# Sección 10.2 Curvas planas y ecuaciones paramétricas

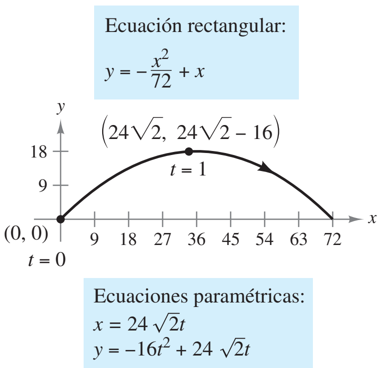
- **Trazar la gráfica de una curva dada por un conjunto de ecuaciones paramétricas.**
- **Eliminar el parámetro en un conjunto de ecuaciones paramétricas.**
- **Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para representar una curva.**
- **Entender dos problemas clásicos del cálculo, el problema tautocrona y el problema braquistocrona.**

## Curvas planas y ecuaciones paramétricas

Hasta ahora, se ha representado una gráfica mediante una sola ecuación con *dos* variables. En esta sección se estudiarán situaciones en las que se emplean *tres* variables para representar una curva en el plano.

Considérese la trayectoria que recorre un objeto lanzado al aire con un ángulo de 45°. Si la velocidad inicial del objeto es 48 pies por segundo, el objeto recorre la trayectoria parabólica dada por

$$y = -\frac{x^2}{72} + x \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$




Movimiento curvilíneo: dos variables de posición y una de tiempo
**Figura 10.19**

como se muestra en la figura 10.19. Sin embargo, esta ecuación no proporciona toda la información. Si bien dice dónde *se encuentra* el objeto, no dice *cuándo se encuentra* en un punto dado $(x, y)$. Para determinar este instante, se introduce una tercera variable $t$, conocida como **parámetro**. Expresando $x$ y $y$ como funciones de $t$, se obtienen las **ecuaciones paramétricas**

$$x = 24\sqrt{2}\,t \qquad \text{Ecuación paramétrica para } x.$$

y

$$y = -16t^2 + 24\sqrt{2}\,t. \qquad \text{Ecuación paramétrica para } y.$$

A partir de este conjunto de ecuaciones, se puede determinar que en el instante $t = 0$, el objeto se encuentra en el punto (0, 0). De manera semejante, en el instante $t = 1$, el objeto está en el punto $(24\sqrt{2}, 24\sqrt{2} - 16)$, y así sucesivamente. (Más adelante, en la sección 12.3 se estudiará un método para determinar este conjunto particular de ecuaciones paramétricas, las ecuaciones de movimiento.)

En este problema particular de movimiento, $x$ y $y$ son funciones continuas de $t$, y a la trayectoria resultante se le conoce como **curva plana**.

### Definición de una curva plana

Si $f$ y $g$ son funciones continuas de $t$ en un intervalo $I$, entonces a las ecuaciones

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t)$$

se les llama **ecuaciones paramétricas** y a $t$ se le llama el **parámetro**. Al conjunto de puntos $(x, y)$ que se obtiene cuando $t$ varía sobre el intervalo $I$ se le llama la **gráfica** de las ecuaciones paramétricas. A las ecuaciones paramétricas y a la gráfica, juntas, es a lo que se le llama una **curva plana**, que se denota por $C$.

NOTA Algunas veces es importante distinguir entre una gráfica (conjunto de puntos) y una curva (los puntos junto con las ecuaciones paramétricas que los definen). Cuando sea importante hacer esta distinción, se hará de manera explícita. Cuando no sea importante se empleará $C$ para representar la gráfica o la curva, indistintamente.

Cuando se dibuja (a mano) una curva dada por un conjunto de ecuaciones paramétricas, se trazan puntos en el plano $xy$. Cada conjunto de coordenadas $(x, y)$ está determinado por un valor elegido para el parámetro $t$. Al trazar los puntos resultantes de valores crecientes de $t$, la curva se va trazando en una dirección específica. A esto se le llama la **orientación** de la curva.

