INTEGRACIÓN MÚLTIPLE

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Cálculo de integrales de Riemann.
- Definición y propiedades de la integral de Riemann.
- Manejo de coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$.
- Manejo de ecuaciones de curvas y superficies en distintos sistemas de coordenadas.
- Dibujo de curvas y superficies con Matlab.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Los objetivos específicos de este tema son:

1. Saber escribir la suma de Riemann de una función $z = f(x,y)$ sobre un rectángulo $R = [a,b]\times[c,d]$, tomando diferentes particiones de R.
2. Entender la definición de integral doble y saber escribirla. Conocer las condiciones suficientes de integrabilidad y las propiedades de la integral doble.
3. Saber realizar la integral de una función de dos variables sobre un rectángulo mediante integración iterada.
4. Saber expresar adecuadamente un dominio regular del plano para realizar sobre él una integral iterada. Hallar el valor de esa integral. Saber expresar la integral en distintos órdenes de integración.
5. Conocer y utilizar las interpretaciones de la integral doble como volumen, área, masa y temperatura.
6. Saber definir e interpretar el valor medio de una función sobre un recinto del plano.
7. Saber el teorema del cambio de variables en integrales dobles y poder efectuar un cambio de variables en una integral doble. Manejar el cambio a coordenadas polares.
8. Entender y poder escribir la definición de integral triple. Conocer las condiciones suficientes de integrabilidad y las propiedades de la integral triple.
9. Saber realizar la integral de una función de tres variables sobre una caja mediante integración iterada.
10. Saber expresar adecuadamente un dominio regular del espacio para realizar sobre él una integral iterada. Poder hacer esa integral, sabiendo modificar el orden de integración si esto fuera conveniente.
11. Conocer y utilizar las interpretaciones de la integral triple como volumen, masa y temperatura.

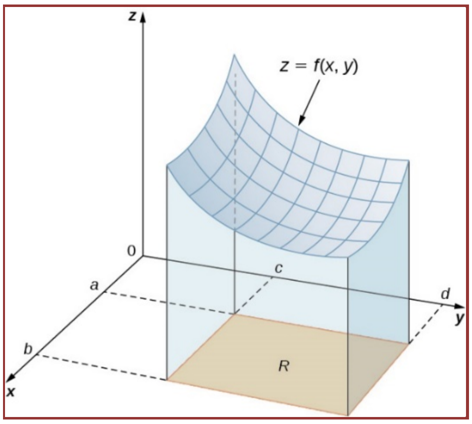
12. Saber definir e interpretar el valor medio de una función sobre un recinto del espacio.
13. Poder escribir el teorema del cambio de variables en integrales triples y poder efectuar un cambio de variables en una integral triple. Manejar los cambios a coordenadas cilíndricas y esféricas.

INTEGRAL DOBLE

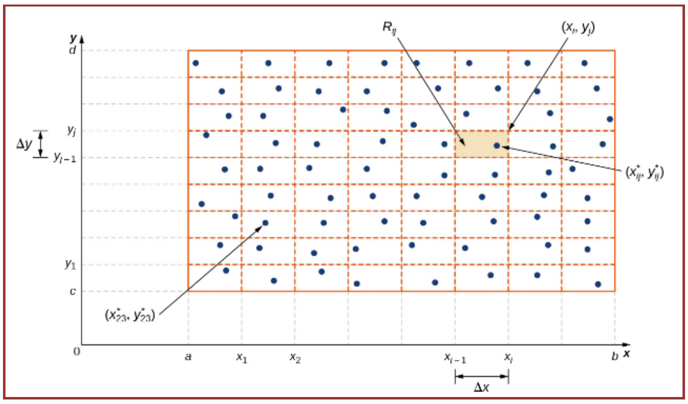
1 Integral doble sobre rectángulos

Definición (**Rectángulo**).- Un rectángulo R del plano XY es el conjunto

$$R = [a,b]\times[c,d] = \{(x,y)\,/\,a \le x \le b,\ \ c \le y \le d\}$$

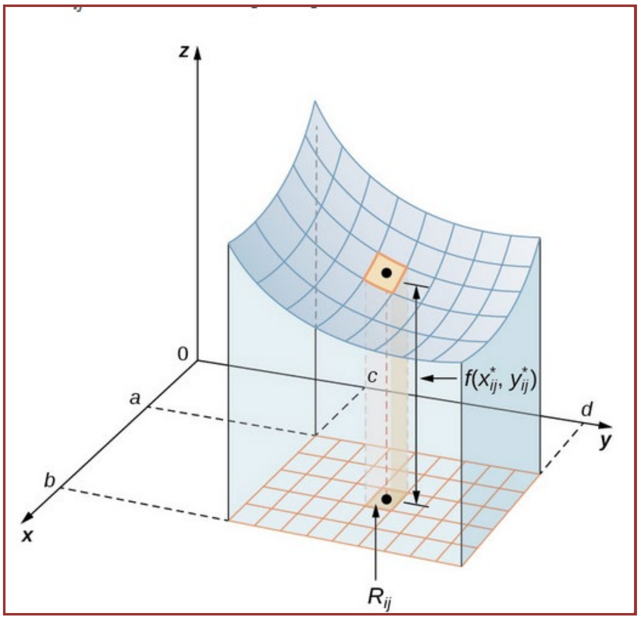


Definición (**Partición de un rectángulo**).- Partición de un rectángulo R es el conjunto de subrectángulos generados al tomar una partición en $[a,b]$ y otra en $[c,d]$. Si hay n subrectángulos y cada uno de ellos se denota por R_k, tendremos $R = \bigcup_{k=1}^{n} R_k$



Definición (**Norma de una partición**).- Llamaremos norma de la partición y la designaremos por $\|R\|$ a la longitud de la diagonal del mayor subrectángulo.

Definición (**Suma de Riemann**).- Llamaremos suma de Riemann de la función $f(x,y)$ definida en el rectángulo R para la partición $\left\{R_k\right\}_{k=1}^{n}$ a la suma, $\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k$ donde (x_k,y_k) es un punto cualquiera tomado en el subrectángulo R_k y ΔA_k es el área de R_k.



Definición (**Integral doble**).- Sea f una función de dos variables definida sobre un rectángulo cerrado R. Si para toda partición de R, tal que la norma de la partición tiende a cero, existe el límite

$$\lim_{\substack{\|R\|\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k$$

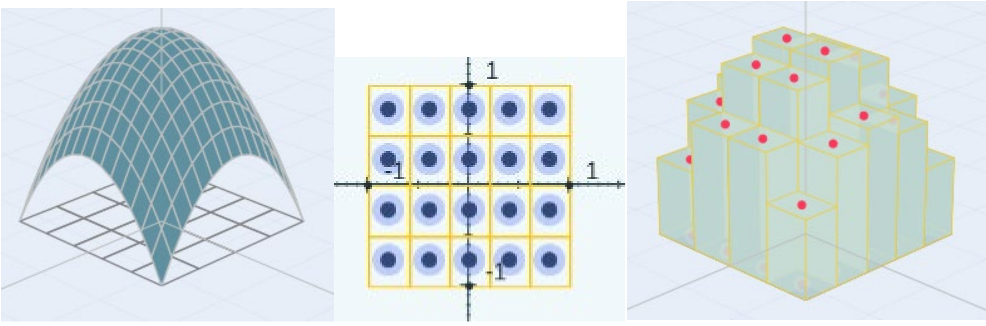
se dice que f es integrable en R. Además el valor de éste límite es la integral doble de f sobre R y se denota por

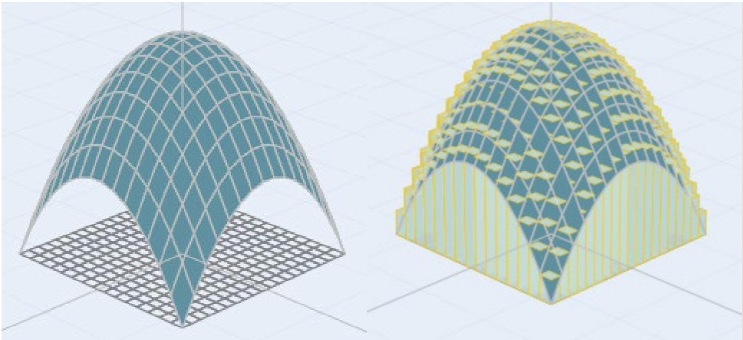
$$\iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\|R\|\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k$$

2 Interpretación geométrica

Si $f(x,y)\geq 0$, la suma de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k$, es igual a la suma de los volúmenes de los n prismas rectangulares cuya base es R_k y cuya altura es $f(x_k,y_k)$. (Ver figura siguiente).

En consecuencia, la integral doble definida anteriormente representa el volumen del sólido de base R y altura $z = f(x,y)$ en cada punto de R.





Herramienta para visualizar y calcular sumas de Riemann
https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/SumasRiemannRect-JS/index.html Ver video

3 Existencia y propiedades

CONDICIONES SUFICIENTES DE INTEGRABILIDAD:
- Si f es continua en un rectángulo R, entonces es integrable en él.
- Si f es acotada en un rectángulo R y es continua en él, con excepción de un número finito de curvas suaves, entonces f es integrable en R.

PROPIEDADES:

P1. Linealidad.- La integral doble es lineal.

$$\iint_R (af(x,y) + bg(x,y))dA = a\iint_R f(x,y)dA + b\iint_R g(x,y)dA$$

P2. Aditividad del dominio de integración.- La integral doble es aditiva sobre rectángulos que tengan en común a lo sumo un segmento de recta:

$$\iint_{R_1 \cup R_2} f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA \quad , \quad si \quad \text{Área}(R_1 \cap R_2) = 0$$

P3. Acotación.- Si $f(x,y)\le g(x,y)$ en casi todos los puntos[1] de R, entonces

$$\iint_R f(x,y)dA \le \iint_R g(x,y)dA$$

P4 . Acotación modular.- Para cualquier f integrable en R,

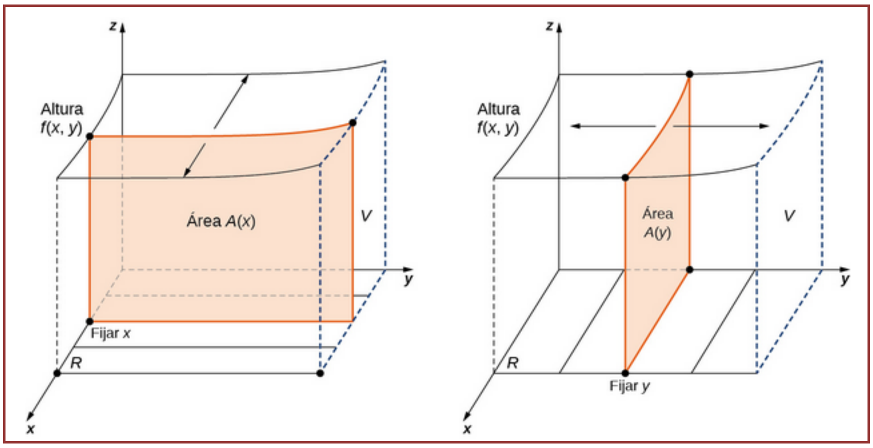
$$\left|\iint_R f(x,y)dA\right| \le \iint_R |f(x,y)|dA$$

4 Cálculo de integrales dobles sobre rectángulos. Integrales iteradas

En la práctica una integral doble se calcula mediante dos integrales simples llamadas *integrales iteradas*.

Definición (**Integrales iteradas**).- Si f es integrable en $R=[a,b]\times[c,d]$,

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$



Estas expresiones indican que el valor de la integral doble es independiente del orden elegido para calcular las integrales iteradas. Si se integra primero en la variable x y después en la variable y, el proceso de cálculo es el siguiente:

1. Se resuelve la integral $\int_a^b f(x,y)dx$ tomando la y como constante, obteniendo como resultado una expresión $A(y)$, que depende de y.
2. Se calcula la integral $\int_c^d A(y)dy$.
3. Si se resuelve la integral cambiando el orden de integración, el proceso es análogo al anterior, pero tomando la x como constante en la primera integral y calculando la última integral en función de x.

[1]En "casi todos los puntos" significa, en todos los puntos salvo en un número finito.

5 Integral doble sobre dominios regulares.

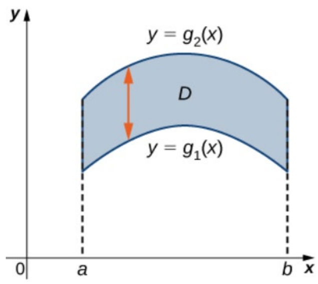
Una función $f(x,y)$ es integrable en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ si lo es en un rectángulo que contenga a D.

La definición, la interpretación geométrica, las condiciones de existencia y las propiedades de la integral doble sobre rectángulos recogidas en el apartado anterior, son aplicables a la integral doble sobre dominios regulares sin más que sustituir *R* por *D*.

Existen dos tipos de dominios regulares en $\mathbb{R}^2$: x-simple, y-simple.

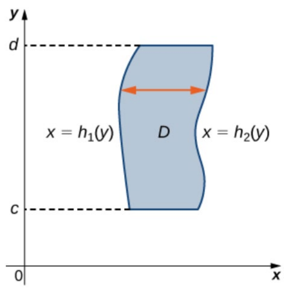
Definición (**Dominios regulares**).-

Un conjunto D del plano es **y-simple**, o describirse mediante franjas verticales, si se puede escribir como



$$D = \{(x,y) \; / \; a \le x \le b, \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

Un conjunto D del plano es **x-simple,** o describirse mediatne franjas horizontales, si se puede escribir como



$$D = \{(x,y) \; / \; c \le y \le d, \quad h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

Definición (**Integrales iteradas sobre dominios regulares**).-

- Si un conjunto D del plano es y-simple y la función $f(x,y)$ es integrable en D, entonces
$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$
- Si un conjunto D del plano es x-simple y la función $f(x,y)$ es integrable en D, entonces
$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$

Herramienta para calcular integrales dobles iteradas sobre dominios regulares
https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/IntDoblesDRegulares-JS/index.html Ver video

6 Algunas interpretaciones de la integral doble

Volumen. El volumen del sólido H definido inferiormente por la gráfica $z = f\left(x,y\right)$ y superiormente por la gráfica de $z = g\left(x,y\right)$ para $\left(x,y\right) \in D \subset \mathbb{R}^2$, es la integral

$$Volumen\left(H\right) = \iint_D \left[g\left(x,y\right) - f\left(x,y\right)\right]dA$$

Valor medio. Se llama valor medio o valor promedio integral de $f(x,y)$ en *D* al número

$$\frac{\int\int_D f(x,y)dA}{área(D)}$$

Área. Si $D \subset \mathbb{R}^2$, el área de D es

$$Área(D) = \int\int_D dA$$

Masa. Si una lámina L ocupa la región D del plano y está compuesta por un material de densidad superficial $\delta(x,y)$, su masa es

$$Masa(L) = \int\int_D \delta(x,y)dA$$

Para la lámina anteriormente descrita, la densidad de masa media es

$$Densidad\ media(L) = \frac{\int\int_D \delta(x,y)dA}{Área(D)}$$

Temperatura media. Si una lámina L ocupa la región D del plano y la temperatura en cada punto viene dada por $T(x,y)$, la temperatura media de la lámina es

$$Temperatura\ media(L) = \frac{\int\int_D T(x,y)dA}{Área(D)}$$

7 Simetrías en integrales dobles

El cálculo de la integral doble se simplifica cuando existen simetrías en el dominio y en la función. Veamos dos casos:

Dominio simétrico respecto del eje OY

- Si $f(x,y)$ es impar en x, es decir verifica, $f(-x,y)=-f\left(x,y\right)$: $\iint\limits_{D} f(x,y)dA=0$

- Si $f(x,y)$ es par en x, es decir verifica, $f(-x,y)=f\left(x,y\right)$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dA = 2\iint\limits_{D\ con\ x\geq 0} f(x,y)dA$$

Dominio simétrico respecto del eje OX

- Si $f(x,y)$ es impar en y, es decir verifica, $f(x,-y)=-f\left(x,y\right)$: $\iint\limits_{D} f(x,y)dA=0$

- Si $f(x,y)$ es par en y, es decir verifica, $f(x,-y)=f\left(x,y\right)$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dA = 2\iint\limits_{D\ con\ y\geq 0} f(x,y)dA$$

8 Cambio de variables en integrales dobles

TEOREMA CAMBIO DE VARIABLE EN INTEGRALES DOBLES
Hipótesis:
- las regiones R y D de los planos XY y ST respectivamente, están relacionadas por las ecuaciones $x=x(s,t)\ ,\ y=y(s,t)$
- esa relación entre R y D es biyectiva (cada punto de R es imagen de uno y sólo un punto de D).
- las funciones del cambio, $x(s,t)$ e $y(s,t)$, admiten derivadas parciales continuas en D.
- la función $f(x,y)$ es continua en la región R.

