq \text{altura}(B) - \text{altura}(A) \leq 10^{-3}$ entonces B es pequeño.

Esta regla se puede interpretar como que se considerará pequeño a todo aquel que, con una regla de medir alturas muy fina, no se distingue de otro que es pequeño.

En estas condiciones *vamos a ver que todos las personas del conjunto son pequeñas*. En efecto, tomamos una persona cualquiera de este conjunto que llamaremos PER. Consideramos:

$$\begin{gathered} p_1 \text{ tal que } \text{altura}(p_1) = \text{altura}(PEQ) + 10^{-3} \\ p_2 \text{ tal que } \text{altura}(p_2) = \text{altura}(p_1) + 10^{-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n \text{ tal que } \text{altura}(p_n) = \text{altura}(p_{n-1}) + 10^{-3} \end{gathered}$$

siendo además p_n una persona que cumple que $\text{altura}(PER) \leq \text{altura}(p_n)$. Nótese que se llegará a un p_n en estas condiciones en $10^3\left(\text{altura}(PER) - \text{altura}(PEQ)\right)$ pasos.

Aplicando la regla (4) se cumplirá que:

$$\begin{gathered} 0 \leq \text{altura}(p_1) - \text{altura}(PEQ) \leq 10^{-3} \Rightarrow p_1 \text{ es pequeño} \\ 0 \leq \text{altura}(p_2) - \text{altura}(p_1) \leq 10^{-3} \Rightarrow p_2 \text{ es pequeño} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ .\ 0 \leq \text{altura}(p_n) - \text{altura}(p_{n-1}) \leq 10^{-3} \Rightarrow p_n \text{ es pequeño}\ . \end{gathered}$$

Por tanto, PER también es pequeño ya que su altura es menor que la de p_n y p_n es pequeño. En la deducción anterior se ha utilizado únicamente el razonamiento directo o "modus ponens"[1].

En principio, se nos hace difícil tener que renunciar, en casos como el mostrado en el ejemplo, de esta regla de deducción tan clásica en Matemática. Por otra parte, el absurdo se produce por aplicación de la condición (4) ya que (1), (2) y (3) únicamente dan significado al concepto *pequeño*.

[1]Modus Ponens. Regla: Si A entonces B
Hecho: A es cierto
Conclusión: B es cierto

Desde el punto de vista de la Lógica Clásica se podra decir entonces que lo válido es la negación de (4), es decir que existen dos personas A y B cumpliendo que A es pequeño y B no lo es verificando además que $0 \le \text{altura}(A) - \text{altura}(B) \le 10^{-3}$. Esta afirmación también contradice nuestra intuición.

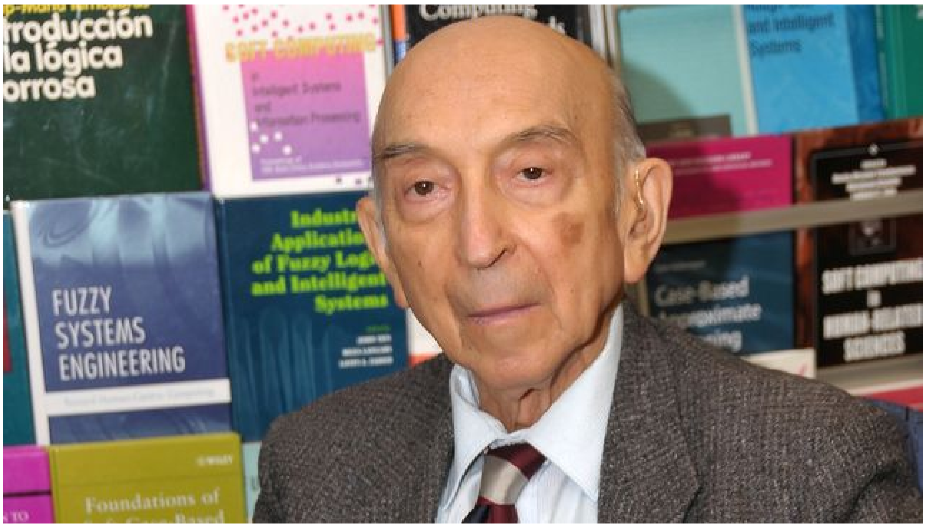
Conclusión.- Representando todo concepto por un conjunto clásico y efectuando la deducción por los métodos de la lógica tradicional no se obtienen modelos adecuados para la modelización de conceptos imprecisos.

¿Tiene sentido trabajar con estos conceptos?

En numerosas actividades humanas, entre ellas el lenguaje, nos encontraremos siempre con elementos imprecisos. Cuando alguien está aprendiendo a conducir, en un determinado momento puede recibir una orden del instructor como ésta: *levante ligera y lentamente el pie del embrague* , pero nunca una como ésta: *levante el pie 8^{o} a una velocidad de 2^{o} por segundo*. Y, sin embargo, el hombre se comporta bien (aprende) con órdenes difusas como las del primer caso, mientras que sería difcil que lo hiciera con las del segundo tipo.

¿Qué es un conjunto difuso?

Lofti Asker Zadeh[2], matemático, ingeniero e informático nacido en febrero de 1921 fue la persona que introdujo en 1965 la idea de conjuntos difusos sobre la que se construye la lógica difusa.



En el enlace http://www.youtube.com/watch?v=DUsHLhn2f-8 puedes escuchar una entrevista con motivo de la concesión del premio Fundación BBVA Fronteras del conocimiento en la categoría de la Información y de la Comunicación.

Mientras que en la teoría clásica se define la pertenencia de los distintos elementos a un conjunto haciéndoles corresponder el valor 1 si pertenecen y cero si no, Zadeh introduce la idea de definir una función que asocie el grado de pertencia al conjunto.