## EJEMPLO 1 Trazado de una curva

Trazar la curva dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - 4 \quad \text{y} \quad y = \frac{t}{2}, \quad -2 \leq t \leq 3.$$

**Solución** Para valores de $t$ en el intervalo dado, se obtienen, a partir de las ecuaciones paramétricas, los puntos $(x, y)$ que se muestran en la tabla.

| $t$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $-3$ | $-4$ | $-3$ | $0$ | $5$ |
| $y$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ |

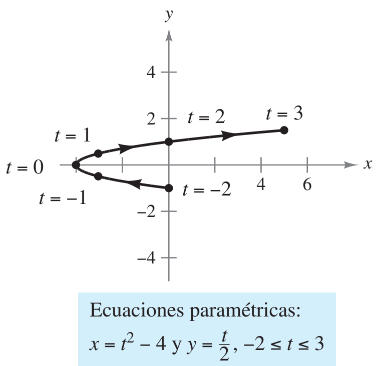



**Figura 10.20**

Al trazar estos puntos en orden de valores crecientes de $t$ y usando la continuidad de $f$ y de $g$ se obtiene la curva $C$ que se muestra en la figura 10.20. Hay que observar las flechas sobre la curva que indican su orientación conforme $t$ aumenta de $-2$ a 3.

NOTA De acuerdo con el criterio de la recta vertical, puede verse que la gráfica mostrada en la figura 10.20 no define $y$ en función de $x$. Esto pone de manifiesto una ventaja de las ecuaciones paramétricas: pueden emplearse para representar gráficas más generales que las gráficas de funciones.

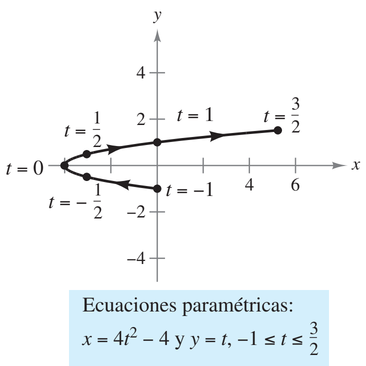



**Figura 10.21**

A menudo ocurre que dos conjuntos distintos de ecuaciones paramétricas tienen la misma gráfica. Por ejemplo, el conjunto de ecuaciones paramétricas

$$x = 4t^2 - 4 \quad \text{y} \quad y = t, \quad -1 \leq t \leq \frac{3}{2}$$

tiene la misma gráfica que el conjunto dado en el ejemplo 1. Sin embargo, al comparar los valores de $t$ en las figuras 10.20 y 10.21, se ve que la segunda gráfica se traza con mayor *rapidez* (considerando $t$ como tiempo) que la primera gráfica. Por lo que en las aplicaciones, pueden emplearse distintas ecuaciones paramétricas para representar las diversas *velocidades* a las que los objetos recorren una trayectoria determinada.

**TECNOLOGÍA** La mayoría de las graficadoras cuenta con un modo *paramétrico* de graficación. Se puede emplear uno de estos dispositivos para confirmar las gráficas mostradas en las figuras 10.20 y 10.21. ¿Representa la curva dada por

$$x = 4t^2 - 8t \quad \text{y} \quad y = 1 - t, \quad -\tfrac{1}{2} \leq t \leq 2$$

la misma gráfica que la mostrada en las figuras 10.20 y 10.21? ¿Qué se observa respecto a la *orientación* de esta curva?

## Eliminación del parámetro

Al encontrar la ecuación rectangular que representa la gráfica de un conjunto de ecuaciones paramétricas se le llama **eliminación del parámetro**. Por ejemplo, el parámetro del conjunto de ecuaciones paramétricas del ejemplo 1 se puede eliminar como sigue.

| Ecuaciones paramétricas | ⇨ | Despejar $t$ de una de las ecuaciones | ⇨ | Sustituir en la otra ecuación | ⇨ | Ecuación rectangular |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x = t^2 - 4$<br>$y = t/2$ | | $t = 2y$ | | $x = (2y)^2 - 4$ | | $x = 4y^2 - 4$ |

Una vez eliminado el parámetro, se ve que la ecuación $x = 4y^2 - 4$ representa una parábola con un eje horizontal y vértice en $(-4, 0)$, como se ilustra en la figura 10.20.

El rango de $x$ y $y$ implicado por las ecuaciones paramétricas puede alterarse al pasar a la forma rectangular. En esos casos, el dominio de la ecuación rectangular debe ajustarse de manera que su gráfica coincida con la gráfica de las ecuaciones paramétricas. En el ejemplo siguiente se muestra esta situación.