Tesis:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_D f(x(s,t),y(s,t))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|dsdt$$

siendo, $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix} x'_s & x'_t \\ y'_s & y'_t \end{vmatrix}$$

OBSERVACIONES:

- El factor $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$ se llama **jacobiano del cambio**

- El valor absoluto del jacobiano da la relación entre un elemento diferencial de área del plano XY y un elemento diferencial del plano ST :

$$dxdy = |\,J\,|\,dsdt$$

- Puesto que tanto $dxdy$ como $dsdt$ son positivos, el cociente entre ellos es positivo: recuerda que el jacobiano siempre se introduce en la integral en valor absoluto.
- Si el cambio de variables fuera el inverso, es decir, el que escribe las coordenadas s y t en función de x e y, entonces el jacobiano sería el inverso, es decir $\dfrac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}}$

Herramienta para mostrar la interpretación geométrica del jacobiano
https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Jacobiano-JS/index.html

Ver video

9 Cambio a coordenadas polares

Este es uno de los cambios de variables más habituales. Las fórmulas del cambio son

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

establecidas de forma biyectiva entre dos conjuntos S y R, siendo r positiva. El jacobiano es

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Resultando,

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int\int_S f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r dr d\theta$$

Herramienta para calcular integrales dobles sobre dominios en polares
https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/IntDoblesPolares-JS/index.html

Ver video

RELACIÓN ENTRE COORDENADAS POLARES Y CARTESIANAS

Si se hace coincidir el polo del sistema de coordenadas polares con el origen del sistema de coordenadas cartesianas y el eje polar con el eje OX, se obtiene la siguiente relación entre las coordenadas cartesianas (x,y) de un punto del plano y sus respectivas coordenadas polares (r,θ):

- Conversión de polares a cartesianas $x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$
- Conversión de cartesianas a polares

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\ , \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad \left(-\pi < \theta \le \pi, \quad \operatorname{signo}\theta = \operatorname{signo} y\right)$$

Definición (**Ecuación polar**).- Una curva en polares vendrá dada por una ecuación del tipo $r = r(\theta)$ ó $F(r,\theta) = 0$, con $\theta \in \mathrm{I}$.

Ecuaciones de curvas en polares

Curva	Ecuación cartesiana (variables: x, y)	Ecuación polar (variables: r, θ)
Circunferencia de centro el polo y radio a	$x^2 + y^2 = a^2$	$r = a$
Semirrecta que pasa por el polo y de pendiente $m = \operatorname{tg}\alpha$	$y = mx$	$\theta = \alpha, \quad \text{si} \quad y \geq 0$ $\theta = \alpha - \pi, \quad \text{si} \quad y < 0$ con $0 \leq \alpha \leq \pi$
Recta vertical	$x = a$	$r\cos\theta = a$
Recta horizontal	$y = b$	$r \operatorname{sen}\theta = b$

INTEGRAL TRIPLE

10 Integral triple sobre cajas

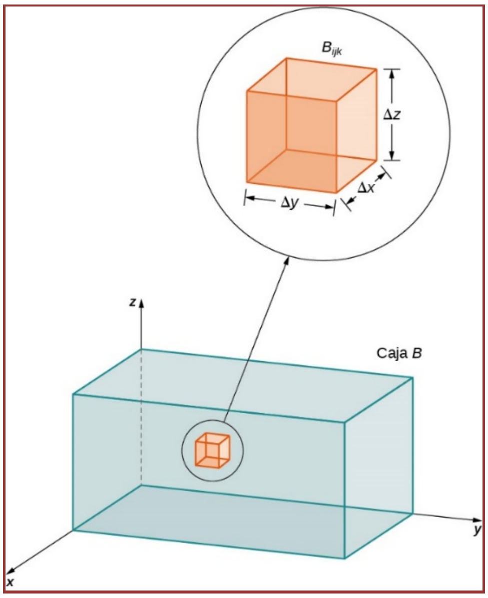
Definición (**Caja y Partición**).-

- **Caja del espacio** $\mathbb{R}^3$ es el conjunto
$$H = [a,b]\times[c,d]\times[e,j] = \{(x,y,z) \,/\, a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ e \leq z \leq j\}$$

- **Partición P de una caja** H es el conjunto de subcajas generadas al tomar una partición en $[a,b]$, otra en $[c,d]$ y otra en $[e,j]$. Si hay n subcajas y cada una de ellas se denota por H_k, tendremos $H = \bigcup_{k=1}^{n} H_k$

- Llamaremos **norma de la partición**, y la designaremos por $\|H\|$ a la longitud de la diagonal más larga de las subcajas de la partición de H.

Definición (**Suma de Riemann**).- Llamaremos suma de Riemann de la función $f(x,y,z)$ definida en la caja H para la partición $\{H_k\}_{k=1}^{n}$ a la suma, $\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k$ donde (x_k,y_k,z_k) es un punto cualquiera tomado en la subcaja H_k y ΔV_k es el volumen de H_k.



Definición (**Integral triple**).- Sea f una función de tres variables definida sobre una caja H. Si para toda partición de H, tal que la norma de la partición tiende a cero, existe el límite

$$\lim_{\substack{\|H\|\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$$

se dice que f es integrable en H. Además el valor de éste límite es la integral triple de f sobre H y se denota por

$$\iiint_H f(x,y,z)dV = \lim_{\substack{\|H\|\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$$

11 Existencia y propiedades

CONDICIONES SUFICIENTES DE INTEGRABILIDAD:

- Si f es continua en una caja H, entonces es integrable sobre H.
- Si f es acotada en una caja H y es continua en ella, con excepción de un número finito de superficies suaves contenidas en H, entonces f es integrable en H.

PROPIEDADES:

P1. Linealidad.- La integral triple es lineal.

$$\iiint_H (af(x,y,z)+bg(x,y,z))dV = a\iiint_H f(x,y,z)dV + b\iiint_H g(x,y,z)dV$$

P2. Aditividad del dominio de integración.- La integral triple es aditiva sobre cajas que tengan en común como mucho una porción de cara:

$$\iiint_{H_1 \cup H_2} f(x,y,z)dV = \iiint_{H_1} f(x,y,z)dV + \iiint_{H_2} f(x,y,z)dV$$

$$\iiint_{H_1 \cup H_2} f(x,y,z)dV = \iiint_{H_1} si \ Volumen(H_1 \cap H_2) = 0$$

P3. Acotación.- Si $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$ en casi todos los puntos de H, entonces

$$\iiint_H f(x,y,z)dV \leq \iiint_H g(x,y,z)dV$$

P4. Acotación modular.- Para cualquier f integrable en H,

$$\left|\iiint_H f(x,y,z)dV\right| \leq \iiint_H |\ f(x,y,z)\ |dV$$

12 Cálculo de integrales triples sobre cajas: integrales iteradas

Definición (Integrales iteradas).- Si f es integrable en $H = [a,b] \times [c,d] \times [e,j]$,

$$\iiint_H f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^j f(x,y,z)dzdydx$$

La expresión de la derecha representa el proceso que comienza integrando la función f respecto de z, tomando x e y como constantes, resultando una función de dos variables. La integración iterada de esa función, primero respecto de y y luego respecto de x da como resultado el valor de la integral triple. Este orden de integración es el expresado en la integral anterior, pero podríamos intercambiar las variables:

El cálculo de una integral triple se reduce a calcular una integral simple y una doble. Una vez elegida la variable para la primera integración, la integral doble se extenderá al dominio contenido en el plano de las otras variables; podemos escribir

$$\iiint_H f(x,y,z)dV = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \left[\int_e^j f(x,y,z)dz\right]dA$$

$$\iiint_H f(x,y,z)dV = \iint_{[a,b]\times[e,j]} \left[\int_c^d f(x,y,z)dy\right]dA$$

$$\iiint_H f(x,y,z)dV = \iint_{[c,d]\times[e,j]} \left[\int_a^b f(x,y,z)dx\right]dA$$

Existen seis órdenes distintos de integración, pues cada una de las expresiones anteriores origina dos formas de resolver las correspondientes integrales dobles.

13 Integral triple sobre dominios regulares. Integrales iteradas

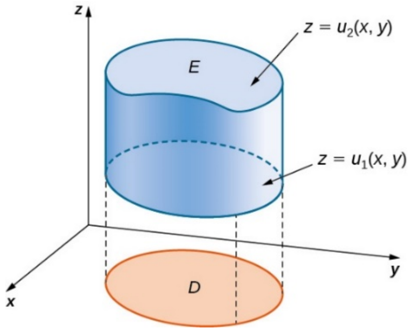
Una función $f(x,y,z)$ es **integrable** en un conjunto $V \subset \mathbb{R}^3$ si lo es en una caja que contenga a V.

La definición, las condiciones de existencia y las propiedades de la integral triple sobre cajas recogidas en el apartado anterior, son aplicables a la integral triple sobre dominios regulares sin más que sustituir *H* por *V*.

Existen tres tipos de dominios regulares en $\mathbb{R}^3$: x-simple, y-simple, z-simple. Un dominio puede ser de los tres tipos simultáneamente.

Se describe el proceso de cálculo para el caso de dominio z-simple, los restantes casos se deducen de éste sin dificultad.

Definición (**Dominio regular z-simple**).- Un conjunto H del espacio es z-simple si se puede escribir como,



$$H = \{(x,y,z) \,/\, (x,y) \in R_{xy}, \quad u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$$

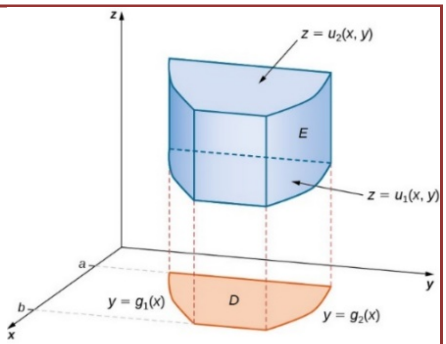
siendo además D un dominio regular.

Definición (**Integrales iteradas sobre un dominio regular z-simple**).-
Si un conjunto H del espacio es z-simple y la función $f(x,y,z)$ es integrable en H, entonces

$$\iiint_H f(x,y,z)dV = \iint_{R_{xy}} \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dA$$

Caso 1. Si Rxy es x simple

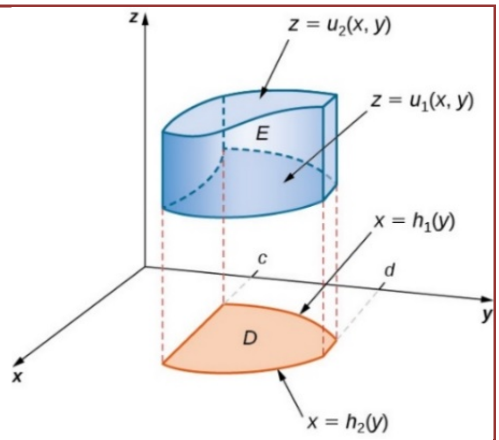
$$R_{xy} = \{(x,y) \,/\, a \le x \le b, \; g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$



La integral es

$$\iiint_H f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

Caso 2. Si Rxy es y simple



$R_{xy} = \{(x,y) \,/\, c \le y \le d,\ h_1(x) \le y \le h_2(x)\}$

La integral anterior es

$$\iiint_H f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy$$

Según sea la forma de H y de f, puede ser recomendable utilizar otro orden de integración.

14 Interpretaciones de la integral triple

Volumen.- Si el sólido H se puede escribir como el conjunto

$$H = \{(x,y,z) \,/\, a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x), \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\}$$

entonces

$$Volumen(H) = \iiint_H dV = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} dzdydx$$

Valor medio.- Se llama valor medio o valor promedio integral de $f(x,y,z)$ en *H* al número

$$\frac{\iiint_H f(x,y,z)dV}{Volumen(H)}$$

Masa.- Si un sólido S ocupa la región H del espacio y está compuesto por un material de densidad $\delta(x,y,z)$, su masa es

$$Masa\left(S\right) = \iiint_H \delta(x,y,z)dV$$

Para el sólido anteriormente descrito, la densidad de masa media se calcula como

$$Densidad\ media(S)=\frac{\iiint_H \delta(x,y,z)dV}{Volumen\left(H\right)}$$

Temperatura media.- Si un sólido S ocupa la región H del espacio y la temperatura en cada punto viene dada por $T(x,y,z)$, la temperatura media del sólido es

$$Temperatura\ media(S)=\frac{\iiint_H T(x,y,z)dV}{Volumen(H)}$$

15 Simetría integrales triples

El cálculo de la integral triple se simplifica cuando existen simetrías en el dominio y en la función. Veamos tres casos:

Dominio simétrico respecto del plano ZY

- Si $f(x,y,z)$ es impar en x, es decir verifica, $f(-x,y,z)=-f\left(x,y,z\right)$

$$\iiint_H f(x,y,z)dV=0$$

- Si $f(x,y,z)$ es par en x, es decir verifica, $f(-x,y,z)=f\left(x,y,z\right)$

$$\iiint_H f(x,y,z)dV = 2\iint_{H\ con\ x\geq 0} f(x,y,z)dV$$

Dominio simétrico respecto del plano ZX

- Si $f(x,y,z)$ es impar en y, es decir verifica, $f(x,-y,z)=-f\left(x,y,z\right)$

$$\iiint_H f(x,y,z)dV=0$$

- Si $f(x,y,z)$ es par en y, es decir verifica, $f(x,-y,z)=f\left(x,y,z\right)$

- $$\iiint_H f(x,y,z)dV = 2\iint_{H\ con\ y\geq 0} f(x,y,z)dV$$

Dominio simétrico respecto del plano XY

- Si $f(x,y,z)$ es impar en z, es decir verifica, $f(x,y,-z)=-f\left(x,y,z\right)$

$$\iiint_H f(x,y,z)dV=0$$

- Si $f(x,y,z)$ es par en y, es decir verifica, $f(x,y,-z)=f\left(x,y,z\right)$

$$\iiint_H f(x,y,z)dV = 2\iint_{H\ con\ z\geq 0} f(x,y,z)dV$$

16 Cambio de variables en integrales triples

El teorema sobre cambio de variable en integrales triples se obtiene del visto para integrales dobles con las modificaciones obvias resultantes de añadir una variable más. El jacobiano del cambio de variables

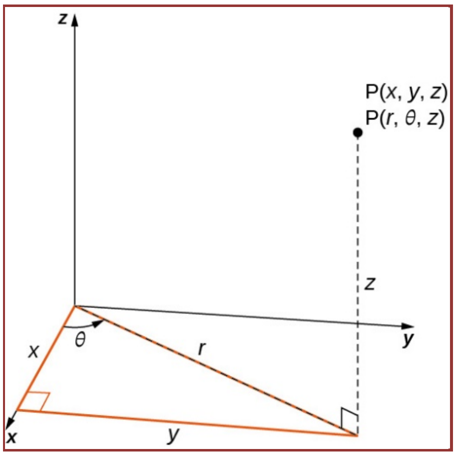
$$x = x(u,v,w) \quad , \quad y = y(u,v,w) \quad , \quad z = z(u,v,w)$$

es el determinante $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$

RELACIÓN ENTRE COORDENADAS CILÍNDRICAS Y CARTESIANAS

Las coordenadas cilíndricas se obtienen utilizando coordenadas polares en uno de los planos coordenados, de forma que son las apropiadas para describir conjuntos del espacio, como el interior de un cilindro, que tienen un eje de simetría. Si ese eje de simetría es el eje OZ, las coordenadas cartesianas se escribirán del siguiente modo en función de las cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$



Cambio a coordenadas cilíndricas

Para el cambio de variables $x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z$

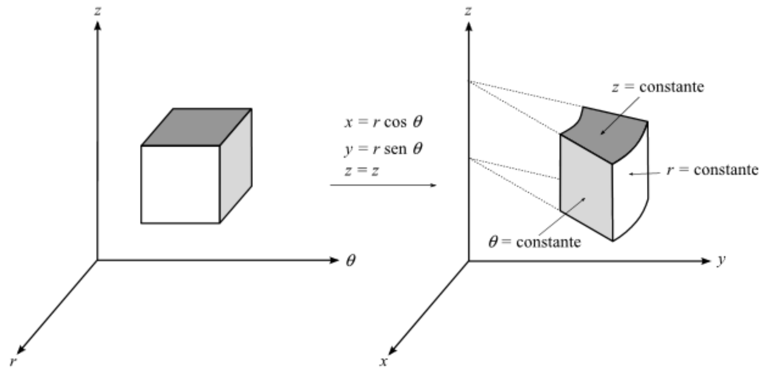
el jacobiano es

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Y el elemento diferencial de volumen, $dV = dxdydz$, en cilíndricas es $dV = rdrd\theta dz$ puesto que r es no negativo.

Las superficies de ecuación más sencilla en coordenadas cilíndricas son:

- $r = a$ es el cilindro de eje $0Z$ y radio a;
- $\theta = b$ es el semiplano que contiene al eje $0Z$ y forma ángulo b con el plano XZ, $x > 0$
- $z = c$ es un plano perpendicular al eje $0Z$.

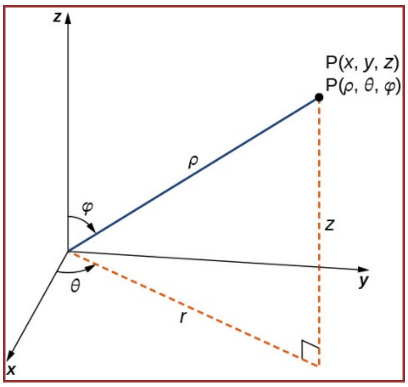


Herramienta para describir dominios en coordenadas cilíndricas
https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/IntDoblesPolares-JS/index.html

RELACIÓN ENTRE COORDENADAS ESFÉRICAS Y CARTESIANAS

Las coordenadas esféricas son útiles en sólidos acotados por esferas, planos que pasan por el eje $0Z$ y conos con ese eje. Es decir, aquellos volúmenes en los que existe un centro de simetría.