El valor uno va asociado a los elementos que con toda seguridad pertenecen al conjunto y cero a los que no, mientras que los valores intermedios se asocian a elementos de pertenencia dudosa. Esta idea implica un cambio de perspectiva frente a la idea clásica de pertenencia y se hace muy costosa inicialmente. No obstante, produce un enriquecimiento notable ya que la primera es un caso particular de la segunda y, en consecuencia, cualquier problema planteado en forma clásica puede también ser resuelto en forma difusa. Esto ha motivado un desarrollo notable de la teoría difusa en los últimos años.

[2] Zadeh, L. A. (1965) "Fuzzy sets". Information and Control. 8, 338 - 353

Algunos ejemplos

Números mucho mayores que 1

Cuestión: ¿Es el número 8 un número mucho mayor que 1? Y, ¿el número 100? ¿Es posible determinar un número a partir del cual los números se consideren mayores que 1 y los números menores no lo sean?

Para definir este conjunto se ha de considerar:

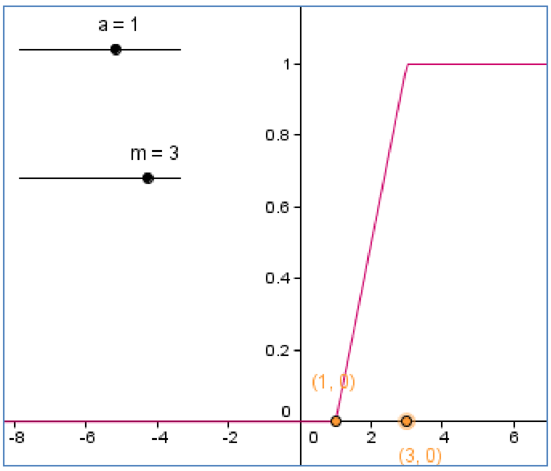
(1) Un conjunto U sobre el cual definir "numeros mayores que 1", podríamos tomar U el conjunto de los números reales.
(2) Una función, que podemos llamar PERTENECE, que dé el grado de pertenencia de un número real al concepto "número mucho mayor que 1". De esta forma, PERTENECE(x) será el grado en el que el número x es "mucho mayor que 1".

Cuestión: ¿Qué condiciones debería tener PERTENECE(x)?

A la hora de considerar la función PERTENECE, podemos pensar que es lógico imponer que PERTENECE sea una función:

(1) creciente, es decir, que si x e y son dos números reales cumpliendo que x es menor que y, entonces PERTENECE(x) es menor o igual que PERTENECE(y)
(2) nula hasta *poco después de 1*
(3) que *crezca pegada al eje de abscisas y no despeque de él hasta un lugar a convenir* a partir del cual el crecimiento *sea más rápido* hasta llegar a otro lugar, también a convenir, en el que a partir de él valdrá 1.

Podemos pensar que la función PERTENECE podría tener una gráfica como la siguiente:



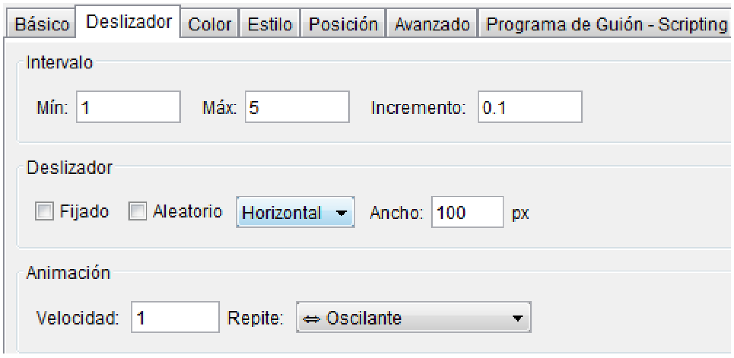
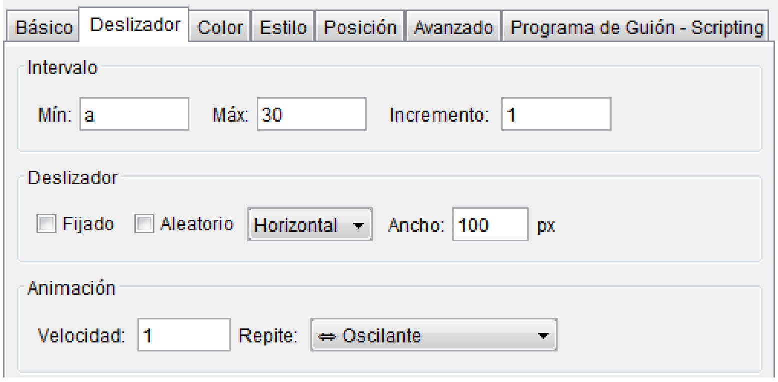
Observa que esta función:

(1) Es creciente.
(2) Es nula hasta el punto (a,0).
(3) "Crece pegada" al eje de ascisas y "despega" a partir del punto (a,0) hasta llegar al punto (m,1) en el que después vale 1.

Esta función tiene la siguiente expresión:

$$PERTENECE(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x \le a \\ \dfrac{x-a}{m-a} & \text{si } a < x \le m \\ 1 & \text{si } x > m\end{cases}$$

Ejercicio. Vamos a crear con Geogebra esta función.

<table>
<tr><td>Definimos el valor a</td><td>a=1.5</td></tr>
<tr><td>Definimos el valor m</td><td>m=3</td></tr>
<tr><td>Definimos la función PERTENECE</td><td>PERTENECE(x)=Si[x ≤ a, 0, Si[x ≤ m, (x - a) / (m - a), 1]]</td></tr>
<tr><td>Definimos las propiedades del deslizador a</td><td>Hacemos clic sobre el objeto a y abrimos su cuadro de propiedades para definir que su valor

</td></tr>
<tr><td>Definimos las propiedades del deslizador m</td><td>
</td></tr>
</table>

Ejemplo 1: ¿Hay otras posibilidades para definir esta función? Abre el fichero **perteneceMAY.html** para ver otras funciones con las mismas características. ¿Qué diferencias encuentras entre unas y otras funciones de pertenencia? ¿Cómo afectan los valores de los controles en la gráfica de la función?