### EJEMPLO 2 Ajustar el dominio después de la eliminación del parámetro

Dibujar la curva representada por las ecuaciones

$$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \quad \text{y} \quad y = \frac{t}{t+1}, \quad t > -1$$

eliminando el parámetro y ajustando el dominio de la ecuación rectangular resultante.

**Solución** Para empezar se despeja $t$ de una de las ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, se puede despejar $t$ de la primera ecuación.

$$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \qquad \text{Ecuación paramétrica para } x.$$

$$x^2 = \frac{1}{t+1} \qquad \text{Elevar al cuadrado cada lado.}$$

$$t + 1 = \frac{1}{x^2}$$

$$t = \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1 - x^2}{x^2} \qquad \text{Despejar } t.$$

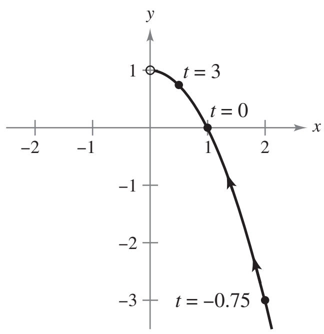
Sustituyendo ahora, en la ecuación paramétrica para $y$, se obtiene

$$y = \frac{t}{t+1} \qquad \text{Ecuación paramétrica para } y.$$

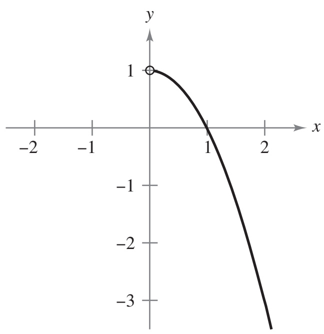
$$y = \frac{(1 - x^2)/x^2}{[(1 - x^2)/x^2] + 1} \qquad \text{Sustitución de } t \text{ por } (1 - x^2)/x^2\text{ .}$$

$$y = 1 - x^2. \qquad \text{Simplificar.}$$

La ecuación rectangular, $y = 1 - x^2$, está definida para todos los valores de $x$, sin embargo en la ecuación paramétrica para $x$ se ve que la curva sólo está definida para $t > -1$. Esto implica que el dominio de $x$ debe restringirse a valores positivos, como se ilustra en la figura 10.22.




Ecuaciones paramétricas:
$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}},\ y = \frac{t}{t+1},\ t > -1$




Ecuación rectangular:
$y = 1 - x^2,\ x > 0$

**Figura 10.22**

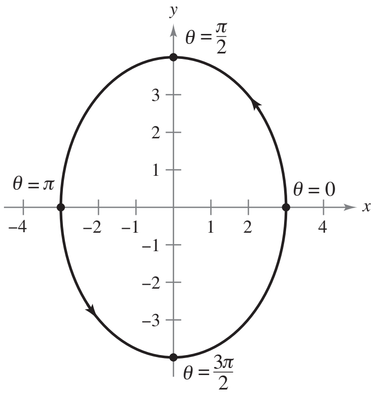
En un conjunto de ecuaciones paramétricas, el parámetro no necesariamente representa tiempo. El siguiente ejemplo emplea un *ángulo* como parámetro.

### EJEMPLO 3 Emplear trigonometría para eliminar un parámetro

Dibujar la curva representada por

$$x = 3\cos\theta \quad \text{y} \quad y = 4\,\text{sen}\,\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

al eliminar el parámetro y hallar la ecuación rectangular correspondiente.




Ecuaciones paramétricas:
$x = 3\cos\theta, \ y = 4\,\text{sen}\,\theta$
Ecuación rectangular:
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

**Figura 10.23**

**Solución** Para empezar se despejan $\cos\theta$ y $\text{sen}\,\theta$ de las ecuaciones dadas.

$$\cos\theta = \frac{x}{3} \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{4} \qquad \text{Despejar } \cos\theta \text{ y sen } \theta.$$

A continuación, se hace uso de la identidad $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ para formar una ecuación en la que sólo aparezcan $x$ y $y$.

$$\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1 \qquad \text{Identidad trigonométrica.}$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1 \qquad \text{Sustituir.}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \qquad \text{Ecuación rectangular.}$$

En esta ecuación rectangular, puede verse que la gráfica es una elipse centrada en $(0, 0)$, con vértices en $(0, 4)$ y $(0, -4)$ y eje menor de longitud $2b = 6$, como se muestra en la figura 10.23. Obsérvese que la elipse está trazada *en sentido contrario al de las manecillas del reloj* ya que $\theta$ va de 0 a $2\pi$.