Las fórmulas del cambio son: $\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$



Las variables del sistema representan las siguientes magnitudes geométricas:

- ρ distancia del punto al origen de coordenadas, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$
- θ ángulo de variación respecto del eje $0X$ positivo, se toma entre 0 y 2π ;
- ϕ ángulo de variación respecto del eje $0Z$ positivo, se toma entre 0 y π .

Cambio a coordenadas esféricas

Para el cambio de variables $x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho\cos\phi$

el jacobiano es

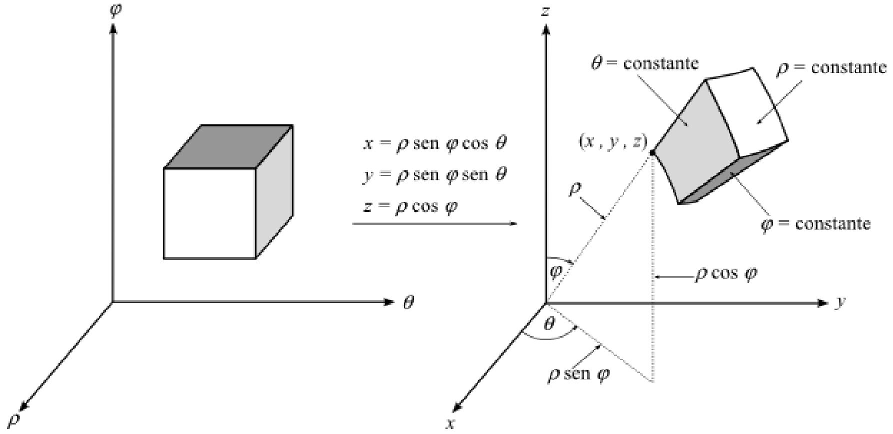
$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

El elemento diferencial de volumen $dV = dxdydz$ en esféricas es

$$dV = \rho^2 \left|\operatorname{sen}\phi\right| d\rho d\theta d\phi$$

Las superficies de ecuación más sencilla en coordenadas esféricas son:

- $\rho = a$ es la esfera de centro el origen y radio a
- $\theta = b$ es el semiplano que contiene al eje $0Z$ y forma ángulo b con el plano XZ , $(x > 0)$
- $\phi = c$ es un semicono de eje $0Z$.



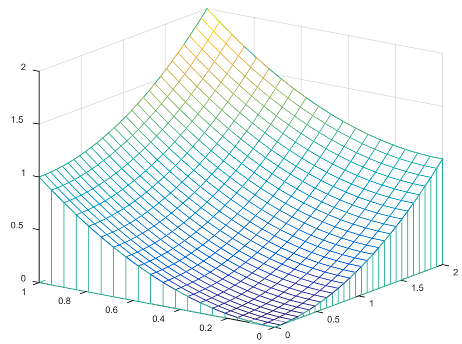
Herramienta para describir dominios en coordenadas esféricas
https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/CoordEsfericas-JS/index.html

Ejercicios propuestos

1

a) Aproxima el volumen del sólido limitado inferiormente por el rectángulo $[0,2]\times[0,1]$ del plano XY y superiormente por la superficie $z=\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)$, mediante una suma doble de Riemann sobre una partición regular de 10×5 celdas, tomando el valor de la función en el punto medio de cada celda.
b) Comprueba la calidad de la aproximación, calculando el valor exacto de la integral.
$f^{iv}(0)=1>0$.

Solución: a) Vaprox= $0,830$
b) Vexacto = $0,833$



2

Para cada una de las siguientes integrales dibuja la región de integración, escribe la integral equivalente cambiando el orden de integración y encuentra su valor utilizando el orden que consideres más conveniente:

$$A=\int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}(\operatorname{sen} x+\cos y)\,dx\,dy$$

$$B=\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{x} x\operatorname{sen} y\,dy\,dx$$

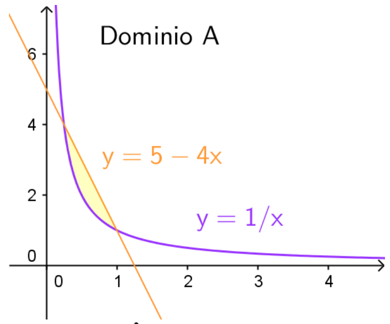
$$C=\int_{1}^{2}\int_{y}^{y^2} dx\,dy$$

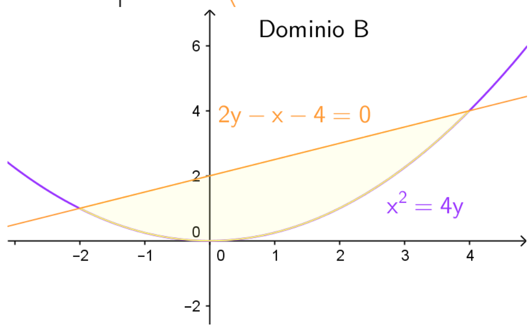
$$D=\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{y}}^{1} dA \qquad E=\int_{-2}^{1}\int_{x^2+4x}^{3x+2} dA$$

Solución: $A=2\pi$; $B=2+\pi^2/2$; $C=5/6$; $D=1/3$; $E=9/2$

3

Se consideran los dominios de $\mathbb{R}^2$, definidos en las gráficas siguientes:





Se pide:

1. Define estos dominios utilizando desigualdades, como regiones x-simples e y-simples.
2. Calcula sobre cada dominio la integral I indicada, utilizando los dos órdenes de integración posibles. Comprueba que el valor de las integrales no depende del orden de integración utilizado.
$$I_A=\iint_A\left(x-3y^2\right)dA$$
$$I_B=\iint_B\left(x^2-3y\right)dA$$

Solución: a) $I_A=-261/32$ b) $I_B=-18$

4

Se consideran las dos regiones del plano siguientes:

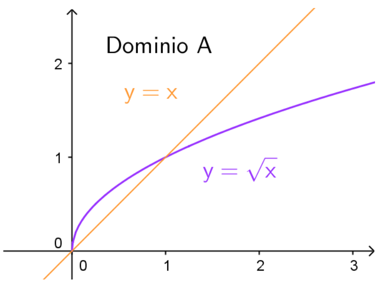
$$A=\left\{(x,y)\,/\;0\le x\le 1,\;\; x\le y\le\sqrt{x}\right\}$$
$$B=\left\{(x,y)\,/\;0\le y\le 2,\;\; -\sqrt{2y}\le x\le\sqrt{2y}\right\}$$

1. Defínelas cambiando el orden (si viene definida como x-simple, escribirla como y-simple, y viceversa).
2. Calcula, a mano, el área de cada una.
3. Utiliza Matlab para representar las regiones y comprobar el valor del área.
4. Supondremos que estas regiones son láminas (sin grosor) de un material de densidad de masa proporcional en cada punto a la distancia del punto al eje $y=0$.

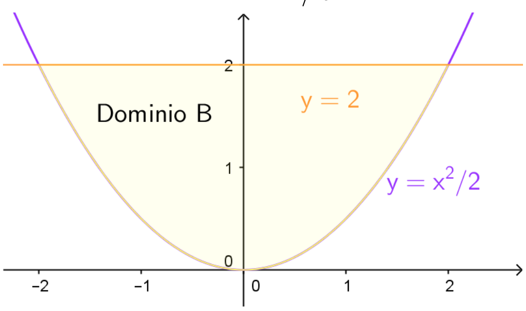
Encuentra la masa de cada lámina, primero a mano y después con Matlab.

5. Calcula el valor medio de la función densidad en cada placa y los puntos de la placa en los que se alcanza ese valor.
6. Utiliza Matlab para representar sobre cada una de las regiones A y B, los puntos donde se alcanza el valor medio de la función de densidad.

Solución: a) y b)



área A = $1/6$



área B = $16/3$

d) masa A = $\dfrac{1}{12}k$; masa B = $\dfrac{32}{5}k$; k es la constante de proporcionalidad.

e) densidad media de A: $\dfrac{1}{2}k$; en los puntos

$$\left\{(x,y)\,/\ \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2},\quad y=\frac{1}{2}\right\}$$

densidad media de B: $\dfrac{6}{5}k$; en los puntos

$$\left\{(x,y)\,/\,-2\sqrt{\frac{3}{5}}\le x\le 2\sqrt{\frac{3}{5}}\ ,\ y=\frac{6}{5}\right\}$$

5

Se considera la región del plano D, acotada por las rectas $y=x$, $y=2x$, $x=1$ y $x=2$. Se pide:

a) Represéntala gráficamente y defínela como región x-simple y también como región y-simple.

b) Calcula a mano el área.

c) Comprueba los apartados a) y b), utilizando Matlab para representar la región y para calcular el área.

d) Calcula la temperatura media de una lámina que ocupa la región D, sabiendo que la temperatura en cada punto viene dada por $T(x,y)=x\,/\,y$ y encuentra los puntos de la placa donde se alcanza esta temperatura media.

e) Utiliza Matlab para representar el rectángulo $[1,2]\times[1,4]$ coloreado según la función temperatura y destaca sobre él el contorno de la lámina y los puntos que están a temperatura media.

Solución: a) Región y-simple:

$$D=\left\{(x,y)\,/\,1\le x\le 2,\quad x\le y\le 2x\right\}$$

Región x-simple:

$$D=\left\{(x,y)\,/\,1\le y\le 2,\quad 1\le x\le y\right\}\cup$$
$$\left\{(x,y)\,/\,2\le y\le 4,\quad \frac{y}{2}\le x\le 2\right\}$$

b) 3/2 d) Temperatura media $=\log 2$;

Puntos a temperatura media:

$$\left\{(x,y)\,/\,y=\frac{x}{\log 2},\ 1\le x\le 2\right\}$$

6

Sea D la región del plano limitada inferiormente por la gráfica de $y=\sqrt{x}$ y superiormente por $y=2$ para $0\le x\le 4$.

a) Escribe un fichero para dibujar con Matlab la región D definida por

$$D=\{(x,y)\,/\ 0\le x\le 4,\quad \sqrt{x}\le y\le 2\}$$

b) Define la región en el otro orden, es decir, de la forma

$$D=\{(x,y)\,/\,c\le y\le d,\quad x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$$

c) Una placa delgada plana ocupa la región D y la temperatura en cada uno de sus puntos es $T(x,y)=xy$. Calcula a mano el valor medio de la temperatura en la placa.

d) Utiliza Matlab para representar el rectángulo $[0,4]\times[0,2]$ coloreado según la función temperatura y destaca sobre él el contorno de la placa, D, y los puntos que están a temperatura media. Comprueba que esos puntos están sobre un arco de hipérbola.

Solución:

a) $D=\{(x,y)\,/\,0\le y\le 2,\quad 0\le x\le y^2\}$

c) Temperatura media =2

d) Puntos a temperatura media:

$$\left\{(x,y)\ /\ y=\frac{2}{x},\quad 1\le x\le \sqrt[3]{4}\right\}$$

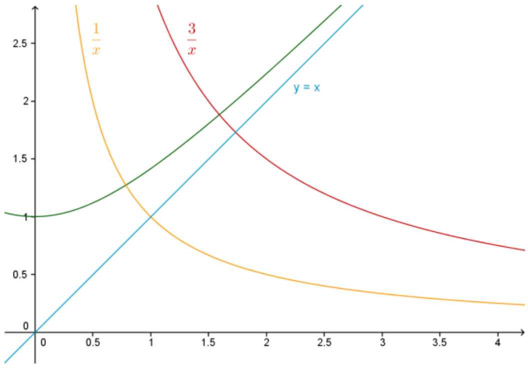
7 Calcula la siguiente integral doble

$$I=\iint_S (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

donde S es la región del primer cuadrante del plano XY acotada por las curvas $xy=1$, $xy=3$, $y=x$ e $y^2-x^2=1$. Dada la forma de la región S y la del integrado, es conveniente realizar el cambio de variables

$$u=xy\quad,\qquad v=y^2-x^2$$

Solución: $I=\log 2\,/\,2$



8 Se consideran las siguientes regiones del plano, donde a es un número real positivo:

$$A=\left\{(x,y)/\quad -a\le x\le a\,,\quad 0\le y\le\sqrt{a^2-x^2}\ \right\}$$

$$B=\left\{(x,y)/\quad -a\le y\le a\,,\quad 0\le x\le\sqrt{a^2-y^2}\ \right\}$$

$$C=\left\{(r,\theta)/\quad 0\le\theta\le\frac{3\pi}{4}\,,\quad 0\le r\le a\ \right\}$$

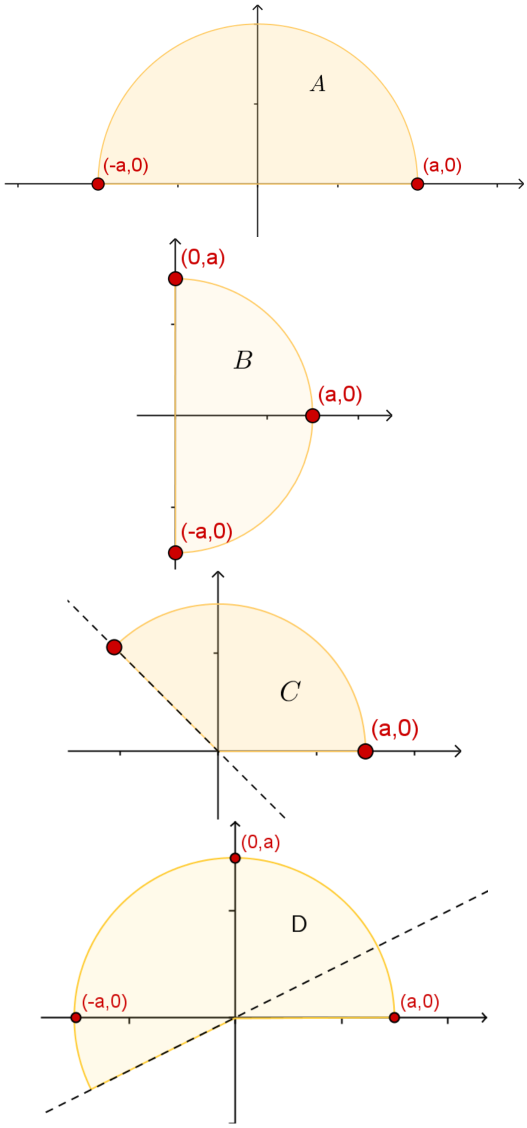
$$D=\left\{(r,\theta)/\quad 0\le\theta\le\frac{7\pi}{6}\,,\quad 0\le r\le a\ \right\}$$

a) Represéntalas gráficamente.

b) Supón que una función $f(x,y)$ es integrable en cualquier región del plano, es positiva en el semiplano $x<0$ y además es simétrica impar respecto del eje $x=0$. Ordena de menor a mayor las integrales de $f(x,y)$ sobre A, B, C y D.

c) Sustituye la función $f(x,y)=-x\cdot e^{y}$, que cumple las características del apartado b) y calcula las integrales utilizando Matlab. Elige también el valor de $a=2$.

Solución: a) Las regiones son sectores del círculo $x^2+y^2=a^2$



b) $I_B<I_C<I_A<I_D$.

c) Se resuelven todas en polares:

$I_A=0$, $I_B=-7{,}7951$, $I_C=-3{,}4075$, $I_D=0{,}9430$

9 Halla las siguientes integrales mediante el cambio a coordenadas polares y representa gráficamente la región de integración

a) $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)\,dA$

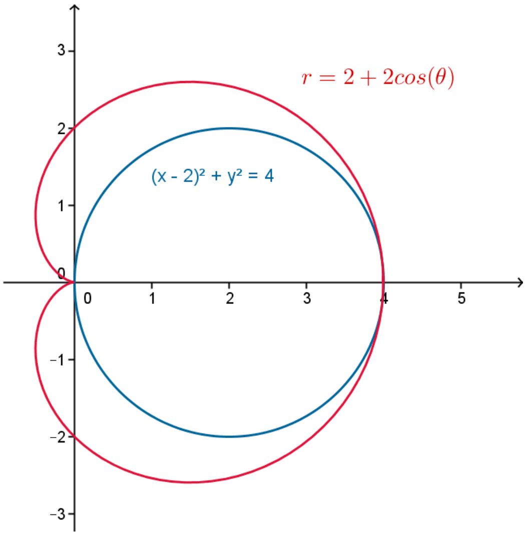
b) $\displaystyle\int_0^{a/\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{a^2-y^2}}x\,dA$

Solución: a) $\pi a^4/8$; b) $\sqrt{2}a^3/6$

10 Utilizando coordenadas polares, define mediante desigualdades, representa y calcula el área de las regiones siguientes:

a) Región S_1, comprendida entre las circunferencias $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$ y las rectas $y=x$, $y=0$.

b) Región S_2, interior a la cardioide $r=2+2\cos\theta$ y exterior a la circunferencia $(x-2)^2+y^2=4$.