Números próximos a 0

A la hora de considerar la función de pertenencia a este conjunto difuso, que podemos llamar PROXIMO, parece lógico pensar que ha de cumplir lo siguiente:

(1) Debe valer 1 en el punto 0.

(2) Debe ser simétrica respecto del eje de ordenadas, es decir, la función cumplirá que PROXIMO(x)=-PROXIMO(x).
(3) Debe tener un valor máximo en el punto 0.

Ejemplo 2: Abre el fichero **pertenecePROX.html** para ver distinas funciones para la función PROXIMO que respresente este conjunto.

¿Qué diferencias encuentras entre unas y otras funciones?

Número natural grande

Parece lógico imponer a la función de pertenencia que defina este conjunto las siguientes condiciones:

1. Debe estar definida sobre el conjunto de los números naturales.

2. Debe ser creciente.

Cuestión: ¿Qué función se podría considerar?

Ejemplo 3: Abre el fichero **perteneceGRA.html** para ver distinas opciones para la función GRANDE que represente este conjunto difuso.

Observación: Con esta única hipótesis, se puede deducir, por ejemplo, que si un número es mayor que uno grande también él es grande. En efecto, si $n \geq m$ y m es grande con $\text{GRANDE}(n) \geq \text{GRANDE}(m)$ cada vez que GRANDE(m) supere un cierto nivel también lo hará GRANDE(n) y, en consecuencia, el carácter de m implica el de n.

Niño, joven, adulto, viejo

Supongamos que el conjunto sobre el que se definen estos conceptos son las edades: 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80. Los grados de pertenencia a los conjuntos se definen en la siguiente tabla.

Elementos (Edad)	Bebé	Joven	Adulto	Viejo
5	0	1	0	0
10	0	1	0	0
20	0	0.8	0.8	0.1
30	0	0.5	1	0.2
40	0	0.2	1	0.4
50	0	0.1	1	0.6
60	0	0	1	0.8
70	0	0	1	1
80	0	0	1	1

Tabla 1: Ejemplos de conjuntos difusos.

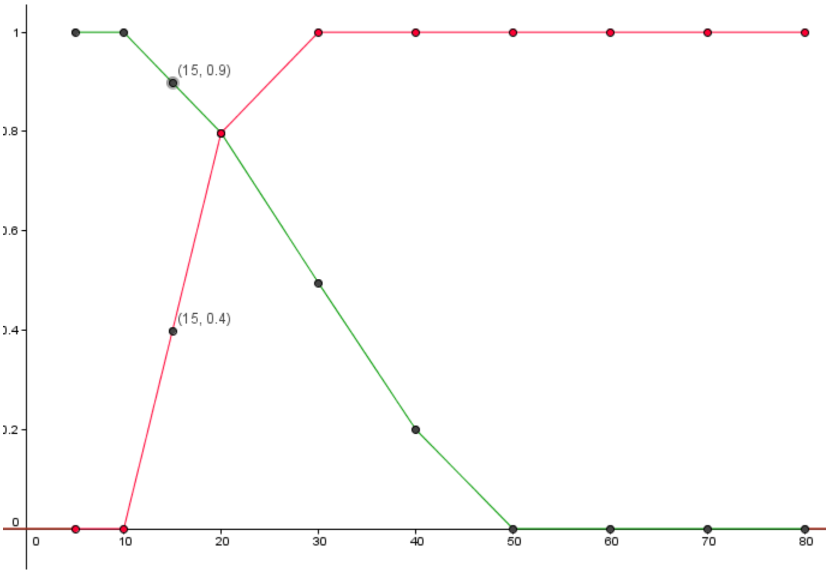
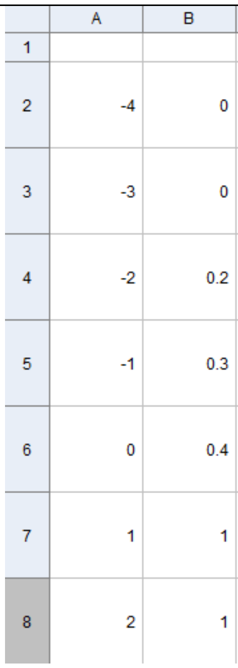


Figura. Representación de los conjuntos Joven y Adulto

Ejercicio. Vamos a crear una función de pertenencia a partir de una tabla de valores cuya gráfica sea la poligonal que une esos puntos.

Para ello seguiremos los siguientes pasos en Geogebra:

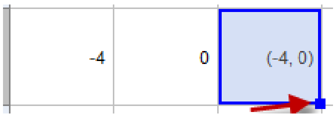
Abrimos la hoja de cálculo	Menú: Vista, Opción: Hoja de Cálculo

<table>
<tr><td>Tecleamos en las columnas A y B las abscisa y las ordenadas de los puntos</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>-4</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>-3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>4</td><td>-2</td><td>0.2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>-1</td><td>0.3</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0</td><td>0.4</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8</td><td>2</td><td>1</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Definimos en la columna C los puntos de la poligonal</td><td>Tecleamos en la celda C2 lo siguiente

=(A2,B2)

y pulsamos la tecla de salto de línea.

