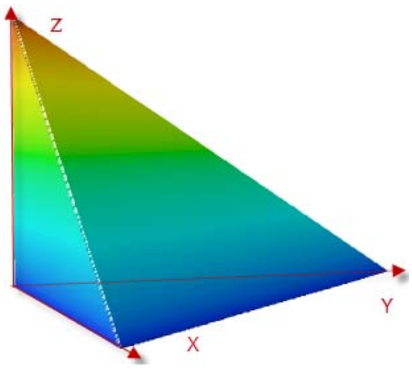
## Seguimiento 18 de febrero

# 1

(a) Calcular el volumen del sólido H limitado por los planos coordenados y el plano $z = a - y - x$

(b) Representar el dominio de proyección del sólido H sobre el plano XY.

(c) Determinar la temperatura media del sólido si la función temperatura, $T(x, y, z)$, es proporcional a la distancia del punto $(x, y, z)$ al plano z=0. La constante de proporcionalidad es $a$.

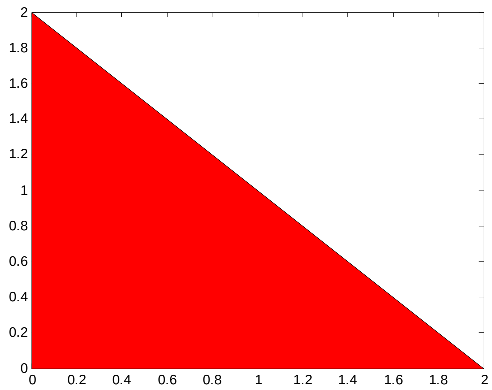



Nota: El valor de $a$ es el número de letras que contenga tu nombre (si el nombre es compuesto toma solo las letras del primero).

### Solución:

Los puntos de corte con los ejes coordenados son $(a,0,0)$, $(0,a,0)$ y $(0,0,a)$. La proyección de H sobre el plano XY es el interior del triángulo de vértices $(0,a,0)$, $(0,0,0)$ y $(a,0,0)$.

```
a=2;
fill([0 0 a],[a 0 0],'r')
```



El volumen del sólido H es por tanto:

$$vol(H) = \int_0^a \int_0^{a-x} \int_0^{a-x-y} dz dy dx = \int_0^a \int_0^{a-x} (a-x-y) dy dx$$

Para cacular la integral se deberá poner:

```
a=2;
syms x y z
int(int(a-x-y,y,0,a-x),x,0,a)
```

Seguimiento 21 de marzo

**1**

Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (-x,y)$

(a) Calcula las líneas equipotenciales y comprueba a mano que las líneas de flujo son $xy = k$

(b) Representa con Matlab una muestra del campo anterior junto con sus líneas de flujo y equipotenciales, en el cuadrado $[-4,4]\times[-4,4]$. ¿Qué relación existen entre dos familias de curvas en los puntos de corte?

Observación: Este ejercicio es el ejercicio 6 del tema 2 realizado en clase el día 23 de febrero.

Las funciones potenciales $f$ son de la forma $f(x,y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C$, por tanto las líneas equipotenciales son $-x^2 + y^2 = k$. Estas curvas tienen como pendiente en un punto $(x,y)$, $y' = \frac{x}{y}$. Las curvas $xy = k$, tienen por pendiente $y' = -\frac{y}{x}$, luego son familias de curvas ortogonales, es decir, en los puntos de corte las tangentes se cortan ortogonalmente, es decir, son perpendiculares.

Para representar una muesra del campo con sus líneas de flujo y equipotenciales basta escribir el siguiente código

```
x=-4:0.5:4;
[X,Y]=meshgrid(x);
%Representación del campo
quiver(X,Y,-X,Y)
hold on
%líneas equipotenciales
contour(X,Y,-X.^2+Y.^2)
%líneas de flujo
%contour(X,Y,X.*Y)
%También
```

```
for k=-2:0.3:2
    plot(x,k./x,'r')
end
axis equal
hold off
```

## 2

Sea C la curva

$$\left(x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right)\right)=\left(t^2,2t,t\right) \text{ para } 0\le t\le 1$$

se pide:

(a) Representar la curva C

(b) Obtener el área de la cortina vertical que está apoyada sobre el plano z=0 y cuya altura es la curva.

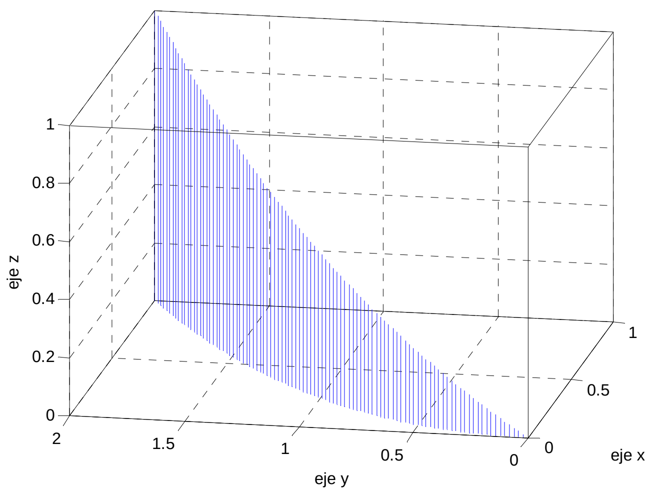
Observación: Este ejercicio es idéntico al propuesto número 12 del tema 2 realizado en clase el día 27 de febrero.