Solución: a)

$$S_1=\left\{(r,\theta)\,/\,0\le\theta\le\frac{\pi}{4},\ 2\cos\theta\le r\le 4\cos\theta\right\};$$

área de $S_1=\dfrac{3}{4}(\pi+2)$

b)

$$S_2=\left\{(r,\theta)\,/\ \ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ \ 4\cos\theta\le r\le 2+2\cos\theta\right\}$$

$$\cup\left\{(r,\theta)\,/\ \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi,\ \ 0\le r\le 2+2\cos\theta\right\}$$

; área de $S_2=2\pi$

11 (a) Prepara una función Matlab que tenga como argumentos de entrada una función de $\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)$, los extremos $a,\ b,\ c,\ d,\ h,$ y j de una caja $[a,b]\times[c,d]\times[h,j]$ y una partición de la caja definida por el número de subintervalos en cada eje: n,m y p. Como salida de la función se obtendrá la suma de Riemann de f en la caja, tomando como puntos para evaluar la función, los puntos medios de los subintervalos en cada coordenada. La función se dará como string (carácter). Puedes seguir los siguientes pasos:

- generar incrementos
  `inc=[b-a,d-c,j-h]./[n,m,p];`
- generar vector de x
  `vx=a+inc(1)/2:inc(1):b-inc(1)/2;`
- generar vector de y
  `vy=c+inc(2)/2:inc(2):d-inc(2)/2;`
- generar vector de z
  `vz=h+inc(3)/2:inc(3):j-inc(3)/3;`
- generar malla con meshgrid
  `[X,Y,Z]=meshgrid(vx,vy,vz);`
- vectorizar f
- (con los comandos vectorize (inline(f))
  `f=vectorize(inline(f));`
- evaluar f sobre la malla
  `val=f(X,Y,Z);`
- calcular la suma de Riemann
  `suma=sum(val(:))*prod(inc)`

c) Comparar los resultados obtenidos con las sumas de Riemann (tomando 100^3 cajas) y con la integración simbólica para las tres integrales:

$$I_1=\int_{-1}^{2}\int_{2}^{4}\int_{0}^{\pi}(x+y)e^{\operatorname{sen}(z)}dzdydx$$

$$I_2=\int_{4}^{5}\int_{0}^{1}\int_{0}^{\pi}x\sqrt{1+\cos^2(yz)}\,dzdydx$$

$$I_3=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$$

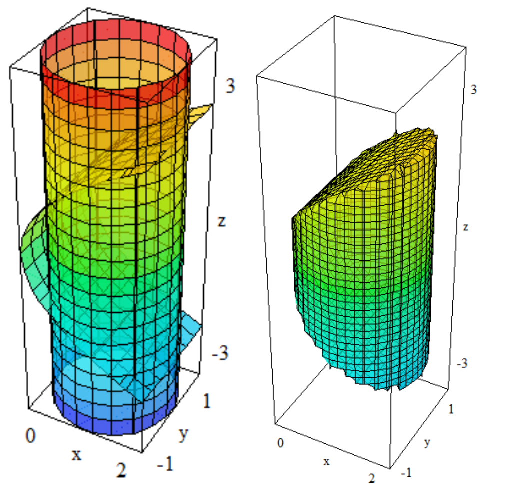
Solución: b) Con las sumas de Riemann se obtiene,

$I_1=130{,}385646$, $I_2=17{,}835264$, $I_3=0{,}960582$

Con el cálculo simbólico se obtiene,

$I_1=130{,}383918$, $I_2=17{,}835288$, $I_3=0{,}960592$

12 a) Dibuja, utilizando Matlab o Dpgraph la porción del cilindro $x^2+y^2=2x$ entre $z=-3$ y $z=3$ y sobre la misma figura una porción del cilindro parabólico $z^2=2x$.



b) Calcula, utilizando el paquete simbólico de Matlab, el volumen del sólido H limitado entre las dos hojas de $z^2 = 2x$ (una hoja se produce con z negativo y la otra con z positivo) y el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

c) Intenta calcular con Matlab, utilizando coordenadas polares, el volumen del sólido limitado por $x^2 + y^2 = x$ entre las dos hojas de $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$. Verás que Matlab te devuelve un resultado simbólico mediante funciones elípticas, ello es debido a que la integral en la variable t no tiene una primitiva elemental. Calcula tú, de forma aproximada, el valor de esta segunda integral iterada en la variable t.

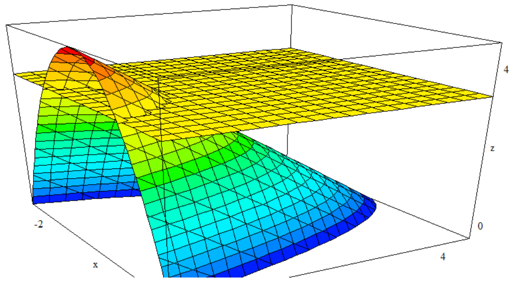
Solución: b) Volumen=128/15

c) Volumen $\approx$ 1,834

13

Halla, mediante una integral triple, el volumen del sólido del primer octante limitado inferiormente por el plano $z = 3$ y superiormente por la superficie $z = 4 - x^2 - y$.

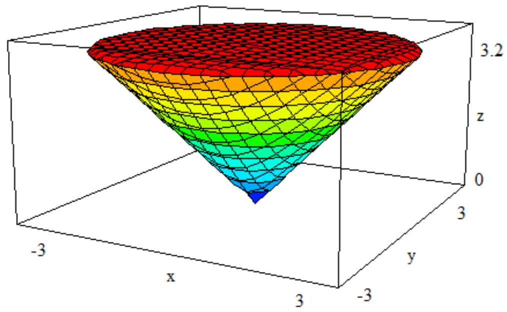
Solución: Volumen $= 4/15$



14

Si H es el sólido limitado inferiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y superiormente por $z = 3$, calcula

$I = \iiint_H (x + y - 2z)dV$



Solución: $I = -81\pi/2$

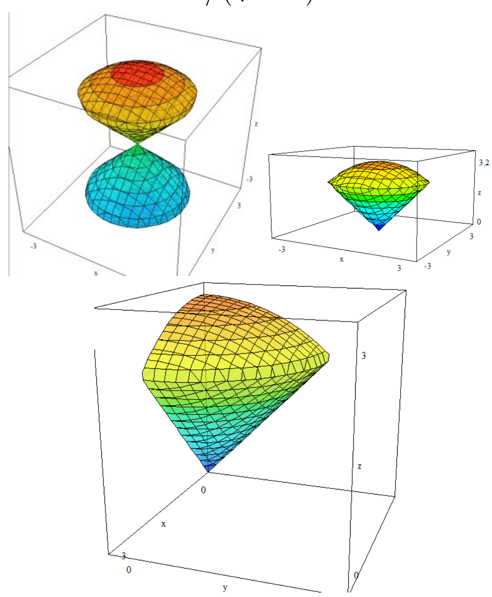
15

a) Halla mediante una integral triple el volumen del sólido del primer octante limitado por los planos coordenados, por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

b) Calcula la densidad media de dicho sólido, sabiendo que su densidad de masa viene dada por la función

$$\delta(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Solución: a) Volumen $= 8\pi(\sqrt{2} - 1)/3$ b) Densidad media $= 1/(\sqrt{2} - 1)$



16

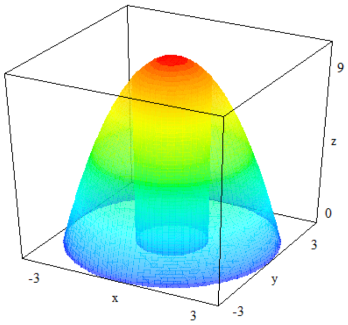
a) Calcula mediante una integral triple el volumen del sólido H, limitado superiormente por el paraboloide

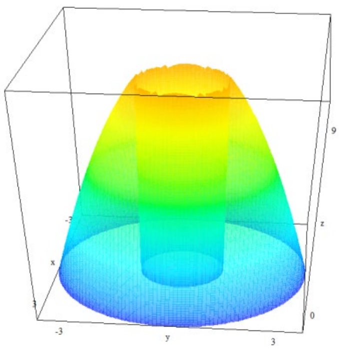
$z = 9 - x^2 - y^2$, inferiormente por $z = 0$ y que es exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

b) Encuentra la temperatura media de H, sabiendo que la temperatura en cada punto viene dada por la distancia del punto al eje OZ.

Solución: a) Volumen $= 32\pi$

b) Temperatura media=37/20





17 a) Expresa en coordenadas esféricas las ecuaciones de las superficies siguientes:

S1: el cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

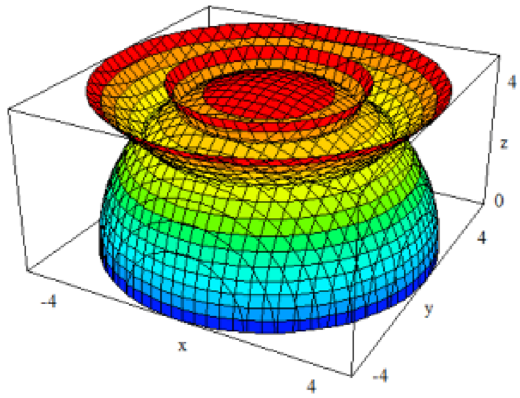
S2: el cono de ecuación $z = \sqrt{3\left(x^2 + y^2\right)}$

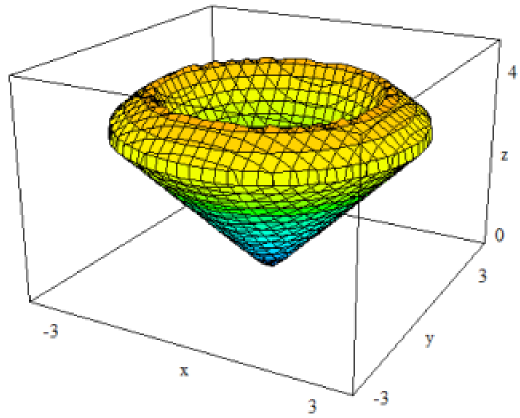
S3: la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

b) Halla el volumen del sólido H, que está comprendido entre los conos S1 y S2, y dentro de la esfera S3.

Solución: a) S1: $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$; S2: $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$; S3: $\rho = 4$

b) Volumen = $\dfrac{64\pi}{3}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$



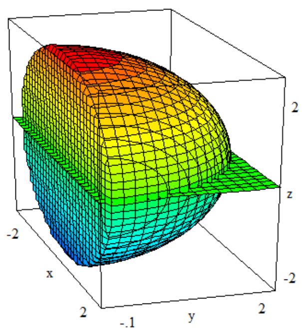


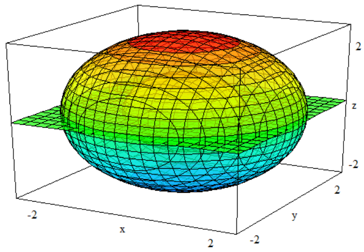
18 a) Calcula la masa del sólido H, situado en el semiespacio $y \geq 0$, que está limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y también por el plano $y = 0$, sabiendo que la densidad de masa en cada punto es

$$\delta\left(x, y, z\right) = 2\left(x + y + z\right)$$

b) Calcula el valor de la integral

$$I = \iiint_H \frac{dV}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$, siendo H la región del espacio limitada por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, donde a > b > 0.

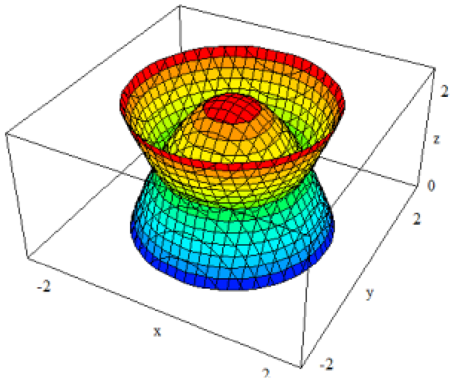


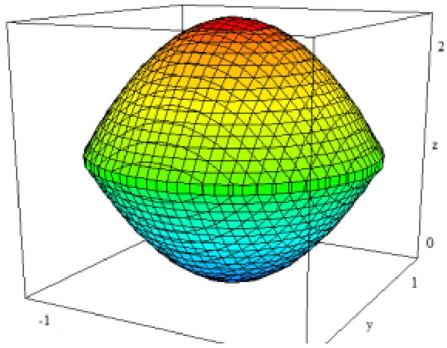


Solución: a) Masa = 8π ;

b) $I = \frac{\pi}{2}\log\left(a/b\right)$

19 Se considera el sólido H que ocupa la región limitada inferiormente por $z = x^2 + y^2$ y superiormente por $z = 2 - x^2 - y^2$. Cada punto de H está a una temperatura dada por $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2$. Calcula el volumen del sólido H y la temperatura media del sólido.





Test de autoevaluación

1 Sea la función $z = f\left(x,y\right) = x^2 - y$, definida en el rectángulo $R \equiv \left[0,1\right]\times\left[0,2\right]$. Si se ejecuta la siguiente secuencia de comandos de Matlab,

```
>> x=1/8:1/8:1;
>> y=1/8:1/8:2;
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> Z=X.^2-Y;
>> s=sum(Z(:))/64
```

¿Qué representa el valor de s?

A. Daría error.

B. Una aproximación de la integral doble de $z = x^2 - y$ sobre R.

C. Una aproximación del volumen limitado por el trozo de la gráfica de $f\left(x,y\right)$ sobre el rectángulo R, con el plano $z = 0$.

D. Ninguna de las anteriores.

2 Sea $f(x,y)$ una función continua en R^2 y tal que $\int_1^3\left(\int_2^5 f(x,y)\,dx\right)dy = M$, entonces se puede asegurar que:

A. $\int_1^3\left(\int_2^5 f(x,y)\,dy\right)dx = M$

B. $\int_2^5\left(\int_1^3 f(x,y)\,dy\right)dx = -M$

C. $\int_2^5\left(\int_1^3 f(x,y)\,dy\right)dx = M$

D. Ninguna de las anteriores.

3 ¿Cuál de las siguientes igualdades es cierta?

A. $\int_0^1\int_0^{x^2} dydx = \int_0^1\int_1^{\sqrt{y}} dxdy$

B. $\int_0^1\int_0^{x^2} dydx = \int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 dxdy$

C. $\int_0^1 \int_0^{x^2} dydx = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dxdy$

D. Ninguna de las anteriores.

4 El valor de la integral $\iint_R (x+y)\,dxdy$, donde R es el recinto plano limitado por las curvas de ecuación $xy = 4$, $x + y = 5$, es:

A. 8.

B. 9.

C. 8/9.

D. Ninguna de las anteriores.

5 Dada la función $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - 1$ y el dominio $D \equiv \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 \le 4\right\}$

En base a las propiedades de la integral doble de Riemann, sin calcular las integrales, decir cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

A. $-4\pi \le \iint_D f(x,y)\,dxdy \le 4\pi$

B. $\iint_D f(x,y)\,dxdy > 0$

C. $\iint_D f(x,y)\,dxdy = 0$

D. $\iint_D f(x,y)\,dxdy = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy$, siendo D_1 la parte del dominio D situada en el primer cuadrante.

6 El valor medio de la función $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x+y+1}}$ definida sobre el rectángulo $R \equiv [0,2]\times[0,1]$, es:

A. $2\left(3-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

B. $\frac{2}{3}\left(9-3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$

C. $2\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)$

D. Ninguna de las anteriores.

7 Cierta región de $\mathbb{R}^2$, está definida en coordenadas polares por: $\begin{cases} 0 \le r \le a \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$ ¿Cómo habrá que definirla usando coordenadas cartesianas?

A. $\begin{cases} x^2+y^2 = a^2 \\ y \ge 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x^2+y^2 \le a^2 \\ x \ge 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x^2+y^2 \le a^2 \\ y \ge 0 \end{cases}$

D. Ninguna de las anteriores.

8 ¿Cuál de los siguientes resultados es verdadero?

A. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\,dxdy = 2$

B. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\,dxdy = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \frac{2r}{\sqrt{4-r^2\operatorname{sen}^2\theta}}\,d\theta dr$

C. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\,dxdy = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \frac{r}{\cos\theta}\,d\theta dr$

D. Ninguna de las anteriores.

9 Elegir cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera:

A. $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^{2x} (x+y)\,dy\right] dx = \int_0^2 \left[\int_{y/2}^{2} (x+y)\,dx\right] dy$

B. $\displaystyle\int_0^2 \left[\int_1^{e^x} f(x,y)\,dy\right] dx = \int_1^{e^2} \left[\int_{\ln y}^{2} f(x,y)\,dx\right] dy$

C. Sea D la región del primer cuadrante tal que $1+\cos\theta \le r \le 3\cos\theta$, entonces el área de dicha región en coordenadas polares viene dada por $\int_0^{\pi/3}\int_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta} \frac{1}{\cos\theta}\,dr\,d\theta$

D. El área interior a la curva $r = 2\operatorname{sen}\theta$ cuando $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ es $\frac{\pi}{8}$

10 La ecuación en coordenadas cilíndricas $r = 2z$, representa:

A. un cono.
B. un cilindro.
C. un hiperboloide.
D. Ninguna de las anteriores.

11 Dada la región de $\mathbb{R}^3$, definida en coordenadas cartesianas por las condiciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 9 \\ x^2 + y^2 + z^2 \le 16 \end{cases}$$

¿Cómo se definiría esta misma región en coordenadas cilíndricas?

A. $\begin{Bmatrix} 0 \le r \le 4 \quad ; \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad ; \\ -\sqrt{16 - r^2} \le z \le \sqrt{16 - r^2} \end{Bmatrix}$

B. $\{3 \le r \le 4 \quad ; \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad ; \quad -4 \le z \le 4\}$

C. $\begin{Bmatrix} 3 \le r \le 4 \quad ; \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad ; \\ -\sqrt{16 - r^2} \le z \le \sqrt{16 - r^2} \end{Bmatrix}$

D. Ninguna de las anteriores.

12 ¿Cuál de las siguientes igualdades es cierta?

A. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{3-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3-x^2}}\int_0^{\sqrt{3-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$

B. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{3-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_0^{\sqrt{3-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$

C. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{3-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{-3}^{3}\int_0^{\sqrt{3-x^2}}\int_0^{\sqrt{3-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$

D. Ninguna de las anteriores.

13 Una interpretación geométrica de la integral triple $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{3} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ es:

A. Volumen de una semiesfera de radio 3
B. Volumen de un cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
C. Volumen de un sector esférico limitado inferiormente por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
D. Ninguna de las anteriores.

Soluciones del Test:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B	C	B	B	A	B	C	B	B	A	C	D	C

Ejercicios resueltos

INTEGRAL DOBLE. SUMAS DE RIEMANN

1 Aproximar el volumen del sólido situado entre el paraboloide

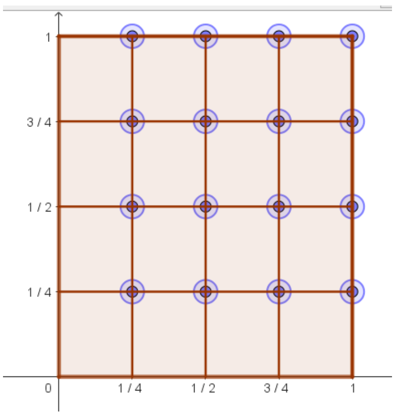
$$z = f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$$

y la región cuadrada R dada por $0 \le x \le 1$, $\quad 0 \le y \le 1$ utilizando una suma de Riemann. Hacer una partición de R formada por celdas cuadradas de lado $1/4$. Realizar el cálculo con Matlab.

Solución

Construimos la partición mencionada sobre el cuadrado R y elegimos dentro de cada celda el vértice superior derecho como punto para calcular el valor de $f\left(x,y\right)$.

Utilizando una notación con subíndices dobles, como la que se emplea en matrices, el punto de coordenadas $\left(x_{ij},y_{ij}\right)$ representa el elegido sobre el cuadrado de la i-ésima fila y j-ésima columna. Luego resulta



$$\left(x_{ij},y_{ij}\right)=\left(\frac{i}{4},\frac{j}{4}\right),\quad i,\, j=1,2,3,4$$

El valor de f en $\left(x_{ij},y_{ij}\right)$ es:

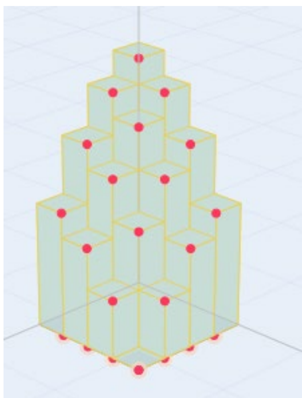
$$f\left(x_{ij},y_{ij}\right)=4-\left(\frac{i}{4}\right)^2-2\left(\frac{j}{4}\right)^2$$

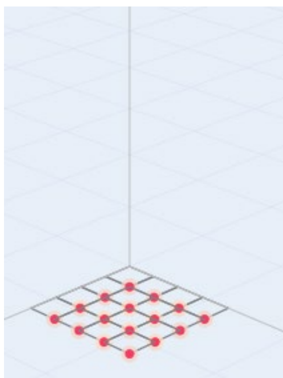
Dado que el área de cada subregión es 1/16, aproximamos el volumen mediante la suma doble de Riemann

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}f\left(x_{ij},y_{ij}\right)\left(\frac{1}{16}\right)=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\left[4-\frac{i^2}{16}-\frac{j^2}{8}\right]\left(\frac{1}{16}\right)\approx 2{,}5938$$

A continuación, se representa gráficamente el volumen que se calcula con la suma de Riemann anterior y se escribe el código de Matlab para calcular el valor de esta suma.

```
inc=1/4;
vx=inc:inc:1;
vy=vx;
[x,y]=meshgrid(vx,vy);
f=4-x.^2-2*y.^2;
suma=sum(f(:))*inc.^2
```





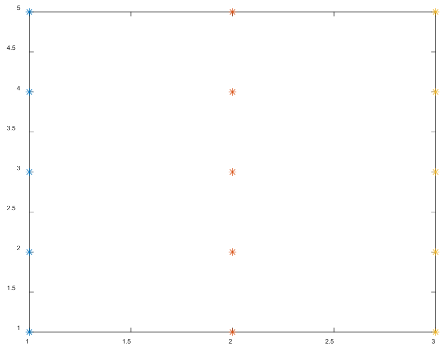
[X,Y]= `meshgrid(vectx,vecty)`

Devuelve coordenadas de una cuadrícula 2D basadas en las coordenadas que contienen los vectores `vectx` y `vecty`. `X` es una matriz en la que cada fila es una copia de `vectx`, mientras que `Y` es una matriz en la que cada columna es una copia de `vecty`. La cuadrícula que representan las coordenadas `X` e `Y` tiene `length(vectx)` filas y `length(vecty)` columnas.

Ejemplo:

https://es.mathworks.com/help/matlab/ref/meshgrid.html?searchHighlight=meshgrid&s_tid=srchtitle_meshgrid_1

```
x = 1:3;
y = 1:5;
[X,Y] = meshgrid(x,y)
%Dibujamos los puntos de la cuadrícula
plot(X,Y)
```



2

Escribe la expresión matemática que se calcula con el siguiente código de Matlab

```
inc=1/10
x=inc:inc:1;
y=x; [X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=exp(-X.^2-Y.^2);
valor=sum(Z(:))*inc*inc
```

¿Qué representa este valor?

Solución

El código Matlab calcula

$$valor = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} e^{-x_i^2-y_i^2} \qquad siendo \begin{cases} x_i = \dfrac{1}{10} + \left(i-1\right)\dfrac{1}{10} = \dfrac{i}{10} \\ y_j = \dfrac{1}{10} + \left(j-1\right)\dfrac{1}{10} = \dfrac{j}{10} \end{cases}$$

Se trata de la suma de Riemann de la función $f\left(x,y\right) = e^{-x^2-y^2}$ en el rectángulo R=[0,1]x[0,1] considerando una partición de 10x10 puntos y tomando como punto de cada subintervalo el vértice superior derecho:

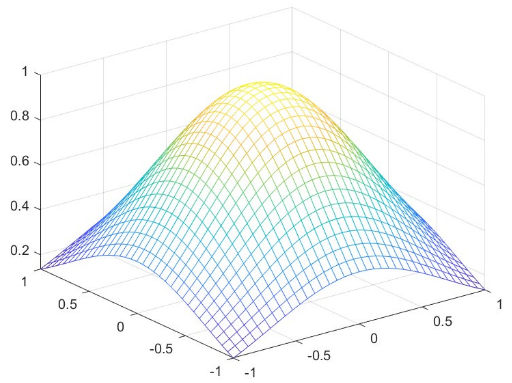
$$\int_0^1\int_0^1 e^{-x^2-y^2}\,dA \approx \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} e^{-\left(\frac{i}{10}\right)^2-\left(\frac{j}{10}\right)^2}$$

Dado que la función es positiva en R, sería una aproximación al volumen del sólido limitado inferiormente por el rectángulo y superiormente por la función $f\left(x,y\right)=e^{-x^2-y^2}$. Dibujamos con Matlab la superficie gráfica de la función f de distintas formas

fmesh(función,intervalo)

fmesh(f) fmesh(f) crea una fichero de malla para z = f(x,y) sobre el intervalo [-5 5] por defecto para x e y.
fmesh(f,xyinterval)
fmesh(funx,funy,funz)
fmesh(funx,funy,funz,uvinterval)

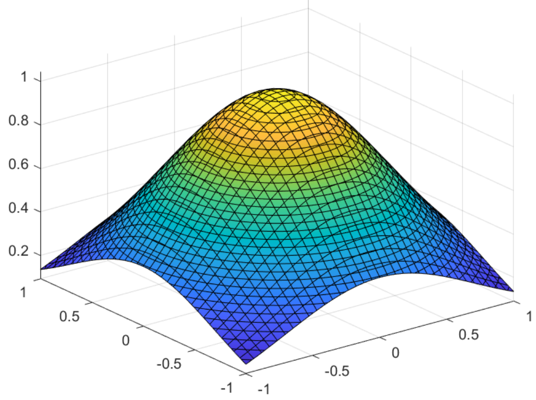
```
syms x y
fmesh(exp(-x^2-y^2),[-1 1 -1 1])
%También mediante una función anónima
fmesh(@(x,y) exp(-x.^2-y.^2),[-1 1 -1 1])
```



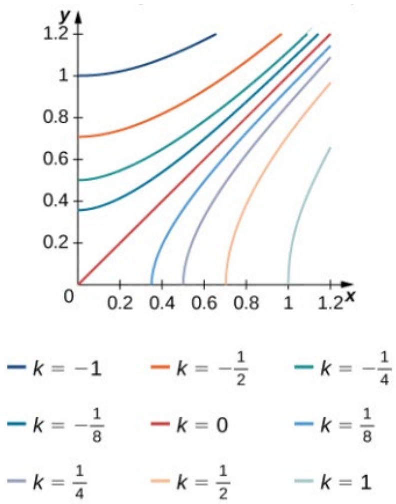
fimplicit3(f,intervalo)

Representa funciones en implícitas f(x,y,z)=0 en el intervalo. Si no se indica se considerará [-5,5] para x, y, z.

```
syms f(x,y,z)
f(x,y,z)=z-exp(-x^2-y^2)
fimplicit3(f(x,y,z),[-1 1])
%Otra forma
syms x y z
f(x,y,z)= z-exp(-x^2-y^2)
fimplicit3(f,[-1 1 -1 1 0 1])
```



3 Las curvas de nivel $f(x,y)=k$ de f, donde k es una constante, se dan en la siguiente gráfica



Considerando la suma en el punto medio con una partición regular m=n=2 estima el valor de la integral $\iint_R f(x,y)\,dA$ donde R es $[0.2,\,1]\times[0,0.8]$. Calcula el valor promedio de f en R.

Nota: El valor promedio de $f(x,y)$ sobre R se obtiene de la forma siguiente

$$valor\ \ medio=\frac{\iint_R f(x,y)\,dA}{área\,(R)}$$

Solución

El valor aproximado de la integral es 0.112 y el valor promedio aproximadamente 0.175

4 Calcula un valor aproximado de $\iint_D \cos(x^2+3)\,dA$ siendo $D=[-2,1]\times[1,2]$ mediante una suma de Riemann regular con 70 subrectángulos tomando el punto que consideres en cada uno de ellos. Explica cómo has tomado la malla y la expresión de la suma de Riemann que has calculado.

Nota: Justifica el proceso que sigues y escribe el código para realizar los cálculos y el resultado que devuelve Matlab

Solución

Para calcular una suma de Riemann con 70 subrectángulos consideramos por ejemplo m=7 y n=10 y el punto medio de cada subrectángulo. Entonces,

```
a=-2;b=1;c=1;d=2;m=7;n=10;incx=(b-a)/m;incy=(d-c)/n;
%Consideramos el punto medio en cada subintervalo
vx=a+incx/2:incx:b-incx/2;
vy=c+incy/2:incy:d-incy/2;
[X,Y]=meshgrid(vx,vy);
Z=cos(X.^2+3);
sum(Z(:))*incx*incy
% -1.502
```

5 Considera la función $f\left(x,y\right)=sen\left(x^{2}\right)\cos\left(y^{y}\right)$ donde $\left(x,y\right)\in R=\left[-1,1\right]\times\left[-1,1\right]$.

(a) Utiliza la suma de Riemann de una partición regular con n=m=10 ,20, 30 considerando el punto medio para estimar la integral doble $I=\iint_R sen\left(x^{2}\right)\cos\left(y^{2}\right)dA$. Redondea las respuestas a las centésimas más cercanas.

(b) Para los valores de con n=m=30, encuentra el valor promedio de f sobre la región R. Redondea tu respuesta a las centésimas más cercanas.

(c) Representa en una misma figura el sólido cuyo volumen está dado por $I=\iint_R sen\left(x^{2}\right)\cos\left(y^{2}\right)dA$ el plano

Solución a)

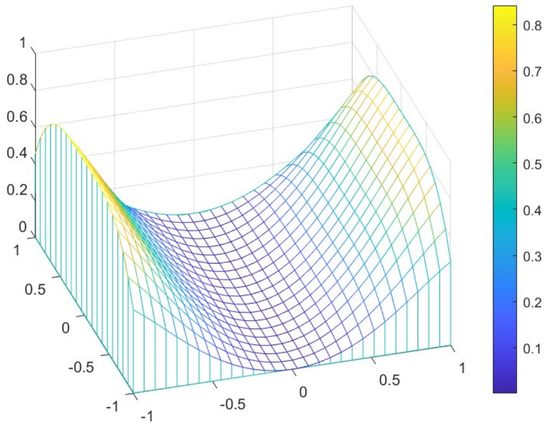
Solución b)

Solución c)

meshz(X,Y,Z)

Representa la gráfica de la función z=f(x,y) con una cortina lateral alrededor de la superficie.

```
% Código para representar el sólido
x=linspace(-1,1,30);y=linspace(-1,1,20);
[X,Y]=meshgrid(x,y); Z=sin(X.^2).*cos(Y.^2); meshz(X,Y,Z)
%Para mostrar el código de colores
colorbar
```

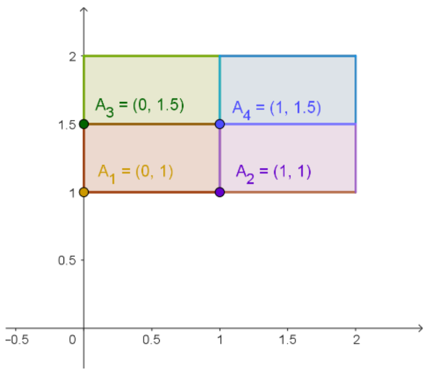


6 Dada la función $f\left(x,y\right)=ye^{-x^2}$, **escribe la expresión** para calcular la suma de Riemann de dicha función en el rectángulo [0,2]x[1,2] considerando una partición regular en cuatro subrectángulos tomando como punto en cada uno de ellos el vértice inferior izquierdo. Nota: No se pide escribir el código en Matlab.

Solucion

Se tiene que $\Delta x=1$, $\Delta y=0.5$. La Suma de Riemann es

$$\sum_{i=1}^{4} f\left(A_i\right)\Delta x\Delta y=\frac{1}{2}\left(1e^{-0}+1e^{-1}+1.5e^{-0}+1.5e^{-1}\right)$$



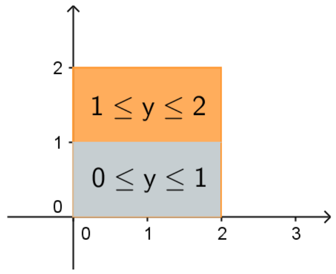
7 La función $f(x,y)$ se define como $z=f(x,y)=\begin{cases}1/2, & si \begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 1\end{cases}\\ y, & si\begin{cases}0\le x\le 2\\ 1< y\le 2\end{cases}\end{cases}$

Estudiar si existe la integral $I=\int_0^2 dx\left[\int_0^2 f(x,y)dy\right]$. En caso afirmativo, calcular su valor.

Solución

La integral cumple con una de las condiciones suficientes para la existencia de integral doble:

"Si $f(x,y)$ es una función *acotada* en un dominio acotado y cerrado R y es continua en dicho dominio, salvo en un número finito de curvas suaves, entonces $f(x,y)$ es integrable en R".



Sobre el segmento de la recta $y=1$, comprendido en $0 \leq x \leq 2$, es donde se produce la discontinuidad de salto finito de la función $f(x,y)$. Este segmento es una curva suave, luego $f(x,y)$ es integrable sobre el dominio de integración.

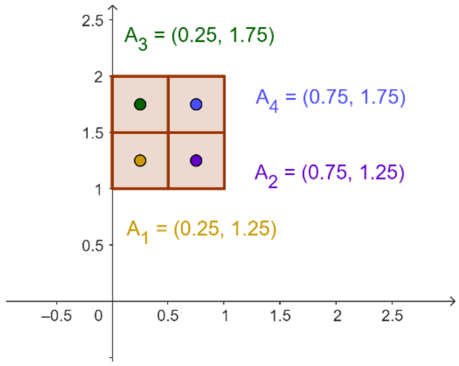
La integral se debe plantear como suma de dos integrales, así:

$$I=\int_0^2 dx\left[\int_0^1 \frac{1}{2}dy\right]+\int_0^2 dx\left[\int_1^2 y dy\right]=\frac{1}{2}\left[x\right]_0^2\left[y\right]_0^1+\left[x\right]_0^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2=4$$

E_01

Escribir la expresión de la suma de Riemann de la función $f(x,y)=\cos\left(x^2+y\right)$ cuando se considera una partición regular 2x2 en el rectángulo [0,1]x[1,2] tomando el punto medio en cada subrectángulo. No se pide calcular su valor, únicamente dejar indicada la expresión de la suma.

Solución



Al considerar una suma 2x2 se tendrá $\Delta x=\Delta y=\dfrac{1}{2}$. Considerando los puntos intereriores a cada uno de los cuatro subrectángulos se obtendrán los puntos del dibujo A1, A2, A3 y A4. La suma de Riemanna es

$$\left[f\left(A_1\right)+f\left(A_2\right)+f\left(A_3\right)+f\left(A_4\right)\right]\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{\cos\left(0.25^2+1.25\right)}{4}+\frac{\cos\left(0.75^2+1.25\right)}{4}+\frac{\cos\left(0.25^2+1.75\right)}{4}+\frac{\cos\left(0.75^2+1.75\right)}{4}$$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DOBLE

8 Sea la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ y $D \equiv \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$. Estudiar, razonadamente, si se cumple $4\pi \leq \iint_D f(x,y)\, dx\, dy \leq 20\pi$.