Arrastramos esta fórmula estirando del cuadrado señalado en la siguiente figura hasta la celda C8


</td></tr>
<tr><td>En la columna D definimos la función que une los dos primeros puntos</td><td>Escribimos en la celda D2

= Si[A2 ≤ x < A3, y(C2) + (x - x(C2)) (y(C3) - y(C2)) / (x(C3) - x(C2)), 0]</td></tr>
<tr><td>Definimos el resto de funciones</td><td>Basta arrastrar la fórmula anterior hasta la celda D7</td></tr>
<tr><td>Definimos la función PERTENECE como la suma de las funciones anteriores</td><td>En la ventana de comandos se escribe

fun(x) = D2(x) + D3(x) + D4(x) + D5(x) + D6(x)+ D7(x)</td></tr>
<tr><td>Definimos un punto px</td><td>px=2 y cambiamos sus propiedades para que sea un deslizador</td></tr>
<tr><td>Definimos un punto M que se mueva por los puntos de la gráfica de la función</td><td>M=(px,fun(px))</td></tr>
</table>

Una vez realizado este ejercicio, abre el fichero **edades.html** que se ha construido de esta manera y, considerando una persona de 15 años, contesta a la siguiente pregunta:

- ¿Con qué grado pertenece a los conjuntos joven y viejo?

¿Se pueden definir operaciones entre conjuntos difusos de forma que extienda las definidas sobre los conjuntos “clásicos”?

Para distinguir los conjuntos “clásicos” de los difusos utilizaremos el convenio de poner a los últimos encima de su nombre el símbolo $\approx$. Así, consideramos que

(1) el conjunto A, será “clásico”

(2) el conjunto $\overset{\approx}{A}$, será difuso. En este caso la función de pertenencia la escribiremos como μ_A, de forma que $\mu_A(x)$ será un número, entre 0 y 1, que representará el grado con el x pertenece al conjunto difuso $\overset{\approx}{A}$.

Subconjunto

Supongamos que se tiene el conjunto de estudiantes de Estalmat de la promoción 13-14. En ese “universo” se definen los siguientes conjuntos “clásicos”:

- Conjunto A: Los estudiantes que viven en Santander
- Conjunto B: Las alumnas que viven en Santander

Es claro que el segundo conjunto es un subconjunto del primero.

Ejemplo 4. Puedes ver la representación de este conjunto en el fichero **subconjunto.html**

Cuestión: ¿Cómo se podría definir esta operación entre conjuntos difusos? Es decir, dados dos conjuntos difusos $\overset{\approx}{A}$, y $\overset{\approx}{B}$, ¿qué tendrían que cumplir las funciones de pertenencia de esos dos conjuntos para que $\overset{\approx}{A}$ fuera un subconjunto de $\overset{\approx}{B}$?

Cuestión: En los conjuntos difusos bebé, adulto, joven, viejo, ¿hay algún conjunto difuso que sea subconjunto de otro?

Igualdad

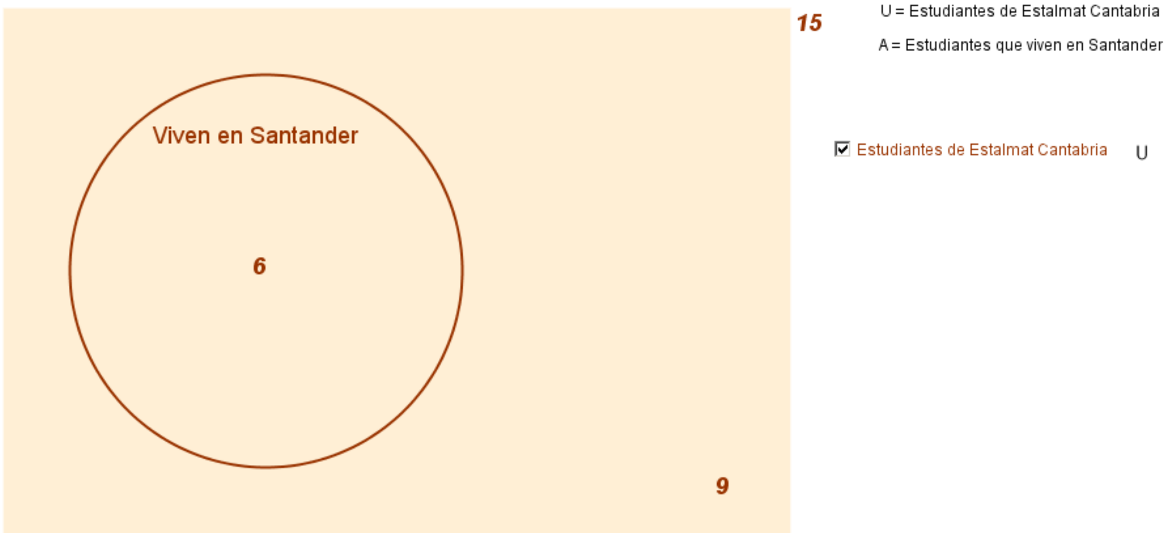
Cuestión. ¿Cuándo dos conjuntos “clásicos” son iguales?

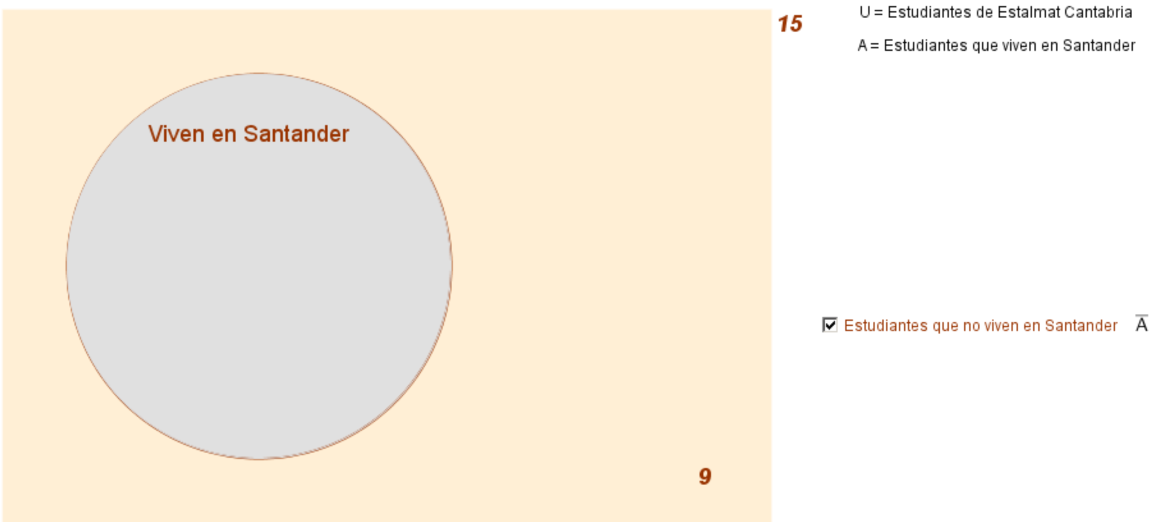
Cuestión. ¿Cómo se definiría entre conjuntos difusos?