Para representar la curva C basta escribir

```
t=0:0.1:1;
plot3(t.^2,2*t,t)
grid on
```

El área de la cortina vertical pedida es

```
syms u
int(u*sqrt(4*u^2+4),u,0,1)
```



## Examen Bloque 1 – 3 Abril 2017

**1**

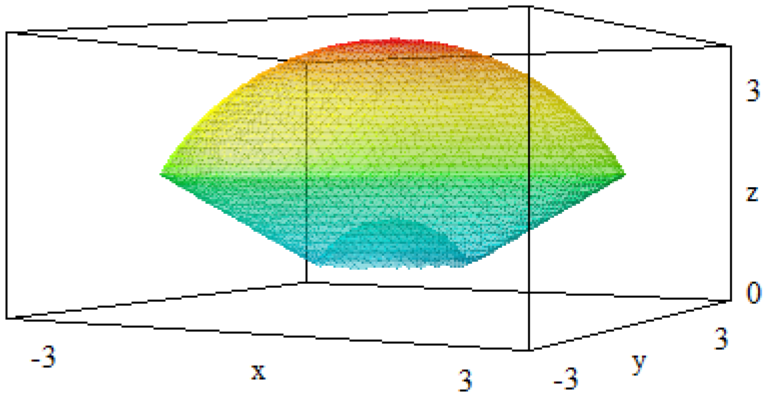
Un sólido $H$ está formado por todos los puntos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ que están dentro del cono $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ y que además verifican $1\le x^2+y^2+z^2\le 9$.

Se pide:

a. Calcular el volumen de H

b. Calcular la temperatura media sabiendo que en cada punto esa temperatura viene dada por $T(x,y,z)=\dfrac{1}{z\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$

- Este ejercicio corresponde a las preguntas 8 y 9 del test 2 del tema de integración múltiple. http://www.giematic.unican.es/index.php/integracion-multiple/material-interactivo
- Ejercicios similares son los propuestos número 15 y 17 del tema 1 de integración múltiple




### Apartado a)

Dado que $H$ está limitado por dos esferas y un cono, lo definimos en coordenadas esféricas transformando a este sistema las ecuaciones de las superficies dadas. Teniendo en cuenta $\left\{x=\rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ y=\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\ z=\rho\cos\varphi\right\}$, resulta

$$x^2+y^2+z^2=1\rightarrow\rho^2=1\rightarrow\rho=1;$$

$$x^2+y^2+z^2=9\rightarrow\rho^2=9\rightarrow\rho=3;$$

$$z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}\rightarrow \rho\cos\varphi=\frac{\rho\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{3}}\rightarrow \operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}\rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}$$

Se define $H$ es esféricas,

$$H=\left\{(\rho,\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^3 \;/\; 0\le\theta\le 2\pi,\; 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3},\; 1\le\rho\le 3\right\}$$

La integral para hallar el volumen de $H$ será

$$Volumen(H)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_1^3 \rho^2\operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\pi/3}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\cdot\int_1^3\rho^2 d\rho=$$

$$=2\pi\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi/3}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^3=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{26}{3}=\frac{26\pi}{3}$$

la integral del numerador para calcular $T_{media}$ será

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_1^3\frac{1}{\rho\cos\varphi\sqrt{1+\rho^2}}\rho^2\operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\pi/3}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}d\varphi\cdot\int_1^3\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}d\rho$$

$$=2\pi\left[-\log(\cos\varphi)\right]_0^{\pi/3}\cdot\left[\sqrt{1+\rho^2}\right]_1^3=2\pi\cdot\left(-\log\left(\frac{1}{2}\right)+\log 1\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)=2\pi\log 2\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$$

## Apartado b)

Teniendo en cuenta la definición de temperatura media sobre el sólido $H$,

$$T_{media}=\frac{\iiint_H T(x,y,z)\,dV}{\text{volumen de } H}=\frac{\iiint_H \frac{1}{z\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}dV}{\text{volumen de } H}$$

La temperatura media será

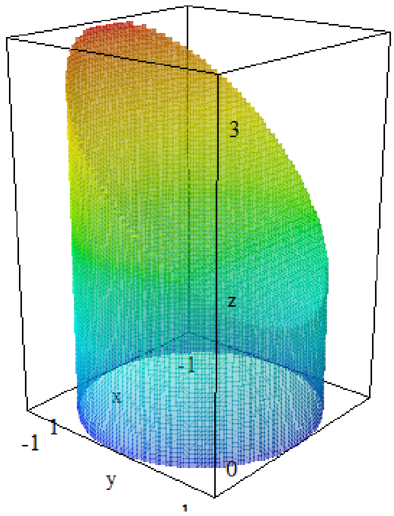
$$T_{media}=\frac{2\pi\log 2\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)}{\frac{26\pi}{3}}=\frac{3\log 2\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)}{13}$$

## 2

El cilindro $x^2+y^2=1$ corta al plano $y+z=2$ en la curva $C$. Calcular la circulación del campo vectorial $\mathbf{F}=xy\,\mathbf{i}+yz\,\mathbf{j}+xz\,\mathbf{k}$ sobre C, utilizando obligatoriamente el teorema de Stokes y recorriendo la curva C en sentido antihorario (vista desde arriba).