Solución

En efecto, basta recordar que

$$m \; área(D) \leq \iint_D f(x,y)\, dx\, dy \leq M \; área(D)$$

siendo *m* el mínimo de la función $f(x,y)$ en *D* y análogamente *M* el máximo de $f(x,y)$ también en *D*. En nuestro caso m se obtiene en $(0,0)$ es decir $m = f(0,0) = 1$ y el máximo *M* se produce en los puntos de la frontera del dominio de ecuación $x^2 + y^2 = 4$, por tanto $M = 5$.

$$área(D) = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{, por tanto}$$

$$4\pi \leq \iint_D f(x,y)\, dx\, dy \leq 20\pi$$

que coincide con la expresión del enunciado, luego la proposición es CIERTA.

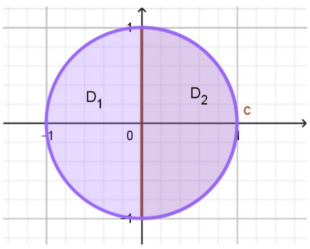
9 Si $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$, estudiar razonadamente, si se verifica

$$\iint_D \frac{x^3 \operatorname{tg}(y^2) \operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^4 + 1}\, dx\, dy = 0.$$

Solución

Siendo

- D_1 el dominio correspondiente a $x \leq 0$
- D_2 el correspondiente a $x \geq 0$



tendremos

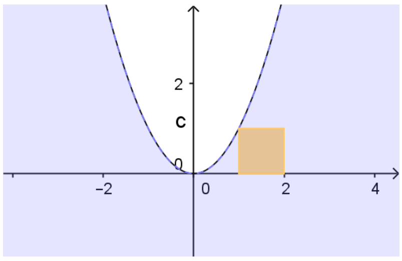
$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x,y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy,$$

además $f(-x,y) = -f(x,y)$ luego $\iint_{D_1} f(x,y) dx\, dy = -\iint_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy$

Por tanto $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$ y la propuesta del enunciado es VERDADERA.

10 Sea $R = [1,2]x[0,1]$, entonces $\iint_R \left(x^2 - y\right) dxdy \geq 0$. Razonar sin resolver la integral.

Solución



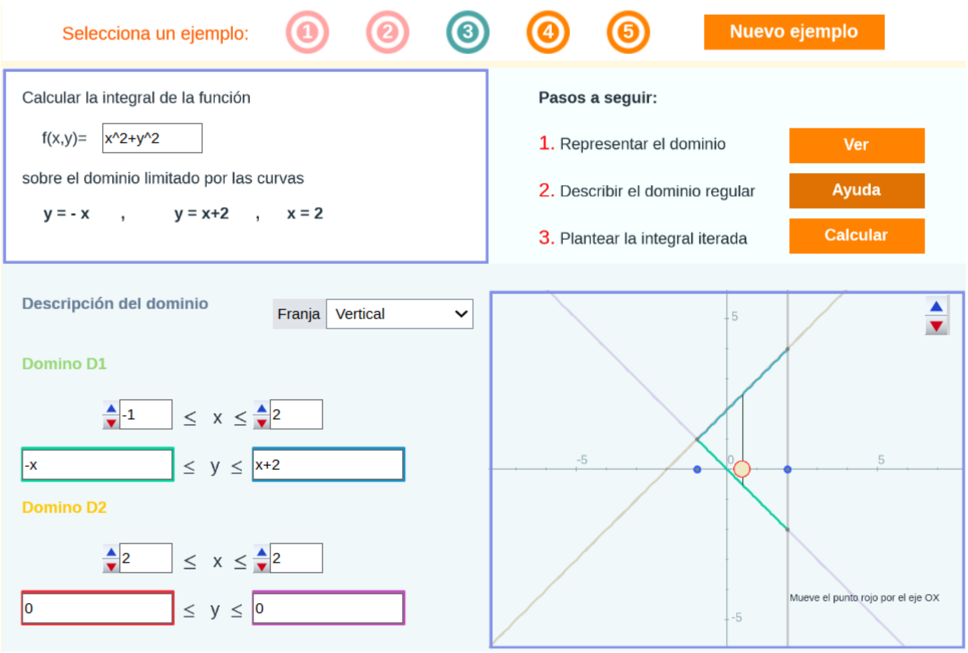
Según se observa en la figura, la parábola $x^2 - y = 0$, sólo toca en un punto al dominio *R*. Los puntos exteriores (junto con la frontera) a la parábola verifican la condición $y \leq x^2$ ó bien $x^2 - y \geq 0$. Al ser la función subintegral no negativa, también será $\iint_R (x^2 - y)dxdy \geq 0$, luego la proposición de partida es CIERTA.

INTEGRAL DOBLE SOBRE DOMINIOS REGULARES

11 Realiza los cinco ejercicios propuestos en la herramienta Cálculo de integrales dobles en dominios regulares de la página

https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/integracion_multiple.html

Nota: Dispones del siguiente video donde se explica su uso Ver video .



12 Invertir el orden de integración y evaluar la integral resultante: $\displaystyle\int_0^1\int_{2x}^{2} e^{y^2}\,dydx$

Solución

El dominio de integración dado es

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ 0\le x\le 1,\quad 2x\le y\le 2\right\}$$

Si se invierte los límites de integración

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ 0\le y\le 2\ ,0\le x\le \frac{y}{2}\ \right\}$$

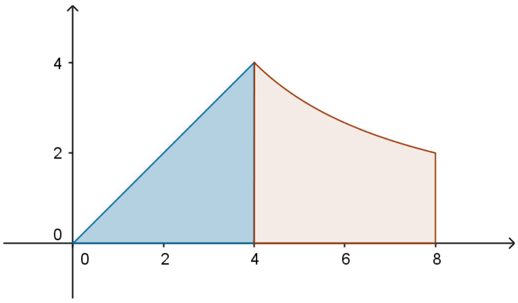
La integral es

$$\int_0^1\int_{2x}^{2} e^{y^2}\,dydx=\int_0^2\int_0^{y/2} e^{y^2}\,dxdy=\int_0^2 xe^{y^2}\Big|_{x=0}^{x=\frac{y}{2}}dy=\int_0^2\frac{y}{2}e^{y^2}\,dy=\frac{1}{4}e^{y^2}\Big|_{y=0}^{y=2}=\frac{1}{4}\left(e^4-1\right)$$

13 Dibujar la región (R) limitada en el primer cuadrante por la hipérbola $xy=16$ y las rectas $y=x,\ \ y=0,$ y $x=8$. Expresar la integral genérica $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$, extendida al dominio anterior R: a) Por franjas verticales. b) Por franjas horizontales.

Solución a)

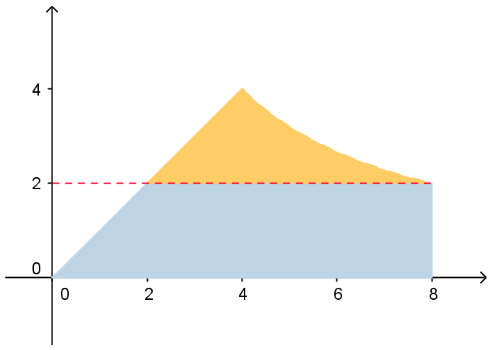
Por franjas verticales



$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^4 d\,x\left[\int_0^x f(x,y)dy\right] + \int_4^8 dx\left[\int_0^{16/x} f(x,y)\,dy\right]$$

Solución b)

Por franjas horizontales

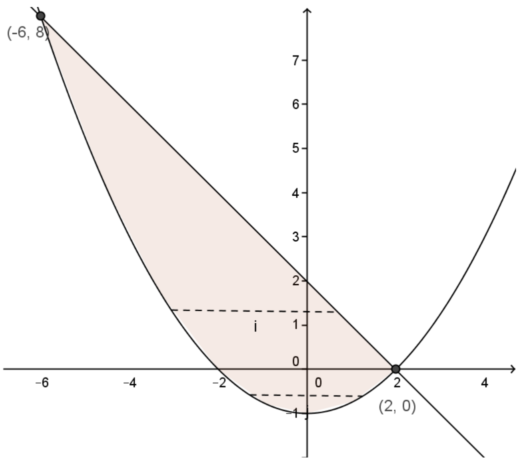


$$\iint_R f(x,y)dx\,dy = \int_0^2 dy\left[\int_y^8 f(x,y)dx\right] + \int_2^4 dy\left[\int_y^{16/y} f(x\,,y\,)dx\right]$$

14 Cambiar el orden de integración de la integral $\int_{-6}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,dydx$.

Solución

Se trata de la región comprendida entre la parábola $y = \dfrac{x^2}{4} - 1$ y la recta $y = 2 - x$



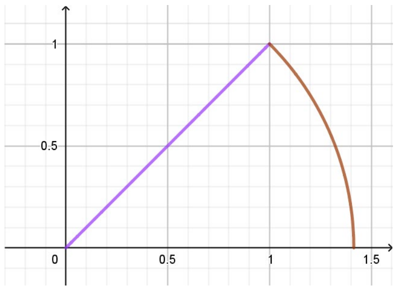
Invirtiendo el orden de integración de $I = \int_{-6}^{2} \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f\left(x, y\right) dydx$, se tiene

$$I = \int_{-1}^{0} \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f\left(x, y\right) dxdy + \int_{0}^{8} \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f\left(x, y\right) dxdy$$

15 Se considera $\iint_D f\left(x, y\right) dA = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f\left(x, y\right) dxdy$. Se pide representar la región D e intercambiar los límites de integración.

Solución

El dominio D es



La integral quedará

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f\left(x, y\right) dxdy = \int_0^1 \int_0^x f\left(x, y\right) dydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f\left(x, y\right) dydx$$

16 a) Hallar el área de las siguientes regiones planas, situadas en el primer cuadrante, integrando primero en x, y después en y:

- S_1 es la región limitada por las curvas: $y = x^2, \; y = \frac{x^2}{5}, \; y = 2, \; y = 4$
- S_2 es la región limitada por las curvas: $x = y^2 + 1, \; x = 0, \; y = 0, \; y = 2$

b) Calcular el área cambiando el orden de integración de las integrales anteriores.

Solución a)

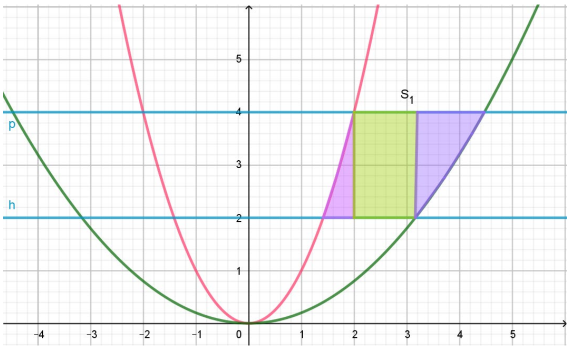
Integrando primero en x y después en y, tenemos:

$$\text{área} \;\; S_1 = \iint_{S_1} dA = \int_2^4 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{5y}} dxdy = \frac{4}{3}\left(\sqrt{5} - 1\right)\left(4 - \sqrt{2}\right)$$

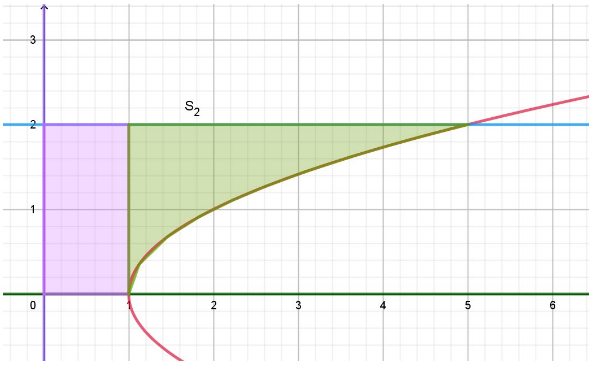
$$\text{área} \;\; S_2 = \iint_{S_2} dA = \int_0^2 \int_0^{y^2+1} dxdy = \frac{14}{3}$$

Solución b)

Para poder resolver primero en y, y después en x, el dominio S_1 se debe tomar como la unión de tres subdominios, A, B y C; mientras que el dominio S_2 se debe tomar como la unión de dos subdominios, A y B.

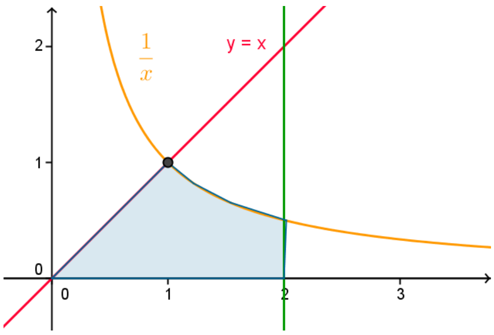


$$\text{área } \; S_1 = \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{2}^{x^2} dydx + \int_{2}^{\sqrt{10}}\int_{2}^{4} dydx + \int_{\sqrt{10}}^{2\sqrt{5}}\int_{x^2/5}^{4} dydx = \frac{14}{3}$$



$$\text{área } \; S_2 = \int_{0}^{1}\int_{0}^{2} dydx + \int_{1}^{5}\int_{\sqrt{x-1}}^{2} dydx = \frac{14}{3}$$

17 Calcula el área limitada por las siguientes curvas $y = x$, $y = 1/x$, $x = 2$, $y = 0$ barriendo la región por franjas horizontales y por franjas verticales.



Solución

Barriendo el dominio por franjas verticales

$$D = \left\{(x,y)\,/\,0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\right\} \cup \left\{(x,y)\,/\,1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{1}{x}\right\}$$

su área será:

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{x} dydx + \int_{1}^{2}\int_{0}^{1/x} dydx = \int_{0}^{1} xdx + \int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2} + \log 2$$

Barriendo el dominio por franjas verticales

$$D=\left\{(x,y)\,/\,0\le y\le \frac{1}{2},\ y\le x\le 2\right\}\cup\left\{(x,y)\,/\,\frac{1}{2}\le y\le 1,\ y\le x\le \frac{1}{y}\right\}$$

su área será:

$$\int_0^{1/2}\int_y^{2} dxdy+\int_{1/2}^{1}\int_y^{1/y} dxdy=\int_0^{1/2}(2-y)\,dy+\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{y}-y\right)dy=$$

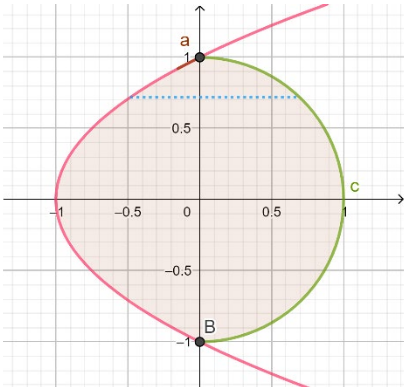
$$=\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)_{y=0}^{y=1/2}+\left(\log y-\frac{y^2}{2}\right)_{y=1/2}^{y=1}=1-\frac{1}{8}+\log 1-\frac{1}{2}-\log\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\log 2$$

18 Calcula el volumen del sólido debajo de la gráfica de la función $f(x,y)=xy+1$ y por encima de la región del dominio delimitado por $x=y^2-1,\ x=\sqrt{1-y^2}$.

Nota: Utilizar Matlab para calcular las integrales

Solución

El dominio D está formado por los puntos de la región delimitada por la parábola $x=y^2-1$ y por la semicircunferencia $x=\sqrt{1-y^2}$.



Barriendo este dominio por franjas horizontales, se tendrá que D se describe de la forma siguiente,

$$-1\le y\le 1$$
$$-1+y^2\le x\le\sqrt{1-y^2}$$

Por lo tanto, el volumen del sólido es

$$vol(H)=\iint_D\left(\int_0^{xy+1}dz\right)dA=\iint_D(xy+1)\,dA=\int_{-1}^{1}\int_{y^2-1}^{\sqrt{1-y^2}}(xy+1)\,dx\,dy$$

Haciendo el cálculo con Matlab

```
syms x y
int(int(x*y+1,x,y^2-1,sqrt(1-y^2)),y,-1,1)
```

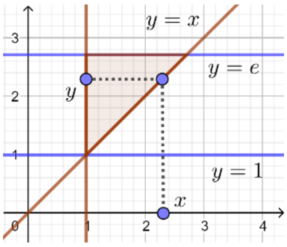
```
%Solución  pi/2 + 4/3
```

19 Dada la integral $\int_1^e \int_1^y \frac{y}{x} dx dy$, se pide, plantearla cambiando el orden de integración y calcularla, dibujando el dominio de integración.