Complementario

Dado un universo U y un conjunto definido sobre él, que podemos llamar A, el complementario "clásico" se define como los elementos de U que no están en A.

Ejemplo 5. En el universo U de todos los estudiantes de Estalmat de Cantabria de la promoción 13-14, dado el conjunto A de todos estudiantes que viven en Santander, su complementario es todos los estudiantes de U que no viven en Santander. En la figura se muestra que de los 15 estudiantes, hay 6 que viven en Santander y 9 que no.





9 Estudiantes no viven en Santander

Puedes ver en el fichero **complementario.html** la representación de este conjunto.

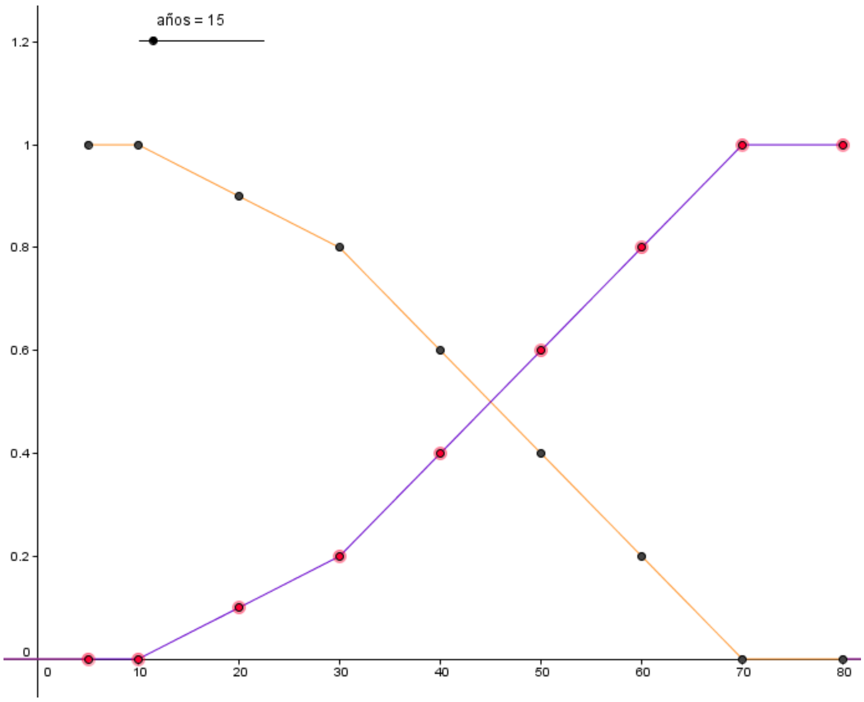
Cuestión. ¿Cómo definir el complementario de un conjunto difuso? Recuerda que debe cumplir al menos que si el conjuntos es "clasico" debe coincidir con el "complementario clásico".

Podría considerarse como función de pertenencia al conjunto complementario de $\tilde{\tilde{A}}$, por ejemplo, la siguiente:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Ejemplo 6: Siguiendo con los conjuntos de la Tabla 1, el conjunto *no viejo* será el conjunto

$$\text{no viejo} = \{(5,1),(10,1),(20,0.9),(30,0.8),(40,0.6),(50,0.4),(60,0.2)\}$$

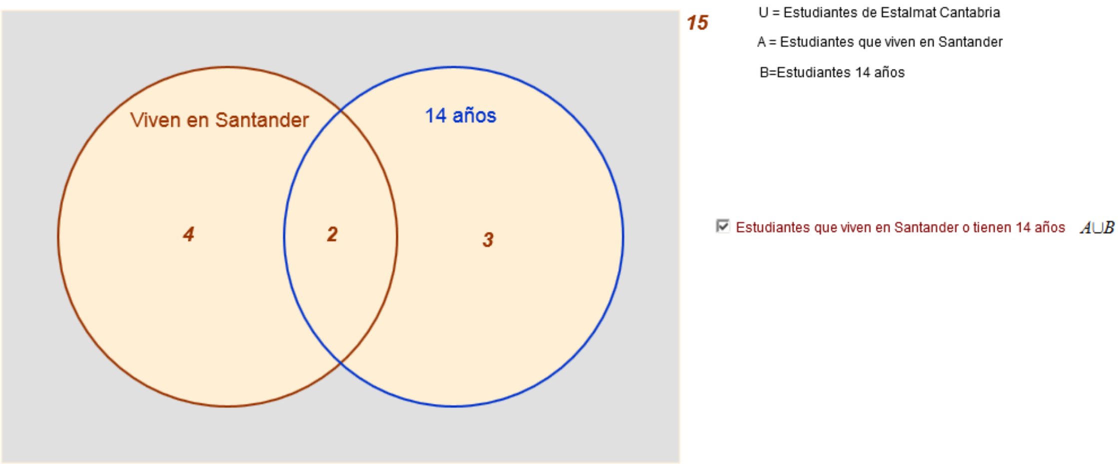


Cuestión: ¿Qué grado de pertenencia al conjunto difuso "no viejo" tendría una persona de 15 años?