El empleo de la técnica presentada en el ejemplo 3, permite concluir que la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = h + a\cos\theta \quad \text{y} \quad y = k + b\,\text{sen}\,\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

es una elipse (trazada en sentido contrario al de las manecillas del reloj) dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

La gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = h + a\,\text{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad y = k + b\cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

también es una elipse (trazada en sentido de las manecillas del reloj) dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Emplear una graficadora en modo *paramétrico* para elaborar las gráficas de varias elipses.

En los ejemplos 2 y 3, es importante notar que la eliminación del parámetro es principalmente una *ayuda para trazar la curva*. Si las ecuaciones paramétricas representan la trayectoria de un objeto en movimiento, la gráfica sola no es suficiente para describir el movimiento del objeto. Se necesitan las ecuaciones paramétricas que informan sobre la *posición*, *dirección* y *velocidad*, en un instante determinado.

## Hallar ecuaciones paramétricas

Los primeros tres ejemplos de esta sección, ilustran técnicas para dibujar la gráfica que representa un conjunto de ecuaciones paramétricas. Ahora se investigará el problema inverso. ¿Cómo determinar un conjunto de ecuaciones paramétricas para una gráfica o una descripción física dadas? Por el ejemplo 1 ya se sabe que tal representación no es única. Esto se demuestra más ampliamente en el ejemplo siguiente, en el que se encuentran dos representaciones paramétricas diferentes para una gráfica dada.

### *EJEMPLO 4* Hallar las ecuaciones paramétricas para una gráfica dada

Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para representar la gráfica de $y = 1 - x^2$, usando cada uno de los parámetros siguientes.

***a)*** $t = x$ ***b)*** La pendiente $m = \dfrac{dy}{dx}$ en el punto $(x, y)$

**Solución**

***a)*** Haciendo $x = t$ se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x = t \quad \text{y} \quad y = 1 - x^2 = 1 - t^2.$$

***b)*** Para expresar $x$ y $y$ en términos del parámetro $m$, se puede proceder como sigue.

$$m = \frac{dy}{dx} = -2x \qquad \text{Derivada de } y = 1 - x^2.$$

$$x = -\frac{m}{2} \qquad \text{Despejar } x.$$

Con esto se obtiene una ecuación paramétrica para $x$. Para obtener una ecuación paramétrica para $y$, en la ecuación original se sustituye $x$ por $-m/2$.

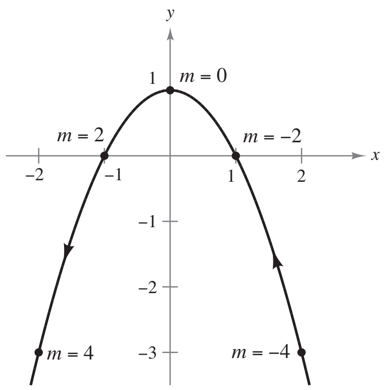
$$y = 1 - x^2 \qquad \text{Escribir la ecuación rectangular original.}$$

$$y = 1 - \left(-\frac{m}{2}\right)^2 \qquad \text{Sustitución de } x \text{ por } -m/2.$$

$$y = 1 - \frac{m^2}{4} \qquad \text{Simplificación.}$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas son

$$x = -\frac{m}{2} \quad \text{y} \quad y = 1 - \frac{m^2}{4}.$$




Ecuación rectangular: $y = 1 - x^2$
Ecuaciones paramétricas:
$x = -\frac{m}{2}, \; y = 1 - \frac{m^2}{4}$

**Figura 10.24**

En la figura 10.24 obsérvese que la orientación de la curva resultante es de derecha a izquierda, determinada por la dirección de los valores crecientes de la pendiente $m$. En el apartado *a*), la curva puede haber tenido la orientación opuesta.