Nota: Se deberá comprobar que se cumplen las hipótesis del Teorema de Stokes.

Ejercicios similares hechos en clase son los proupestos número 19, 20 y 21 del tema 3.
Ver también el ejercicio resuelto número 9 del tema 3.




Aplicando el Teorema de Stokes, la circulación del campo **F** a lo largo de la curva **C** será

$$circulación = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S rot\mathbf{F}\cdot \mathbf{n}\,dS$$

donde S es la superficie interior a la curva C que se encuentra sobre el plano $y+z=2$.

La integral de superficie se calcula de la forma siguiente:

$$\iint_S rot\mathbf{F}\cdot \mathbf{n}\,dS = \iint_D rot\mathbf{F}\cdot \mathbf{N}\,dA$$

donde

- D es la proyección de S sobre el plano XY, es decir, el círculo unidad
- Como S es la porción del plano $z=f(x,y)=2-y$ limitada por C, el vector normal a la superficie es: $\mathbf{N}=\left(-f_x',-f_y',1\right)=\left(0,1,1\right)$
- $rot\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & yz & xz\end{vmatrix} = -y\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} - x\,\mathbf{k}$

Por lo tanto,

$$circulación = \iint_D \left(-y,-2+y,-x\right)\cdot\left(0,1,1\right)dA = \iint_D \left(-2+y-x\right)dA =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-2+r\,\mathrm{sen}\,\theta - r\cos\theta\right)r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(-1+\frac{1}{3}\mathrm{sen}\,\theta-\frac{1}{3}\cos\theta\right)d\theta = -2\pi$$

Aunque el ejercicio no pide obtener directamente la integral de línea podemos calcularla para verificar el resultado:

$$circulación = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C xydx + yzdy + xzdz$$

siendo C la curva

$$x(t) = \cos t \qquad y(t) = \operatorname{sen} t \qquad z(t) = 2 - \operatorname{sen} t \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$x'(t) = -\operatorname{sen} t \qquad y'(t) = \cos t \qquad z'(t) = -\cos t$$

$$circulación = \int_0^{2\pi} \left(-\cos t \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} t (2 - \operatorname{sen} t)\cos t - \cos t (2 - \operatorname{sen} t)\cos t\right) dt = -2\pi$$

## 3

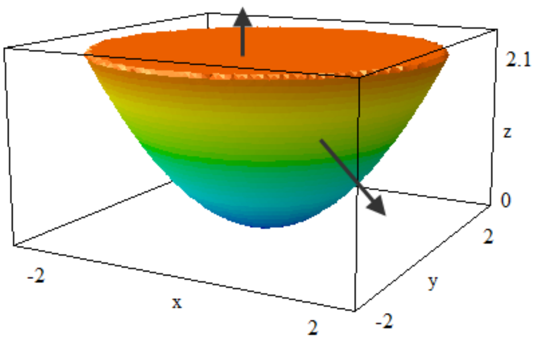
Halla el flujo del campo vectorial $F(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de:

(a) La superficie lateral $S_1$ del paraboloide $x^2 + y^2 = 2az$ con $0 \le z \le 2a$.

(b) La superficie de la tapa $S_2$ para $z = 2a$.

(c) Aplica el teorema de Gauss a la superficie $S_1 \cup S_2$ comprobando previamente que se cumplen las hipótesis de dicho resultado.

- Ejercicio hecho en clase el día 22 de marzo.




### Apartado a) Flujo a través de $S_1$.

El vector normal a la superficie $z = f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2a}$ es $\mathbf{N} = \left(f'_x, f'_y, -1\right) = \left(\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{a}, -1\right)$. El conjunto D proyección de $S_1$ sobre XY es el círculo de centro (0,0) y radio $2a$.

$$flujo_{S_1} = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dA = \iint_D \left(x, y, \frac{x^2+y^2}{2a}\right)\cdot\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, -1\right)dA =$$

$$= \iint_D \frac{2x^2+2y^2-x^2-y^2}{2a}\,dA = \iint_D \frac{x^2+y^2}{2a}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{2a} \frac{r^3}{2a}dr d\theta = \frac{\pi}{a}\left(\frac{(2a)^4}{4}\right) = 4\pi a^3$$

## Apartado b) Flujo a través de $S_2$.

El vector normal es $\mathbf{N} = \mathbf{k}$. El conjunto D es la proyección de $S_2$ sobre el plano XY es el círculo de centro (0,0) y radio $2a$.

$$flujo_{S_2} = \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dA = \iint_D (x, y, 2a)\cdot(0,0,1)\,dA =$$

$$= \iint_D 2a\,dA = 2a\acute{A}rea(D) = 8a^3\pi$$

## Apartado c)

Para calcular el flujo a través de $S_1 \cup S_2$ aplicando el Teorema de Gauss se tendrá que

$$flujo_{S_1\cup S_2} = \iiint_H div\mathbf{F}\,dV = \iiint_H 3dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{2a}\int_{r^2/2a}^{2a} 3r dz dr d\theta =$$

$$= 3\cdot 2\pi\int_0^{2a}\left(2ar - \frac{r^3}{2a}\right)dr = 6\pi\left(2a\frac{(2a)^2}{2} - \frac{(2a)^4}{8a}\right) = 6\pi\left(4a^3 - 2a^3\right) = 12\pi a^3$$

# 4

Dado el campo $\mathbf{F} = (x+y, x, 1)$ determinar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Una superficie equipotencial de $\mathbf{F}$ es $z + \frac{x^2}{2} + xy = \frac{5}{2}$.