Unión

Cuestión. ¿Cómo se define la unión entre conjuntos clásicos? Pon algún algún ejemplo de unión entre conjuntos.

Ejemplo 7: Abre el fichero **operaciones.html** para ver la representación de la unión de dos conjuntos.



¿Qué propiedades tiene la unión de dos conjuntos?

Cuestión. ¿Cómo definir la unión de dos conjuntos difusos?

Deberá cumplir que:

(1) La unión difusa debe generalizar la unión clásica.
(2) Debe ser simétrica en el orden en el que se unen los conjuntos.
(3) Un decrecimiento en el grado de pertenencia en los conjuntos A y B no debe producir un aumento en el grado de pertenencia en AUB.
(4) La unión de un número de conjuntos se puede realizar en el orden que se desee.

Podría considerarse, por ejemplo como función de pertenencia al conjunto unión la siguiente:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right)$$

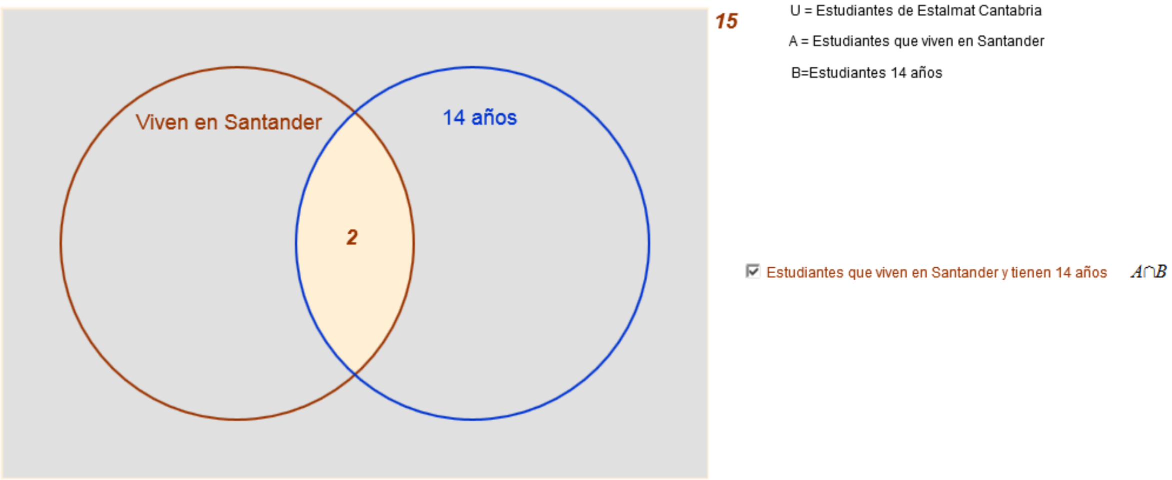
Ejemplo 8: Siguiendo con los conjuntos de la Tabla 1 el conjunto resultado de unir los conjuntos difusos *adulto* y *joven* es lo puedes ver en el fichero **edades.html**.

Cuestión: ¿Qué grado de pertenencia al conjunto difuso "joven o adulto" tendría una persona de 15 años?

La intersección

Cuestión. ¿Cómo se define la intersección entre conjuntos clásicos? Pon algún algún ejemplo de intersección entre conjuntos.

Ejemplo 9: Abre el fichero **operaciones.html** para ver la representación de la intersección de dos conjuntos.



2 Estudiantes que viven en Santander y tienen 14 años

¿Qué propiedades tiene la intersección de dos conjuntos?

Cuestión. ¿Cómo definir la intersección de dos conjuntos difusos?

Deberá cumplir que:

(1) La intersección difusa debe generalizar la intersección clásica.
(2) Debe ser simétrica en el orden en el que se intersequen los conjuntos.
(3) Un decrecimiento en el grado de pertenencia en los conjuntos A y B no debe producir un aumento en el grado de pertenencia en AUB.
(4) La intersección de un número de conjuntos se puede realizar en el orden que se desee.

Podría considerarse como función de pertenencia al conjunto unión, por ejemplo, la siguiente:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Ejemplo 10: Siguiendo con los conjuntos de la Tabla 1 el conjunto resultado de intersecar los conjuntos difusos *adulto* y *joven* lo puedes ver en el fichero **edades.html**.

Nota: La teoría original de conjuntos difusos propuesta por Zadeh estableció como definiciones de unión, intersección y complementación las indicadas en este tema. Estas funciones son generalizaciones de las definidas en el caso de los conjuntos ordinarios. Sin embargo, no son las únicas posibles. Para cada una de las tres operaciones existen diferentes clases de funciones que, satisfaciendo ciertas propiedades axiomáticas, pueden considerarse también generalizaciones.

¿Cómo definir una relación difusa entre conjuntos difusos?

Una relación clásica representa la presencia o ausencia de asociación, interacción o interconexión entre dos elementos de dos o más conjuntos. Este concepto puede ser generalizado de forma que pueda permitir varios grados de interacción en dicha relación. Estos grados de asociación pueden representarse mediante relaciones difusas del mismo modo que se representa el grado de pertenencia en los conjuntos difusos. Así, igual que los conjuntos difusos eran una generalización de los conjuntos clásicos la relación clásica puede considerarse como un caso particular de relaciones difusas.