**TECNOLOGÍA** Para usar de manera eficiente una graficadora es importante desarrollar la destreza de representar una gráfica mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas. La razón es que muchas graficadoras sólo tienen tres modos de graficación: 1) funciones, 2) ecuaciones paramétricas y 3) ecuaciones polares. La mayor parte de las graficadoras no están programadas para elaborar la gráfica de una ecuación general. Supóngase, por ejemplo, que se quiere elaborar la gráfica de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Para hacer la gráfica de la hipérbola en el modo *función*, se necesitan dos ecuaciones: $y = \sqrt{x^2 - 1}$ y $y = -\sqrt{x^2 - 1}$. En el modo *paramétrico*, la gráfica puede representarse mediante $x = \sec t$ y $y = \tan t$.

**CICLOIDES**

Galileo fue el primero en llamar la atención hacia la cicloide, recomendando que se empleara en los arcos de los puentes. En cierta ocasión, Pascal pasó ocho días tratando de resolver muchos de los problemas de las cicloides, problemas como encontrar el área bajo un arco y el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la curva sobre una recta. La cicloide tiene tantas propiedades interesantes y ha generado tantas disputas entre los matemáticos que se le ha llamado "la Helena de la geometría" y "la manzana de la discordia".

***PARA MAYOR INFORMACIÓN*** Para más información acerca de las cicloides, consultar el artículo "The Geometry of Rolling Curves" de John Bloom y Lee Whitt en *The American Mathematical Monthly*.

## EJEMPLO 5 Ecuaciones paramétricas de una cicloide

Determinar la curva descrita por un punto $P$ en la circunferencia de un círculo de radio $a$ que rueda a lo largo de una recta en el plano. A estas curvas se les llama **cicloides**.

**Solución** Sea $\theta$ el parámetro que mide la rotación del círculo y supóngase que al inicio el punto $P = (x, y)$ se encuentra en el origen. Cuando $\theta = 0$, $P$ se encuentra en el origen. Cuando $\theta = \pi$, $P$ está en un punto máximo $(\pi a, 2a)$. Cuando $\theta = 2\pi$, $P$ vuelve al eje $x$ en $(2\pi a, 0)$. En la figura 10.25 se ve que $\angle APC = 180° - \theta$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}(\angle APC) = \frac{AC}{a} = \frac{BD}{a}$$

$$\cos\theta = -\cos(180° - \theta) = -\cos(\angle APC) = \frac{AP}{-a}$$

lo cual implica que

$$AP = -a\cos\theta \quad \text{y} \quad BD = a\operatorname{sen}\theta.$$

Como el círculo rueda a lo largo del eje $x$, se sabe que $OD = \overset{\frown}{PD} = a\theta$. Además, como $BA = DC = a$, se tiene

$$x = OD - BD = a\theta - a\operatorname{sen}\theta$$
$$y = BA + AP = a - a\cos\theta.$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas son

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \quad \text{y} \quad y = a(1 - \cos\theta).$$

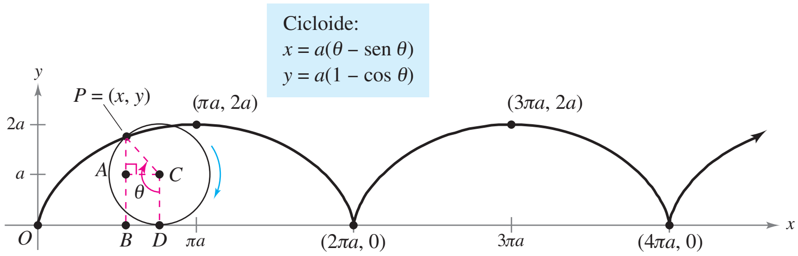



**Figura 10.25**

**TECNOLOGÍA** Algunas graficadoras permiten simular el movimiento de un objeto que se mueve en el plano o en el espacio. Se recomienda usar una de estas graficadoras para trazar la trayectoria de la cicloide que se muestra en la figura 10.25.