(b) $div\,\mathrm{F} = 1$ y $rot\,\mathrm{F} = \mathrm{i}$

(c) El código

```
[X,Y,Z]=meshgrid(0:0.2:2);
quiver3(X,Y,Z,X+Y,X,1)
```

representa una muestra del campo **F** en la caja $[0,2]x[0,2]x[0,2]$

- Este ejercicio se corresponde con la pregunta 8 del test 2 del tema de integración curvilinea.

http://www.giematic.unican.es/index.php/campos-e-int-de-linea/material-interactivo

- La divergencia está bien calculada
- El rotacional no
- La función potencial es una función $f(x,y,z)$ que verifica

$$(1)\quad \frac{\partial f}{\partial x}=x+y \qquad (2)\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x \qquad (3)\quad \frac{\partial f}{\partial z}=1$$

Por (1) $f(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+yx+h(y,z)$. Aplicando (2)

$$x+\frac{\partial h}{\partial y}=x \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y}=0 \Rightarrow h=h(z)$$

Por lo tanto, $f(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+yx+h(z)$. Aplicando (3)

$$h'(z)=1 \Rightarrow h(z)=z+A$$

Una función potencial es $f(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+yx+z$ y una superficie equipotencial es la superficie: $\frac{5}{2}=\frac{x^2}{2}+yx+z$.

Las órdenes Matlab darían error, ya que la sexta componente del comando `quiver` debería ser un matriz de unos en lugar de la constante 1.

# 5

1. Demuestra que para cualquier función $f$ con derivadas parciales segundas continuas se verifica $rot(\nabla f)=0$
2. Una placa tiene la forma de la región interior a la curva de ecuación $x^2+y^2-2x=0$. Su densidad en cada punto es igual a la distancia al origen. Escribir la expresión que permitiría calcular la masa de la placa y el código Matlab para representar dicha región y obtener el valor de la integral.

- El apartado a) es el ejercicioi propuesto como actividad del tema 2 el día 1 de marzo.

- Ejercicios similares al apartado 2 son los propuestos 8 y 10 hechos en clase.

## Apartado a)

$$rot\left(\nabla f\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(f''_{zy} - f''_{yz}\right) - \mathbf{j}\left(f''_{zx} - f''_{xz}\right) + \mathbf{k}\left(f''_{yx} - f''_{xy}\right) = \mathbf{0}$$

## Apartado b)

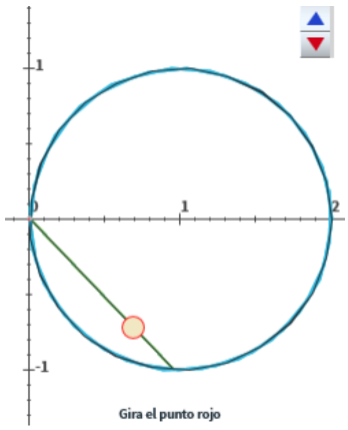
$$masa = \iint_D \delta\left(x,y\right) dA$$

Donde D es el interior de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x = 0$ y $\delta\left(x,y\right) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Pasando a coordenadas polares

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow r^2 - r\cos\theta = 0 \Rightarrow r = \cos\theta$$

$$D \equiv \left(r,\theta\right) \qquad con\ -\pi \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le r \le \cos\theta$$

$$\delta\left(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta\right) = r$$




Luego

$$masa = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\cos\theta} r^2 dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^3\theta}{3} d\theta$$

## Examen Seguimiento 9 Mayo

**1**

a) Dada la familia F de curvas $4y + a\,x^2 + 1 + Ce^{2y} = 0$, se pide:

1. Obtener a mano la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de curvas dada.
2. Obtener con Matlab la familia de trayectorias ortogonales a la familia F.
3. Representar con Matlab la curva de la familia F que pasa por el punto $\left(a, 0\right)$ junto con la curva ortogonal en dicho punto.

b) Dada la ecuación diferencial $\left(x\sin(ax\,/\,2) - ay\right)dx = k\,x\,dy$, se pide:

Determinar a mano el valor de k para que la ecuación diferencial sea exacta.

Resolver con Matlab la ecuación diferencial para el valor de K calculado.