Relaciones difusas entre conjuntos clásicos

Ejemplo 11: Supongamos que tenemos los conjuntos

X={Inglés, Francés}

Y={dólar, libra, franco, marco}

Z={Estados Unidos, Francia, Canadá, Gran Bretaña, España}

Podemos definir la relación que a cada país le asocie la moneda que se utilizaba antes de la llegada del euro y su idioma. Se puede escribir estas relaciones de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccccc}\text{EEUU} & \text{Francia} & \text{Canada} & \text{Gran Bretaña} & \text{España}\end{array} \\ \begin{array}{r}\text{dólar}\\ \text{libra}\\ \text{franco}\\ \text{marco}\end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Inglés

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccccc}\text{EEUU} & \text{Francia} & \text{Canada} & \text{Gran Bretaña} & \text{España}\end{array} \\ \begin{array}{r}\text{dólar}\\ \text{libra}\\ \text{franco}\\ \text{marco}\end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Francés

Nota: Observa que estas relaciones se podrían escribir si se conocieran las siguientes ternas:

(moneda, pais, PERTENECE(moneda,pais))

siendo PERTENECE la función que vale 1 si la moneda se utilizó en el pais y 0 en caso contrario.

Esta forma de representar las relaciones clásicas pueden ser generalizadas para permitir grados de pertenencia dentro de la relación.

La relación entre la estación del año en que nos encontramos y el calor o frio que se siente es subjetiva y, por tanto, difusa. Una determinada persona podra expresarla explicitamente así:

U=estaciones={primera, verano, otoño, invierno}

V={calor, frío}

$$\begin{array}{l} \\ \text{primavera} \\ \text{verano} \\ \text{otoño} \\ \text{invierno} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{calor} & \text{frío} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 1 & 0 \\ 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Relaciones entre conjuntos difusos

Vamos ahora a generalizar esta idea para intentar definir una relación difusa entre conjuntos difusos.

A partir de dos conjuntos difusos difusos $\overset{\approx}{A}$ y $\overset{\approx}{B}$, definidos respectivamente sobre U y V, se intentará definir otro que se llamará producto cartesiano y que escribiremos como $\overset{\approx}{AxB}$. Este conjunto tiene como función de pertenencia aquella que asigna a cada par ordenado (x,y) el valor mínimo con el x pertenece a $\overset{\approx}{A}$ e y pertenece a $\overset{\approx}{B}$.

$$\overset{\approx}{AxB} = \left\{ \left(a, b, \min\left(\mu_A(a), \mu_B(b) \right) \right) / a \in U, b \in V \right\}$$

Ejemplo 12: Considerando el ejemplo anterior, tomamos

U=estaciones={primera (p), verano (v), otoño (o), invierno (i)}

V={temperatura superior a 20 grados (T1), temperatura igual o inferior a 20 grados (T2)}

y los conjuntos difusos:

$\overset{\approx}{A}$ = estaciones frías={(p, 0.3), (v, 0.1), (o, 0.4), (i, 0.9)}

$\overset{\approx}{B}$ = sensación de frío ={(T1, 0.4), (T2, 0.8)}

El grado de pertenencia a $\overset{\approx}{AxB}$ del par (p, T1) es 0.3 ya que p pertenece a $\overset{\approx}{A}$ con grado 0.3, T1 pertenece a $\overset{\approx}{B}$ con grado 0.4 y el mínimo de esos dos valores es 0.2

Cualquier subconjunto del producto cartesiano es un relación entre los conjuntos difusos, una de ellas es el propio producto cartesiano

$$\text{Relación } R \equiv \begin{array}{c} \\ p \\ v \\ o \\ i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cuestión.- ¿Qué podría representar la relación anterior?

Consideremos ahora el universo W={bañador (b), traje(t), abrigo(a)} y el conjunto difuso definido sobre él siguiente:

$$\tilde{\tilde{C}} = \text{ropa que abriga} =\{(b, 0.1), (t, 0.5), (a, 0.9)\}$$

El producto cartesiano de $\tilde{\tilde{B}}$ y $\tilde{\tilde{C}}$ define una relación entre estos conjuntos

$$\text{Relación } S \equiv \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} b & t & a \end{array} \\ \begin{array}{c} T1 \\ T2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vamos a calcular ahora la composición de las dos relaciones utilizando la max-min que viene dada por

$$\text{para todo } u \in U, \text{para todo } w \in W \qquad \mu_{S \circ R}(u,w) = \max_{v \in V}\left(\min\left(\mu_R(u,v), \mu_S(v,w)\right)\right)$$

La idea es que para cada pareja (u, w) se toma como grado de pertenencia a la relación composición el resultado de hacer la siguiente operación:

(1) Para cada uno de los v en V se toma el mínimo de las funciones de pertenencia a las relaciones R y Q de las parejas (u, v) y (v, w) respectivamente.
(2) El máximo de todos los mínimos anteriores es el valor de la pertenencia de la composición.

Ejemplo 13: Considerando las relaciones siguientes:

- R, que relacionaba las estaciones frías con la sensaciones de frío
- S, que relacionaba las sensación de frío con la ropa de abrigo

vamos a ver cómo se relacionarían las estaciones frías con las ropas de abrigo mediante su composición:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ v \\ o \\ i \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} b & t & a \end{array} \\ \begin{array}{c} T1 \\ T2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} b & t & a \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ v \\ o \\ i \end{array} & \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo 14. Vamos a practicar esta operación con el fichero **composicion.html**.

Importante: Estas definiciones, pueden parecer a primera vista arbitrarias y, hasta cierto punto lo son, no obstante en su elección deben tenerse en cuenta los siguientes criterios:

(1) que sean consistentes con las definiciones paralelas de la teoría de conjuntos clásicos, es decir, que ésta pueda considerarse como un caso particular de la teoría de conjuntos difusos
(2) que los modelos basados en la teora reflejen razonablemente bien la realidad y
(3) que los cálculos que se derivan de la utilización de los modelos sean sencillas y, por tanto, se ejecuten con rapidez.

Parte II. Lógica difusa

¿Casi cierto, muy cierto, algo falso?

En la lógica difusa los valores de verdad y falsedad son imprecisos.

Consideremos la sentencia

Juan es niño

y supongamos que Juan tiene 15 años. ¿Qué significado tiene esa sentencia? El grado de certeza de esa afirmación será el grado con el que 15 años pertenece al concepto niño.