La cicloide de la figura 10.25 tiene esquinas agudas en los valores $x = 2n\pi a$. Obsérvese que las derivadas $x'(\theta)$ y $y'(\theta)$ son ambas cero en los puntos en los que $\theta = 2n\pi$.

$$x(\theta) = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad y(\theta) = a(1 - \cos\theta)$$
$$x'(\theta) = a - a\cos\theta \qquad y'(\theta) = a\operatorname{sen}\theta$$
$$x'(2n\pi) = 0 \qquad y'(2n\pi) = 0$$

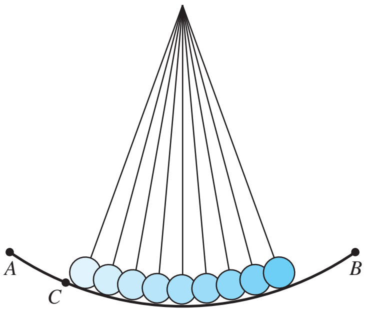
Entre estos puntos, se dice que la cicloide es **suave**.

### Definición de una curva suave

Una curva $C$ representada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ en un intervalo $I$ se dice que es **suave** si $f'$ y $g'$ son continuas en $I$ y no son simultáneamente 0, excepto posiblemente en los puntos terminales de $I$. La curva $C$ se dice que es **suave a trozos** si es suave en todo subintervalo de alguna partición de $I$.

## Los problemas del tautocrona y del braquistocrona

El tipo de curva descrito en el ejemplo 5 está relacionado con uno de los más famosos pares de problemas de la historia del cálculo. El primer problema (llamado el **problema del tautocrona**) empezó con el descubrimiento de Galileo de que el tiempo requerido para una oscilación completa de un péndulo dado es *aproximadamente* el mismo ya sea que efectúe un movimiento largo a alta velocidad o un movimiento corto a menor velocidad (ver la figura 10.26). Ya tarde durante su vida, Galileo (1564-1642) comprendió que podía emplear este principio para construir un reloj. Sin embargo, no logró llegar a la mecánica necesaria para construirlo. Christian Huygens (1629-1695) fue el primero en diseñar y construir un modelo que funcionara. En su trabajo con los péndulos, Huygens observó que un péndulo no realiza oscilaciones de longitudes diferentes en exactamente el mismo tiempo. (Esto no afecta al reloj de péndulo porque la longitud del arco circular se mantiene constante dándole al péndulo un ligero impulso cada vez que pasa por su punto más bajo.) Pero al estudiar el problema, Huygens descubrió que una pelotita que rueda hacia atrás y hacia adelante en una cicloide invertida completa cada ciclo en exactamente el mismo tiempo.




El tiempo que requiere un péndulo para realizar una oscilación completa si parte del punto $C$ es aproximadamente el mismo que si parte del punto $A$
**Figura 10.26**


**JAMES BERNOULLI (1654-1705)**

James Bernoulli, también llamado Jacques, era el hermano mayor de John. Fue uno de los matemáticos consumados de la familia suiza Bernoulli. Los logros matemáticos de James le han dado un lugar prominente en el desarrollo inicial del cálculo.


Una cicloide invertida es la trayectoria descendente que una pelotita rodará en el tiempo más corto
**Figura 10.27**

El segundo problema, que fue planteado por John Bernoulli en 1696, es el llamado **problema del braquistocrona** (en griego *brachys* significa corto y *cronos* significa tiempo). El problema consistía en determinar la trayectoria descendente por la que una partícula se desliza del punto $A$ al punto $B$ en el *menor tiempo*. Varios matemáticos se abocaron al problema y un año después el problema fue resuelto por Newton, Leibniz, L'Hopital, John Bernoulli y James Bernoulli. Como se encontró, la solución no es una recta de $A$ a $B$, sino una cicloide invertida que pasa por los puntos $A$ y $B$, como se muestra en la figura 10.27. Lo sorprendente de la solución es que una partícula, que parte del reposo en *cualquier* otro punto $C$, entre $A$ y $B$, de la cicloide tarda exactamente el mismo tiempo en llegar a $B$, como se muestra en la figura 10.28.


Una pelotita que parte del punto $C$ tarda el mismo tiempo en llegar al punto $B$ que una que parte del punto $A$
**Figura 10.28**

***PARA MAYOR INFORMACIÓN*** Para ver una demostración del famoso problema del braquistocrona, consultar el artículo "A New Minimization Proof for the Brachistochrone" de Gary Lawlor en *The American Mathematical Monthly*.