Encontrar con Matlab la curva solución que pasa por el punto $\left(-\frac{a}{2}, 1\right)$

### Apartado a)

La ecuación diferencial se obtiene primero derivando implícitamente:

$$4y' + 2a\,x + Ce^{2y}y' = 0$$

y posteriormente eliminando la constante, teniendo en cuenta que $Ce^{2y} = -4y - a\,x^2 - 1$

$$4y' + 2a\,x + \left(-4y - a\,x^2 - 1\right)y' = 0$$

Despejando, la ecuación diferencial cuya solución es la familia dada es

$$y' = \frac{-2ax}{-4y - ax^2 + 3}$$

La familia ortogonal buscada es la solución de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{-4y - ax^2 + 3}{2ax}$$

```
%Código Matlab
a=4
sola=dsolve(subs('Dy=(-4*y-a*x^2+3)/(2*a*x)','a',a),'x')
valor=solve(subs(sola,'x',a),'C2')
hold on
ezplot(subs(sola,'C2',valor))
%Representación de la curva F
valorC=solve(subs('4*y+a*x^2+1+C*exp(2*y)',{'x','y'},{a,0}),'C')
curvaF=subs(subs('4*y+a*x^2+1+C*exp(2*y)','C',valorC),'a',a)
ezplot(curvaF)
plot(a,0,'o')
axis equal
hold off
```

Nota: Este código es general para cualquier valor de a, se puede simplificar sustituyendo desde el principio el valor de a por el que correspondiera.

## Apartado b)

La ecuación diferencial puede escribirse de la siguiente manera

$$\underbrace{\left(x\sin(ax\,/\,2)-ay\right)}_{=M(x,y)}dx\ \underbrace{-k\,x}_{=N(x,y)}\ dy$$

Para que sea una ecuación diferencial exacta debe cumplirse:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\Leftrightarrow a=k$$

```
%Código Matlab
clear all
a=6
solb=dsolve(subs('Dy=(x*sin(a*x/2)-a*y)/(a*x)','a',a),'x')
hold on
for k=-3:0.2:3
      ezplot(subs(solb,'C2',k))
end
ecuacion=subs(solb,'x',-a/2)
valor=solve(ecuacion-1,'C2')
double(valor)
h=ezplot(subs(solb,'C2',valor))
%Para cambiar la curva de color, no se pedía en el ejercicio
set(h,'Color','m')
plot(-a/2,1,'or')
hold off
```

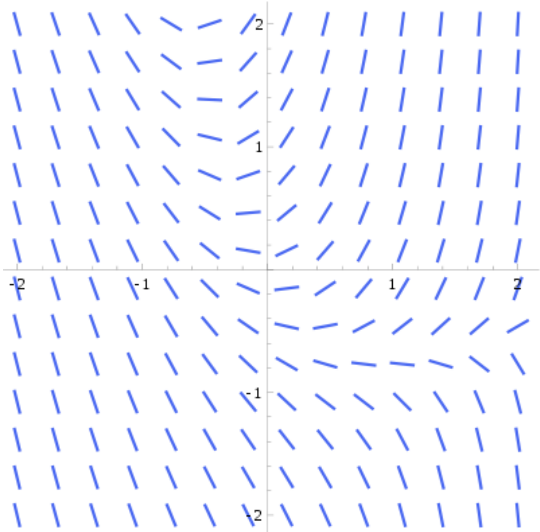
# 2

a) Escribir el código para realizar con Matlab todos los cálculos necesarios para resolver el siguiente problema.

La rapidez de decrecimiento de una sustancia radiactiva es directamente proporcional a la cantidad presente. Si la vida media de una sustancia es de $30 \cdot a$ años

- ¿qué porcentaje habrá después de 100 años?
- ¿en cuántos años quedará el a % de la sustancia?

b) Sobre el campo de direcciones de la figura siguiente, dibuja a mano la curva solución de la ecuación diferencial correspondiente que pasa por el punto $\left(-1.5, 2\right)$. Justifica la respuesta.




## Apartado a)

Llamando $m\left(t\right)$) a la cantidad de sustancia en el instante t, la ecuación diferencial es

$$\frac{dm}{dt} = k\,m \qquad m\left(0\right) = m_o$$

Resolviendo esta ecuación e imponiendo la condición inicial: $m\left(t\right) = m_o e^{k\,t}$. Como la vida es años se tendrá que el tiempo

$$m\left(30a\right) = \frac{m_o}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad m_o e^{k\,30a} = \frac{m_o}{2} \quad \Rightarrow \qquad k = \frac{-\log 2}{30a}$$

Se tendrá entonces que $m(t) = m_o e^{kt}$ $\quad siendo \quad k = \dfrac{-\log 2}{30a}$.

El porcentaje que habrá dentro de 100 años es $\dfrac{m(100)}{m_o} = \dfrac{m_o e^{100k}}{m_o} = e^{100k}$

En cuantos años quedará el $a\%$ de sustancia será el valor de t que cumple: $\dfrac{m(t)}{m_o} = \dfrac{a}{100}$, es decir, $e^{kt} = \dfrac{a}{100}$.

```
%Código Matlab
a=4
solc=dsolve('Dm=k*m','m(0)=m0')
vidaMedia=a*30
valorK=-log(2)/vidaMedia
solucion=subs(solc,'k',valorK)
porcentaje=subs(solucion,{'t','m0'},{100,1})
tiempo=double(solve(subs(solucion,'m0',1)-a/100))
```

## Examen Bloque 2

**1**

Dada la ecuación diferencial $x^2 y'' + 8xy' + 12y = \dfrac{6}{x^2}$. Se pide

a. Demostrar que $y_1 = x^{-3}$, $y_2 = x^{-4}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea.

b. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial.