Solución

En la figura se representa la región D de integración formada por los puntos (x, y) del plano cumpliendo

$$1 \leq y \leq e \qquad 1 \leq x \leq y$$



Cambiando el orden de integración se tendrá que el dominio D será

$$1 \leq x \leq e \qquad x \leq y \leq e$$

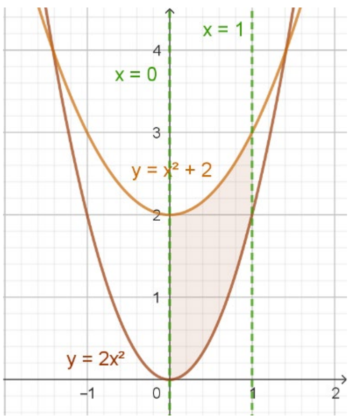
$$\int_1^e \int_x^e \frac{y}{x} dy dx = \int_1^e \frac{1}{x} \left(\frac{y^2}{2} \right)_{y=x}^{y=e} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{e^2}{2} \int_1^e \frac{1}{x}\, dx - \int_1^e \frac{x}{2}\, dx$$

$$= \frac{e^2}{2} (\log e - \log 1) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \boxed{\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}}$$

20 Cambiar el orden de integración de $L = \int_0^1 \int_{2x^2}^{2+x^2} f(x, y)\, dy dx$.

Solución

La región de integración es la sombreada en la siguiente imagen



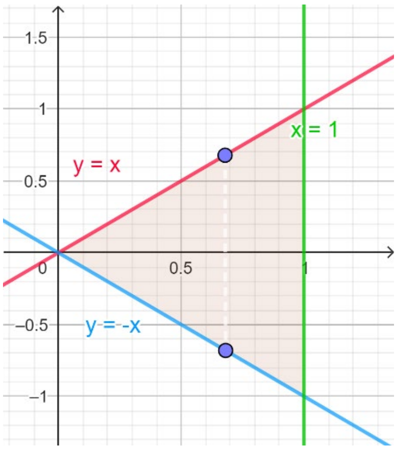
Para recorrer la región mediante franjas horizontales se deben considerar dos integrales

$$L=\int_0^1\int_{2x^2}^{2+x^2} f(x,y)\,dy\,dx=\int_0^2\int_0^{\sqrt{y/2}} f(x,y)\,dx\,dy+\int_2^3\int_{\sqrt{y-2}}^{\sqrt{y/2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

E_01

Calcular $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$ siendo D la región acotada por las rectas $y=x$, $y=-x$, $x=1$ barriendo el dominio D por franjas horizontales y por franjas verticales describiendo el dominio utilizando desigualdades.

- Para calcular la integral por franjas verticales, los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ cumplirán

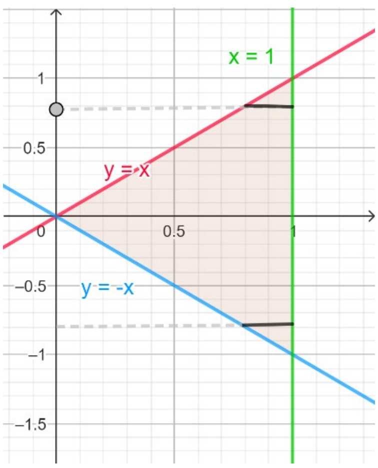


$0\le x\le 1$
$-x\le y\le y$

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_{-x}^{x}(x+y)\,dy\,dx=\int_0^1\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)_{y=-x}^{y=x}dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^2+\frac{x^2}{2}+x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx=\int_0^1 2x^2\,dx=\left.\frac{2x^3}{3}\right|_{x=0}^{x=1}=\frac{2}{3}$$

- Para calcular la integral por franjas horizontales, los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ cumplirán



$0\le y\le 1$
$y\le x\le 1$

$-1\le y\le 0$
$-y\le x\le 1$

$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \int_{-1}^{0}\int_{-y}^{1}(x+y)\,dxdy + \int_{0}^{1}\int_{y}^{1}(x+y)\,dxdy = \int_{-1}^{0}\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)_{x=-y}^{1} dy + \int_{0}^{1}\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)_{x=y}^{1} dy =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}+y-\frac{y^2}{2}+y^2\right)dy + \int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}+y-\frac{y^2}{2}-y^2\right)dy =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}+y+\frac{y^2}{2}\right)dy + \int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}+y-\frac{3y^2}{2}\right)dy = \left(\frac{y}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}\right)_{-1}^{0} + \left(\frac{y}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{2}\right)_{0}^{1} = \frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

INTEGRAL DOBLE. CAMBIO DE VARIABLE

21 (a) Calcular $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ y $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ siendo $\begin{cases} x = u(1-v) \\ y = uv \end{cases}$

(b) Calcula el jacobiano $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t,u)}$, donde $x = 3s+t+4u$, $y = 2s-t+u$, $z = 3s+t-5u$.

Solución a)

Se pide calcular el jacobiano del cambio

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u(1-v)+uv = u$$

Luego

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} = \frac{1}{u}$$

Solución b)

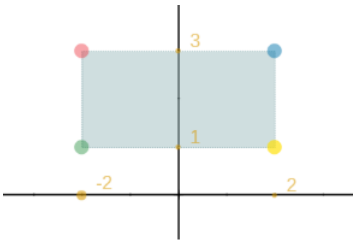
Se tiene que

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t,u)} = \begin{vmatrix} x'_s & x'_t & x'_u \\ y'_s & y'_t & y'_u \\ z'_s & z'_t & z'_u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 15+8+3+12-3+10 = 45$$

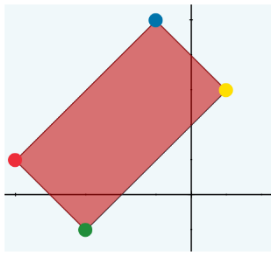
22 Calcula la relación que existe entre las áreas de R y S que se muestran a continuación sabiendo que S es la transformación de R mediante

$$u = x - y$$
$$v = x + y$$

Región R (plano XY)



Región S (plano UV)



Solución

La proporción entre las áreas es el jacobiano de la transformación

$$\acute{a}rea\left(S\right) = \acute{a}rea\left(R\right)\left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\right| = \acute{a}rea\left(R\right)\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 2\ \acute{a}rea\left(R\right)$$

23 Considera la región del primer cuadrante limitada por las curvas

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{5}, \quad xy = 2, \quad xy = 4$$

a) Calcula $dxdy$ en función de $dudv$ si $u = \dfrac{x^2}{y}, \quad v = xy$

a) Calcula el área de la región utilizando las nuevas variables.

Solución a)

Sabemos que $dxdy = \left|J\right| dudv$, siendo

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

Calculemos el jacobiano,

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix}u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2}\\ y & x\end{vmatrix} = \frac{3x^2}{y} = 3u$$

Por tanto,

$$dxdy = \left|J\right| dudv = \frac{1}{3\left|u\right|} dudv$$

El área de la región se calcula mediante la integral doble

$$\iint_A dxdy = \iint_{A^*} \left|J\right| dudv = \iint_{A^*} \frac{1}{3\left|u\right|} dudv$$

Es necesario escribir las ecuaciones de las curvas que limitan el dominio en el nuevo sistema de coordenadas para definir el nuevo dominio de integración A*

$$y = x^2 \quad \to \quad u = 1; \;\; y = \frac{x^2}{5} \quad \to \quad u = 5; \;\; xy = 2 \quad \to \quad v = 2; \;\; xy = 4 \quad \to \quad v = 4$$

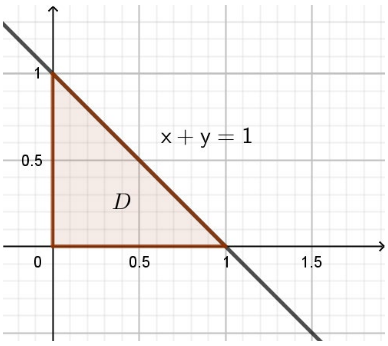
Luego la integral quedará

$$\iint_{A^*} \frac{1}{3\left|u\right|} dudv = \int_1^5 \int_2^4 \frac{1}{3\left|u\right|} dvdu = \boxed{\frac{2}{3}\log 5}$$

24 Determinar $I = \iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dx\, dy$, siendo $D = \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$.

Solución

El dominio en cartesianas es la región de la figura



Hacemos el cambio de variable

$$\begin{cases} x - y = u \\ x + y = v \end{cases}$$

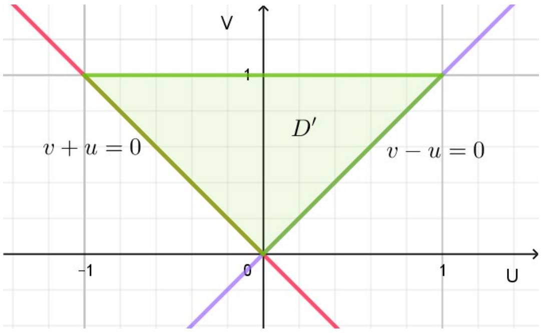
Calculamos el jacobiano del cambio

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,\,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad dxdy = \frac{1}{2} dudv$$

La nueva integral es: $I = \dfrac{1}{2} \iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}\; du\, dv$

Siendo,

$$D' \equiv \begin{cases} \dfrac{u+v}{2} \geq 0 \\ \dfrac{v-u}{2} \geq 0 \\ v \leq 1 \end{cases}$$



$$I = \frac{1}{2} \iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}\, du\, dv = \frac{1}{2} \int_0^1 dv \left[\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\, du \right]$$

Calculamos primero la integral del corchete:

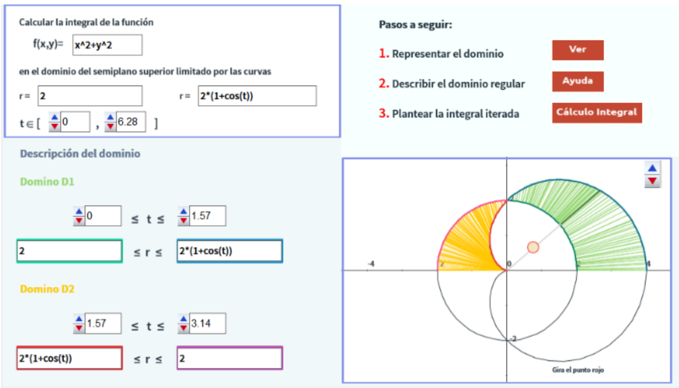
$$\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} du = \left[v\, e^{\frac{u}{v}} \right]_{-v}^{v} = ve - ve^{-1} = v\left(e - e^{-1}\right)$$

Sustituyendo se obtiene,

$$I = \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right) \int_0^1 v dv = \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right) \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}\left(e - e^{-1}\right)}$$

INTEGRAL DOBLE. COORDENADAS POLARES.

25 Comprueba con el siguiente laboratorio cómo calcular el área comprendida entre dos curvas en polares.



Página de acceso al laboratorio:

http://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/integracion_multiple.html

y pulsar sobre el botón cálculo de integrales dobles en coordenadas polares. Explicación de la herramienta  Ver video .

26 Pasar a coordenadas polares la siguiente integral y representa gráficamente la región de integración: $I = \int_0^{3/2} \int_{\sqrt{3x-x^2}}^{3/2+\sqrt{9/4-x^2}} f(x,y)\,dydx$.

Solución

El dominio de integración es:

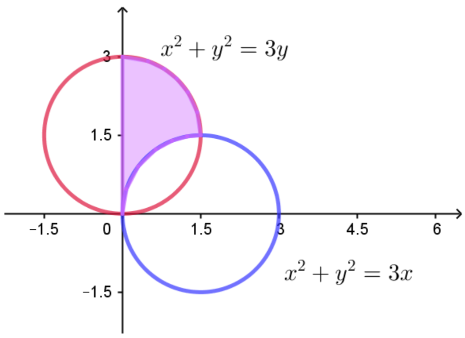
$$D = \left\{ (x,y) \,/\, 0 \le x \le 3/2,\ \sqrt{3x-x^2} \le y \le \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - x^2} \right\}$$

Para representar el dominio consideramos las curvas

$$C_1 : \quad y = \sqrt{3x-x^2} \Leftrightarrow y^2 = 3x - x^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

$$C_2 : \quad y = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - x^2} \Leftrightarrow \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - x^2 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

El dominio de integración es:



En polares, teniendo en cuenta que

$$C_1 : \quad x^2 + y^2 = 3x \quad \Rightarrow r^2 = 3r\cos\theta \qquad \Rightarrow r = 3\cos\theta$$

$$C_2 : \quad x^2 + y^2 = 3y \quad \Rightarrow r^2 = 3r\,\text{sen}\,\theta \qquad \Rightarrow r = 3\,\text{sen}\,\theta$$

se tendrá que la integral es:

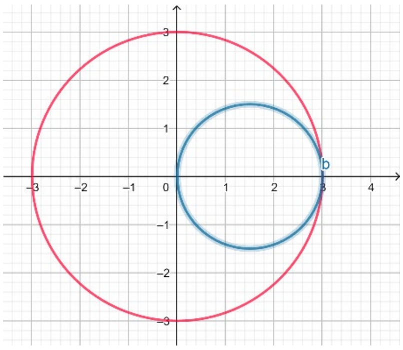
$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{3\cos\theta}^{3\,\text{sen}\,\theta} r\, f\left(r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta)\right) drd\theta$$

27 Calcula, utilizando integrales, el área interior a $r = 3$ y exterior a $r = 3\cos\theta$.

Solución

Las dos curvas que se deben considerar son la circunferencia de radio 3 y la circunferencia

$$r = 3\cos\theta \qquad \to r^2 = 3r\cos\theta \qquad \to x^2 + y^2 = 3x \qquad \to \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$



El área se puede calcular mediante las siguientes integrales dobles

$$A = \underbrace{\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^3 r dr\, d\theta}_{mitad\ \ área\, círculo\, rojo} + 2\int_0^{\pi/2}\int_{3\cos\theta}^{3} r\, dr\, d\theta =$$

$$= \frac{9\pi}{2} + 2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{9}{2} - \frac{9\cos^2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{9\pi}{2} + \frac{9\pi}{4} = \boxed{\frac{27\pi}{4}}$$

Nota: Observar que el área pedida se puede calcular teniendo en cuenta que sería la del círculo limitado por la circunferencia roja menos el área del círculo encerrado por la circunferencia azul: $9\pi - \frac{9\pi}{4} = \frac{27\pi}{4}$.

28 Calcular la integral $\iint_D \left(1 + x^2 + y^2\right)^{3/2} dxdy$ siendo D, el círculo unidad.

Solución

Si utilizamos coordenadas polares

$$\iint_D \left(1 + x^2 + y^2\right)^{3/2} dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\left(1 + r^2\right)^{3/2} drd\varphi =$$

$$= 2\pi\int_0^1 r\left(1 + r^2\right)^{3/2} dr = \pi \left.\frac{\left(1 + r^2\right)^{5/2}}{5/2}\right|_{r=0}^{r=1} = \boxed{\frac{2\pi\left(4\sqrt{2} - 1\right)}{5}}$$

29 Dada la región del plano definida por

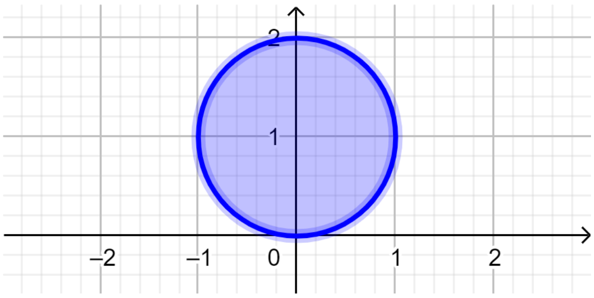
$$D = \left\{\left(x, y\right) / \ x^2 + y^2 - 2y \le 0\right\}$$

Se pide calcular el valor de la integral de la función $f\left(x, y\right) = -ye^x$ sobre la región D.

Nota: Deberás hacer el planteamiento a mano y resolver las integrales con Matlab utilizando cálculo simbólico.

Solución

El dominio es el interior de la circunferencia de centro (0,1) y radio 1



$$x^2+y^2-2y=0 \Leftrightarrow x^2+\left(y-1\right)^2=1$$

Pasando a coordenadas polares su ecuación es

$$r^2-2rsen\theta=0 \Leftrightarrow r=2sen\theta$$

La descripción del dominio es

$$0\le\theta\le\pi$$
$$0\le r\le 2sen\theta$$

El valor pedido es

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2sen\theta} -r^2 sen\theta\, e^{r\cos\theta} dr d\theta$$

Para calcular este valor hay que escribir el siguiente código Matlab

```
syms r t
double(int(int(-r^2*sin(t)*exp(r*cos(t)),r,0,2*sin(t)),t,0,pi))
```

El resultado que devuelve el programa es: -3.5510

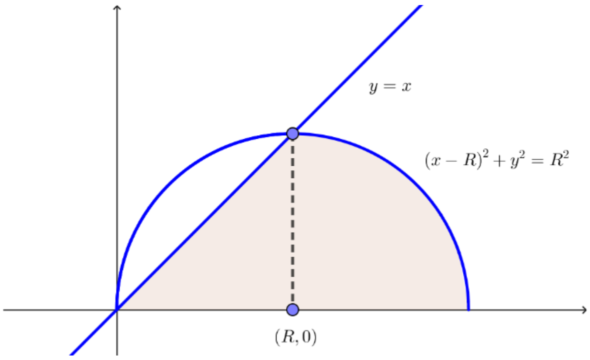
30 Sea D la región del plano del primer cuadrante encerrada por la circunferencia de centro $\left(R,0\right)$ y radio R, bajo la recta $y=x$. Se considera la integral $\iint_D f\left(x,y\right)dA$.

(a) Escribe las integrales iteradas en los dos órdenes de integración ($dx\,dy$ ó $dy\,dx$)

(b) Escribir la integral en coordenadas polares.

(c) Escribir el código Matlab para calcular la integral del apartado 2 en el caso en el que se considere $f\left(x,y\right)=ye^{x^2}$.