Se define para cada sentencia un conjunto difuso que se corresponde con la interpretación verdadera de la sentencia y a partir de este significado se puede calcular el significado de:

No verdadero = complementario

Muy verdadero = (verdadero)^2

Algo verdadero=(verdadero)^1/3

Más o menos verdadero = (verdadero) ^0.5

Extremadamente verdadero = (verdadero)^3

Ejemplo 15. A partir del conjunto niño se puede definir “muy niño” considerando que la función de pertenencia a este conjunto es el cuadrado de la utilizada para definir el concepto niño. Estas etiquetas lingüísticas se utilizan para definir conjuntos difusos a partir de otros ya existentes.

Abre el fichero valores.html y analiza cómo se obtendría el valor de verdad “No niño”, “Muy niño”, “Algo niño”, “Más o menos niño”, “Extremadamente niño”.

Analiza cuál sería el grado de verdad de las siguientes sentencias sabiendo que Juan tiene 15 años

- Juan no es niño
- Juan es muy niño
- Juan es algo niño
- Juan es más o menos niño
- Juan es extremadamente niño

Ejercicio. A partir de los conjuntos definidos en el ejemplo 12, se puede calcular

Estaciones frías y no muy frías: $\underset{\approx}{A} \cap \overline{\underset{\approx}{A}^2}$ Sensación de mucho frío: $\underset{\approx}{B}^2$

Sensación de no mucho frío: $\overline{\underset{\approx}{B}^2}$ Ropa que no abrigan: $\overline{\underset{\approx}{C}}$

¿Cómo se interpreta una regla difusa?

Imaginemos que tenemos una regla difusa de la foma

$$\text{Si } \overset{\approx}{A} \text{ entonces } \overset{\approx}{B}\text{, si no } \overset{\approx}{C}$$

donde $\overset{\approx}{A}$, $\overset{\approx}{B}$ y $\overset{\approx}{C}$ son conjuntos difusos. Por ejemplo, podría ser

Si la estación es fría se siente frío, si no, no se siente frío

Supongamos que

Conjunto	Definición
$\overset{\approx}{A} =$ estaciones frías	{(p, 0.3), (v, 0.1), (o, 0.4), (i, 0.9)}
$\overset{\approx}{B} =$ sensación de frío	{(T1, 0.4), (T2, 0.8)}
$\overset{\approx}{C} =$ sensación de no frío	{(T1, 0.6), (T2, 0.2)}

El valor de verdad de esta regla quedará determinado por un conjunto difuso que interprete el significado de esta regla:

$$\left(\overset{\approx}{A}\to\overset{\approx}{B}\right)\vee\left(\overline{\overset{\approx}{A}}\to\overset{\approx}{C}\right)$$

Teniendo en cuenta la teoría de conjuntos difusos, Zadeh propuso la siguiente interpretación para esta regla:

- $\left(\overset{\approx}{A}\to\overset{\approx}{B}\right)\equiv\left(\overset{\approx}{A}\cap\overset{\approx}{B}\right)\cup\overline{\overset{\approx}{A}}$. El grado de pertenencia será: $\mu_{A\to B}=\max\left(\min\left(\mu_A,\mu_B\right),1-\mu_A\right)$

- $\left(\overline{\overset{\approx}{A}}\to\overset{\approx}{C}\right)\equiv\left(\overline{\overset{\approx}{A}}\cap\overset{\approx}{C}\right)\cup\overset{\approx}{A}$. El grado de pertenencia será:

$$\mu_{\overline{A}\to C}=\max\left(\min\left(1-\mu_A,\mu_C\right),\mu_A\right)$$

En la práctica hay otras implicaciones que son muy utilizadas por su simplicidad. Una de ellas es la de Mandani, que interpreta la implicación como la relación difusa obtenida por

$$\mu_{A\to B}=\min\left(\mu_A,\mu_B\right)$$

De esta manera, la regla puede identificarse por la siguiente relación

$$\left(\overset{\approx}{A}\to\overset{\approx}{B}\right)\vee\left(\overline{\overset{\approx}{A}}\to\overset{\approx}{C}\right)\equiv\left(\overset{\approx}{A}\mathrm{x}\overset{\approx}{B}\right)\cup\left(\overline{\overset{\approx}{A}}\mathrm{x}\overset{\approx}{C}\right)$$

Ejemplo 16. Utilizando la implicación de Mandani, vamos a interpretar la siguiente sentencia:

Si la estación es fría se siente frío, si no, no se siente frío

Esta regla establece una relación entre los universos U={p, v, o, i} y V={T1, T2} que se podrá calcular como:

$$\begin{array}{c} \\ p \\ v \\ o \\ i \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array} \cup \begin{array}{c} \\ p \\ v \\ o \\ i \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ p \\ v \\ o \\ i \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Cómo se utiliza el Modus Ponens?

Considemos que tenemos la regla

Si la estación es fría, se siente frío, si no, no

Y el hecho

Estamos en una estación no muy fría

vamos a analizar que conclusión se podría obtener, evidentemente será una conclusión difusa referente al grado de frío que se siente en esta estación.

$$\tilde{\tilde{A}}' = \text{estaciones no muy fría}=\{(p, 0.91), (v, 0.99), (o, 0.84), (i, 0.19)\}$$

Entonces componiendo,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p & v & o & i \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.91 & 0.99 & 0.84 & 0.19 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ p \\ v \\ o \\ i \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array}$$

se obtiene como conclusión el conjunto difuso:

{(T1, 0.8), (T2, 0.4)}

Una vez obtenido este conjunto se debe obtener una “traducción” al lenguaje ordinario del resultado que se obtenga, algo como “se siente bastante frío”, “se siente poco frío”,etc.

Cuestión: ¿Cuál sería en este ejemplo?