Puntuación: 10 puntos.

### Apartado a)

Basta ver que $y_1 = x^{-3}$, $y_2 = x^{-4}$ son soluciones de la ecuación diferencial homogenea (cumplen la ecuación diferencial homogénea) y son linealmente independientes.

### Apartado a)

Como la ecuación diferencial es lineal $y'' + \dfrac{8}{x} y' + \dfrac{12}{x^2} y = \dfrac{6}{x^4}$ la solución general será

$y_G = y_H + y_p$ siendo $y_H$ solución general del homogéneo e $y_p$ solución particular de la completa.

Por el primer apartado se tiene que $y_H = C_1 x^{-3} + C_2 x^{-4}$

Para obtener $y_p$ se considera $y_p = C_1(x) x^{-3} + C_2(x) x^{-4}$ con la condición $C'_1(x) x^{-3} + C'_2(x) x^{-4} = 0$. Sustituyendo en la ecuación diferencial se deberá cumplir:

$$\begin{cases} C'_1(x) x^{-3} + C'_2(x) x^{-4} = 0 \\ -3\, C'_1(x) x^{-4} - 4C'_2(x) x^{-5} = \dfrac{6}{x^4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C'_1(x) x^{-3} + C'_2(x) x^{-4} = 0 \\ -3\, C'_1(x) - 4C'_2(x) x^{-1} = 6 \end{cases}$$

$$C_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-4} \\ 6 & x^{-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{-3} & x^{-4} \\ -3 & -4x^{-1} \end{vmatrix}} = \frac{-6x^{-4}}{-x^{-4}} = 6 \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = 6x$$

$$C_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} x^{-3} & 0 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{-3} & x^{-4} \\ -3 & -4x^{-1} \end{vmatrix}} = \frac{6x^{-3}}{-x^{-4}} = -6x \Rightarrow \quad C_2(x) = -3x^2$$

Se tiene que $y_p = 6x \cdot x^{-3} - 3x^2 \cdot x^{-4} = 3x^{-2}$.

Por lo tanto, $y_G = C_1 x^{-3} + C_2 x^{-4} + 3x^{-2}$

## 2

Una masa que pesa 32 kg. se encuentra sujeta al extremo de un resorte ligero que se estira 1 m. cuando se le aplica una fuerza de 4 kg. Si la masa se encuentra en reposo en su posición de equilibrio cuando t=0 y si, en ese instante, se aplica una fuerza de excitación $f(t) = \cos t$ que cesa abruptamente en $t = 2\pi$ segundos, determinar la función de posición de la masa en cualquier instante si se permite a la masa continuar su movimiento sin impedimentos.

Teniendo en cuenta la ley de Hooke, la ecuación que modela la posición de la masa m respecto a su posición de equilibrio es

$$x'' + 4x = f(t) \qquad f(t) = \begin{cases} \cos t & 0 \le t \le 2\pi \\ 0 & t > 2\pi \end{cases}$$

Ejercicio propuesto número 7 de la hoja del tema de transformadas de Laplace y en la práctica de ordenador del día 16 de mayo.

El problema a resolver es

$$x'' + 4x = f(t) \qquad f(t) = \begin{cases} \cos t & 0 \le t \le 2\pi \\ 0 & t > 2\pi \end{cases} = \cos t \cdot U(t) - \cos(t) \cdot U(t - 2\pi)$$

como está en reposo se considera $x(0) = 0,\ x'(0) = 0$.

Llamando $X(s) = \mathcal{L}(x)$ se tendrá

$$\mathcal{L}(x') = sX(s) \qquad \mathcal{L}(x'') = s^2 X(s)$$

Aplicando transformadas de Laplace a la ecuación diferencial se tendrá

$$s^2 X(s) + 4X(s) = \mathcal{L}\left(\cos t \cdot U(t) - \cos(t - 2\pi) \cdot U(t - 2\pi)\right)$$

$$\left(s^2 + 4\right) X(s) = \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{se^{-2\pi s}}{s^2 + 1}$$

Despejando

$$X(s) = \frac{s}{\left(s^2 + 1\right)\left(s^2 + 4\right)} - \frac{se^{-2\pi s}}{\left(s^2 + 1\right)\left(s^2 + 4\right)}$$

$$X(s) = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4} - e^{-2\pi s}\left(\frac{Es + F}{s^2 + 1} + \frac{Gs + H}{s^2 + 4}\right)$$

Como

$$\frac{s}{\left(s^2 + 1\right)\left(s^2 + 4\right)} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4} = \frac{1}{3}\left(\frac{s}{s^2 + 1} - \frac{s}{s^2 + 4}\right)$$

Se tiene

$$X(s) = \frac{1}{3}\frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{3}\frac{s}{s^2 + 4} - e^{-2\pi s}\left(\frac{1}{3}\frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{3}\frac{s}{s^2 + 4}\right)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{3}\frac{s}{s^2 + 1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{3}\frac{s}{s^2 + 4}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2\pi s}\frac{1}{3}\frac{s}{s^2 + 1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2\pi s}\frac{1}{3}\frac{s}{s^2 + 4}\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t - \frac{1}{3}U(t - 2\pi)\cos t + \frac{1}{3}U(t - 2\pi)\cos 2t$$

## 3

a) Dada la ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ no exacta, se pide encontrar la expresión general de una función $\mu(x)$ para que sea factor integrante de dicha ecuación.

b) Dada la siguiente ecuación diferencial,

$$\left(y^3 + 2e^x y\right)dx + \left(e^x + 3y^2\right)dy = 0$$

se pide encontrar la solución general sabiendo que admite un factor integrante de la forma $\mu\left(x\right)$.

c) Encontrar la solución del siguiente problema

$$y\log y dx + x dy = 0 \qquad y\left(1\right) = 1$$

a) Realizado en clase.
c) Ejercicio propuesto número 9b del tema de ecuaciones diferenciales de primer orden realizado en clase.

## Apartado b

Se puede comprobar que la ecuación diferencial no es exacta. Como se dice en el enunciado que admite un factor integrante del tipo $\mu\left(x\right)$ se deberá cumplir que la siguiente ecuación tendrá que ser exacta:

$$\mu\left(x\right)\left(y^3 + 2e^x y\right)dx + \mu\left(x\right)\left(e^x + 3y^2\right)dy = 0$$

En consecuencia,

$$\mu\left(x\right)\left(3y^2 + 2e^x\right) = \mu'\left(x\right)\left(e^x + 3y^2\right) + \mu'\left(x\right)\left(e^x\right)$$

$$\mu\left(x\right)\left(3y^2 + 2e^x\right) = \mu'\left(x\right)\left(2e^x + 3y^2\right)$$

$$\mu\left(x\right) = \mu'\left(x\right) \Rightarrow \frac{\mu'\left(x\right)}{\mu\left(x\right)} = 1 \Rightarrow \log\mu\left(x\right) = x \Rightarrow \mu\left(x\right) = e^x$$

Como la ecuación es exacta:

$$\left(e^x y^3 + 2e^{2x} y\right)dx + \left(e^{2x} + 3e^x y^2\right)dy = 0$$

Se busca u de forma que

$$du = \left(e^x y^3 + 2e^{2x} y\right)dx + \left(e^{2x} + 3e^x y^2\right)dy$$

Se cumplirá

$$\begin{aligned} u'_x &= e^x y^3 + 2e^{2x} y \qquad &\left(1\right) \\ u'_y &= e^{2x} + 3e^x y^2 \qquad &\left(2\right) \end{aligned}$$

De la igualdad (1) se tendrá

$$u = e^x y^3 + e^{2x} y + h(y)$$

Aplicando (2)

$$3e^x y^2 + e^{2x} + h'(y) = e^{2x} + 3e^x y^2 \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = A$$

La función u buscada es

$$u(x,y) = e^x y^3 + e^{2x} y + A$$

Y la solución de la ecuación diferencial es $u(x,y) = C$

$$e^x y^3 + e^{2x} y = C$$

4

Marcar la respuesta correcta justificando tanto la respuesta correcta como las razones por las que las otras respuestas no son correctas.

Utilizamos el método de coeficientes indeterminados para hallar la solución particular $y_p(x)$ y $z_p(x)$ respectivamente, de cada una de las ecuaciones siguientes:

Ecuación 1: $y'' + 9y = x\cos 3x$

Ecuación 2: $z'' + 6z' + 9z = x\cos 3x$

Entonces consideraríamos

1. $y_p(x) = x(Ax+B)\cos 3x + x(Cx+D)\operatorname{sen} 3x$

   $z_p(x) = (Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\operatorname{sen} 3x$

2. $y_p(x) = x(Ax+B)\cos 3x + x(Cx+D)\operatorname{sen} 3x$

   $z_p(x) = x(A\cos 3x + B\operatorname{sen} 3x)$

3. $y_p(x) = (Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\operatorname{sen} 3x$

   $z_p(x) = (Ax+B)(\cos 3x + \operatorname{sen} 3x)$

4. Ninguna de las otras opciones es correcta

Este ejercicio es la pregunta número 7 del test 3 de la página de Giematic

http://www.giematic.unican.es/index.php/edos-segundo-orden/material-interactivo

5

Marcar la respuesta correcta justificando tanto la respuesta correcta como las razones por las que las otras respuestas no son correctas.

Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial $y''+xy'+2y=R(x)$, entonces considerando una combinación lineal de ellas, es decir, $y(x)=a_1y_1(x)+a_2y_2(x)$ con $a_1$ y $a_2$ constantes, se cumplirá:

1. $y(x)$ es solución sólo si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son no proporcionales
2. $y(x)$ es solución sólo si $R(x)=0$
3. $y(x)$ es solución de la ecuación para cualquier elección de $a_1$ y $a_2$
4. Ninguna de las otras respuestas es correcta.

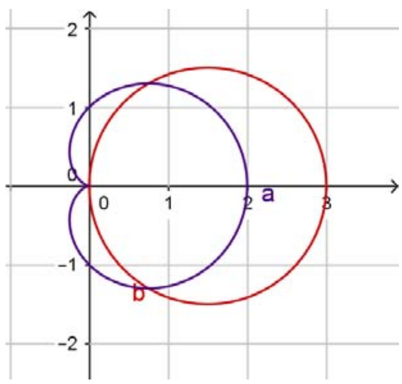
Este ejercicio es la pregunta número 9 del test 2 de la página de Giematic

http://www.giematic.unican.es/index.php/edos-segundo-orden/material-interactivo

Prueba Bloque 1 – 14 de Junio

1

Sea D la región del plano interior a la circunferencia $x^2+y^2-3x=0$ y exterior a la cardioide r=1+cosθ.



Pregunta 6 del test 1 parte 3 de Giematic.
Ejercicio idéntico al propuesto 10b) hecho en clase.

**2**

Calcular el volumen del sólido bajo el plano $3x+8y+6z=24$ y sobre la región del plano XY limitada por la parábola $y^2=2x$, la recta $2x+3y=10$ y el eje X.

**3**

Se considera la fuerza definida por $\mathbf{F}(x,y)=\left(2x+y^2\right)\mathbf{i}+\left(3y-4x\right)\mathbf{j}$ y la curva C delimitada por las ecuaciones $x=y^2$, $y=x^2$, con $x,y\geq 0$. Calcular el trabajo realizada por la fuerza para mover una partícula a lo largo de C.

**4**

Calcular la circulación del campo $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(x^2-y\right)\mathbf{i}+4z\,\mathbf{j}+x^2\,\mathbf{k}$ alrededor de la curva C intersección del plano $z=4$ y el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$, recorrida en sentido positivo utilizando y sin utilizar el Teorema de Stokes.

Evaluación continua - Seguimiento – 14 de Junio

**1**

**Escribir el código Matlab** para resolver el siguiente problema.

Sea el contorno del triángulo cuyos vértices están en los puntos A(1,1), B(2,2) y C(1,3) recorrida en sentido positivo.

b.1 Escribe el código Matlab para resolver la siguiente integral utilizando el Teorema de Green

$$I=\oint_C 2\left(x^2+y^2\right)dx+\left(x+y\right)^2 dy$$

b.2 Dibuja una muestra del campo vectorial actuando sobre el triángulo.

Ejercicio 2 de la práctica 5 realizada el día 7 de marzo

**2**

**Escribir el código Matlab** para resolver el siguiente problema.

(a) Escribir el código Matlab para

a.1) representar cinco curvas de la familia uniparamétrica

$$x^2 + (y-c)^2 = c^2$$

a.2) resolver la siguiente ecuación en Matlab $x^2 - y^2 - 2xyy' = 0$ y obtener y representar la curva que pasa por el punto (1,1)

Ejercicio idéntico al 3 de la práctica 9 realizado el día 9 de abril que es también uno de los propuestos en la hoja de ejercicios.

## Prueba Bloque 2 – 14 de Junio

**1**

(a) Obtener la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de trayectorias ortogonales a la familia uniparamétrica de circunferencias $x^2 + (y-c)^2 = c^2$

(b) Resolver la siguiente ecuación diferencial $x^2 - y^2 - 2xyy' = 0$

**2**

(a) Resolver la ecuación diferencial $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ sabiendo que $e^x$ es una solución de la homogénea.

(b) Resolver la siguiente ecuación diferencial $y'' - y = \dfrac{1}{e^x + 1}$

**3**

(a) Demuestra que $L\left(e^{at} f(t)\right) = L(f)(s+a)$ $a \in \mathbb{R}$

(b) Calcular la transformada de Laplace de $f(t) = \begin{cases} t & 1 < t < 2 \\ t^2 & t > 2 \end{cases}$

(c) Calcular la transformada inversa de Laplace de $F(s) = \dfrac{2s+3}{s^2 - 4s + 20}$

## 4

¿Cuáles de las siguientes familias de funciones son solución general de una e.d.o. lineal de segundo orden de coeficientes constantes homogénea?

$$y_1(x) = C_1 + C_2 e^x \qquad y_2(x) = C_1 x + C_2$$

$$y_3(x) = C(\cos 3x + 2\,\mathrm{sen}\,3x) \qquad y_4(x) = e^{-3x}(C_1 + C_2 e^x)$$

$$y_5(x) = e^{-x}(\mathrm{C}_1 \cos x + C_2\,\mathrm{sen}\,2x)$$

Justificar la respuesta para cada una de las familias.

Pregunta 4 del test
http://personales.unican.es/alvareze/evalua/Test4CII_parte3/index.html

## 5

Marcar la respuesta correcta justificando tanto la respuesta correcta como las razones por las que las otras respuestas no son correctas.

Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + xy' + 2y = R(x)$, entonces considerando una combinación lineal de ellas, es decir, $y(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x)$ con $a_1$ y $a_2$ constantes, se cumplirá:

1. $y(x)$ es solución sólo si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son no proporcionales
2. $y(x)$ es solución sólo si $R(x) = 0$
3. $y(x)$ es solución de la ecuación para cualquier elección de $a_1$ y $a_2$
4. Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Pregunta 9 del test
http://personales.unican.es/alvareze/evalua/Test4CII_parte2/index.html