Solución a(



$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_0^R\int_0^x f(x,y)\,dydx+\int_R^{2R}\int_0^{\sqrt{R^2-(x-R)^2}} f(x,y)\,dydx$$

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_0^R\int_y^{R+\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)\,dxdy$$

Solución b

Teniendo en cuenta que

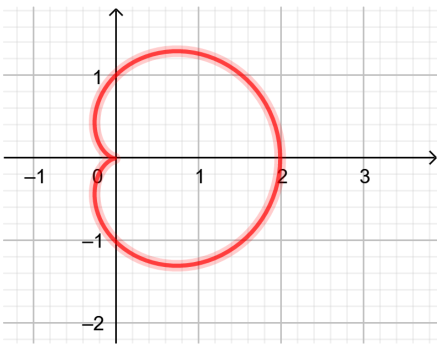
$$(x-R)^2+y^2=R^2 \Leftrightarrow x^2-2Rx+y^2+R^2=R^2$$

$$r^2-2Rr\cos\theta=0 \Leftrightarrow r=2R\cos\theta$$

Pasando a polares,

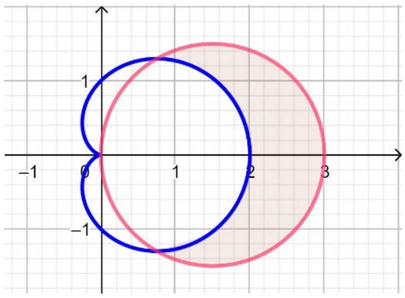
$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_0^{\pi/4}\int_0^{2R\cos\theta} f(r\cos\theta,r\cos\theta)\,r\,drd\theta$$

31 Calcula el área interior a la circunferencia $r=3\cos\theta$ y exterior al cardioide $r=1+\cos\theta$ que se muestra en la figura.



Solución

La región a considerar es la que se muestra en la imagen siguiente



Los puntos de corte entre las dos curvas son

$$\left.\begin{array}{l} r = 3\cos\theta \\ r = 1+\cos\theta \end{array}\right\} \to 3\cos\theta = 1+\cos\theta \to \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \pm\dfrac{\pi}{3} \\ r = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto, el área, utilizando coordenadas polares, se puede calcular de la forma siguiente:

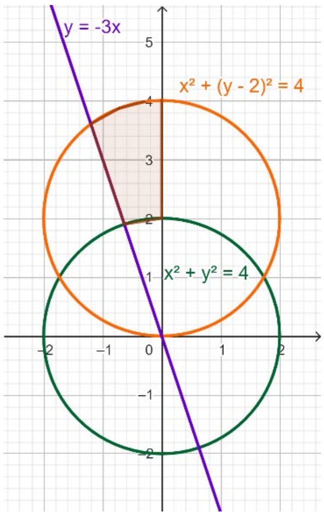
$$\acute{a}rea = 2\int_0^{\pi/3}\int_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta} r\ dr\ d\theta = 2\int_0^{\pi/3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=1+\cos\theta}^{r=3\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/3}\left[9\cos^2\theta - \left(1+\cos\theta\right)^2\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3}\left[8\cos^2\theta - 1 - 2\cos\theta\right] d\theta = \int_0^{\pi/3}\left[8\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} - 1 - 2\cos\theta\right] d\theta = \boxed{\pi}$$

32 Calcular el área de la región plana limitada por $x^2+y^2-4y \le 0$, $y \ge -\sqrt{3}\,x$, $x \le 0$, $x^2+y^2 \ge 4$. Plantea las integrales a mano y realiza el cálculo de las integrales con Matlab.

Solucion

El dominio D limitado por las curvas dadas en el ejercicio es la región sombreada de la figura siguiente.



Para calcular el área describimos el dominio en coordenadas polares, teniendo en cuenta la expresión de las circunferencias que delimitan el dominio en polares:

$$x^2+y^2-4y=0 \quad \to \quad r^2 - 4\,r sen\theta = 0 \quad \to \quad r = 4\,sen\theta$$

$$x^2+y^2=4 \quad \rightarrow \quad r^2=4 \quad \rightarrow \quad r=2$$

El dominio D , es el conjunto de puntos (r,θ) que cumplen

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3} \qquad\qquad 2 \le r \le 4sen\theta$$

El área de D se puede calcular con la siguiente integral doble

$$área(D)=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\int_2^{4sen\theta} r\,dr\,d\theta$$

El código Matlab para calcular esta integral es

```
syms r t
area=int(int(r,r,2,4*sin(t)),t,pi/2,2*pi/3)
double(area)
```

33

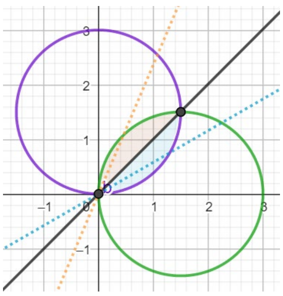
Calcular el área comprendida entre las dos curvas en polares $r=3sen\theta$ y $r=3\cos\theta$.

Solución b) Calculando los puntos de corte de las dos circunferencias

$$r=3sen\theta \rightarrow r^2=3rsen\theta \rightarrow x^2+y^2=3y \rightarrow x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

$$r=3\cos\theta \rightarrow r^2=3r\cos\theta \rightarrow x^2+y^2=3x \rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$$

El punto de corte, además del origen se obtiene para: $3sen\theta=3\cos\theta \rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$. Para calcular el área se divide la región en dos:



- Región 1: θ varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{4}$, r varía desde 0 hasta la circunferencia morada $r=3sen\theta$.

- Región 2: θ varía desde $\frac{\pi}{4}$ hasta $\frac{\pi}{2}$, r varía desde 0 hasta la circunferencia verde, $r=3\cos\theta$

Como las dos regiones son simétricas:

$$\acute{a}rea = \int_0^{\pi/4}\int_0^{3\cos\theta} r dr\, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{3sen\theta} r dr\, d\theta = 2\int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=3\cos\theta} d\theta =$$

$$= 9\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\, d\theta = 9\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)$$

Nota: Sin calcular integrales dobles esta área es el

34 Desde la página

https://www.giematic.unican.es/index.php/integracion-multiple/material-interactivo

realizar: Ejercicio 4: Propiedades del apartado Integral doble Definición y propiedades.

E_01 Dada la integral $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\left(x^2+y^2\right)^{3/2} dydx$

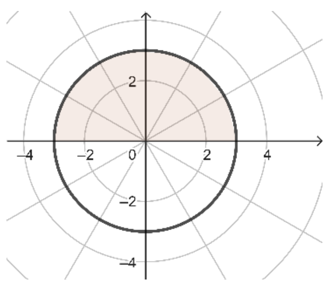
(a) Realiza la integral simbólica utilizando Matlab
(b) Plantea y resuelve a mano la integral en polares y obtén su valor de manera numérica con la ayuda de Matlab.

Solución:

(a) Para hacer la integral en simbólico se debe escribir el siguiente código

```
syms x y
I=int(int((x^2+y^2)^1.5,y,0,sqrt(9-x^2)),x,-3,3)
double(I)
%152.681
```

(b) Se calcula la integral en polares.



$$y=\sqrt{9-x^2} \Rightarrow y^2 = 9-x^2 \;,\; y\geq 0$$
$$\Rightarrow x^2+y^2 = 9 \;,\; y \geq 0$$

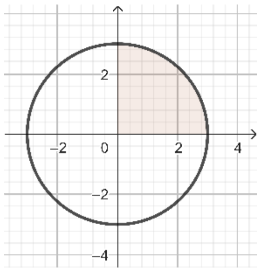
En coordenadas polares $\begin{cases} 0\leq\theta\leq\pi \\ 0\leq r\leq 3\end{cases}$

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{3}\left(r^2\right)^{3/2} r\, drd\theta = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{3} r^4 dr\right)d\theta = \pi\cdot\left.\frac{r^5}{5}\right|_{r=0}^{r=3} = \frac{3^5\pi}{5}$$

```
f=@(r,theta)    r.^4;
integral2(f,0,3,0,pi)
```

Nota: Para las siguientes opciones, se tendría

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \left(x^2+y^2\right)^{3/2} dydx$$



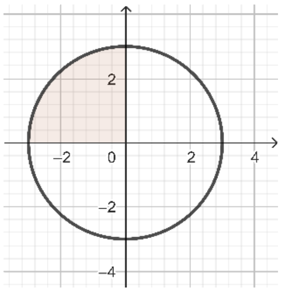
$$I=\int_0^{\pi/2}\int_0^3 \left(r^2\right)^{3/2} r\,drd\theta =$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^3 r^4 dr\right)d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\left.\frac{r^5}{5}\right|_{r=0}^{r=3} = \frac{3^5\pi}{10}$$

```
syms x y
I=int(int((x^2+y^2)^1.5,y,0,sqrt(9-
x^2)),x,0,3)
double(I)


f=@(r,theta)   r.^4
integral2(f,0,3,0,pi/2)  %76.340
```

$$\int_{-3}^0 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \left(x^2+y^2\right)^{3/2} dydx$$



$$I=\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^3 \left(r^2\right)^{3/2} r\,drd\theta =$$

$$=\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_0^3 r^4 dr\right)d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\left.\frac{r^5}{5}\right|_{r=0}^{r=3} = \frac{3^5\pi}{10}$$

```
syms x y
I=int(int((x^2+y^2)^1.5,y,0,sqrt(9-x^2)),x,-
3,0)
double(I)


f=@(r,theta)   r.^4
integral2(f,0,3,pi/2,pi)
%76.340
```

E_02

Dada la integral: $\displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f\left(x,y\right)dydx$ se pide:

a) Representar gráficamente el dominio de integración.

b) Escribir la integral usando coordenadas polares.

c) Calcular la integral doble para $f\left(x,y\right)=1$.

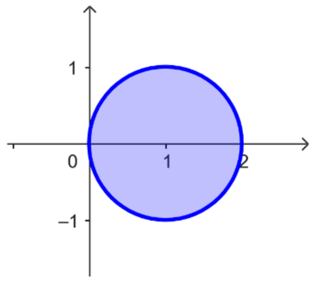
Solución

El dominio de integración es el conjunto de puntos $\left(x,y\right)$ del plano cumpliendo

$$0\le x\le 2$$
$$-\sqrt{2x-x^2}\le y\le \sqrt{2x-x^2}$$

Teniendo en cuenta que

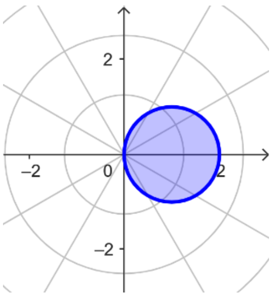
$$y = \pm\sqrt{2x - x^2} \Leftrightarrow y^2 = 2x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$



se trata del interior de un círculo de centro (1,0) y radio 1. Para escribir la integral usando coordenadas polares se tendrá en cuenta que la curva es

$$y^2 = 2x - x^2 \Leftrightarrow r^2 = 2r\cos\theta \Leftrightarrow r = 2\cos\theta$$

y el dominio puede describirse como los puntos (θ, r) con



$$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$
$$0 \le r \le 2\cos\theta$$

Por lo tanto, la expresión de la integral en polares es

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{2\cos\theta} f\left(r\cos\theta, rsen\theta\right) r dr d\theta$$

Calculando la integral para $f(x,y) = 1$ utilizando coordenadas polares

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{2\cos\theta} r dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2\theta \; d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\frac{1+\cos 2\theta}{2} \; d\theta = \theta\Big|_{\pi/2}^{\pi/2} = \pi$$

Nota: Observad que esta última integral es el área de un círculo de radio 1, luego la integral obtenida tiene que tener como valor $\pi \cdot 1^2 = \pi$

INTEGRAL DOBLE. APLICACIONES

35 Considera Una placa tiene la forma de la región interior a la curva de ecuación $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Su densidad en cada punto es igual a la distancia al origen. Escribir la expresión que permitiría calcular la masa de la placa y el código Matlab para representar dicha región y obtener el valor de la integral.

Solución

Se pide calcular

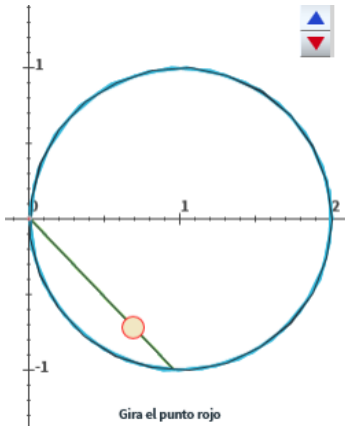
$$masa = \iint_D \delta(x,y)\,dA$$

donde D es el interior de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x = 0$ y $\delta(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Pasando a coordenadas polares

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow r^2 - 2r\cos\theta = 0 \Rightarrow r = 2\cos\theta$$

$$D \equiv (r,\theta) \qquad con \ -\pi \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le r \le 2\cos\theta$$

$$\delta(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = r$$



Luego

$$masa = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8\cos^3\theta}{3}\,d\theta$$

Nota: Aunque no se pide calcular su valor, se debe tener en cuenta que

$$\cos^3\theta = \cos^2\theta\cdot\cos\theta = \left(1 - sen^2\theta\right)\cdot\cos\theta$$

El valor de la integral es $$masa = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8\cos^3\theta}{3}\,d\theta = \frac{32}{9}$$

36 Sean M_1 y M_2, respectivamente, las masas de las láminas D_1 y D_2 con forma circular de radio R; sabiendo que la densidad de masa en un punto de la lámina D_1 es directamente proporcional a la distancia del punto al centro de la lámina, mientras que en la lámina D_2 la densidad es directamente proporcional al cuadrado de la distancia al eje OX calcular los valores M_1 y M_2.

Nota: Utilizar la misma constante de proporcionalidad para las dos placas.

Solución

Suponemos que la constante de proporcionalidad de la función densidad de masa es la misma en ambas láminas, la denominamos k. Las láminas tienen forma circular de radio R, se definen en polares como

$$D_1 = D_2 = \left\{\left(r,\theta\right) \ / \ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le R\right\}$$

Teniendo en cuenta la definición de masa de una lámina y la función densidad en ambos casos, $\delta_1\left(x,y\right) = k\sqrt{x^2+y^2}$, $\delta_2\left(x,y\right) = k\,y^2$, resulta

$$M_1 = \iint_{D_1} \delta_1\left(x,y\right) dA = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R k\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta}\cdot r dr = 2\pi\cdot k\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \boxed{\frac{2\pi k R^3}{3}}$$

$$M_2 = \iint_{D_2} \delta_2\left(x,y\right) dA = k\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta d\theta \int_0^R r^2\cdot r dr = k\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R =$$

$$= k\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} = \boxed{\frac{k\pi R^4}{4}}$$

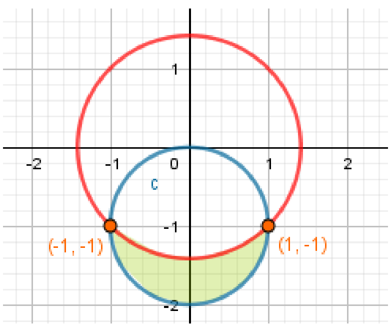
37 Calcula la densidad media de la placa D definida por los puntos del plano interior a $x^2+y^2+2y=0$ y exterior a $x^2+y^2=2$ siendo la función de densidad $\delta\left(x,y\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Solución

Se trata de calcular

$$densidad\ \ media = \frac{\iint_D \delta\left(x,y\right) dA}{area(\mathrm{D})}$$

donde D es la región comprendida entre las dos circunferencias siguientes: $x^2+\left(y+1\right)^2=1$, $x^2+y^2=2$.



Los puntos de corte son (1, -1) y (-1,-1) ya que $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+2y=0 \\ x^2+y^2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2+2y=0 \Rightarrow y=-1$

Calculamos las dos integralres en polares teniendo en cuenta que

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+2y=0 \\ x^2+y^2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r^2+2rsen\theta=0 \\ r^2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r=-2sen\theta \\ r=\sqrt{2} \end{array}\right\}$$

Calculando las integrales

$$\iint_D \delta(x,y)\,dA = \int_{5\pi/4}^{7\pi/4}\int_{\sqrt{2}}^{-2\operatorname{sen}\theta} dr d\theta = -\int_{5\pi/4}^{7\pi/4}\left(2\operatorname{sen}\theta+\sqrt{2}\right)d\theta = -\frac{\sqrt{2}\left(\pi-4\right)}{2}$$

$$área(D) = \iint_D dA = \int_{5\pi/4}^{7\pi/4}\int_{\sqrt{2}}^{-2\operatorname{sen}\theta} r\ dr d\theta = \int_{5\pi/4}^{7\pi/4}\left(2\operatorname{sen}^2(\theta)-1\right)d\theta = 1$$

Luego la densidad media es $\boxed{d_m = -\frac{\sqrt{2}\left(\pi-4\right)}{2}}$

38 Se considera la región del plano siguiente:

$$A=\left\{(x,y)\,/\quad 0\le y\le 2\,,\quad -\sqrt{2y}\le x\le\sqrt{2y}\ \right\}$$

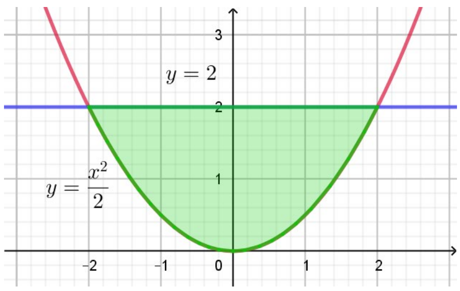
a) Representa esta región gráficamente y defínela en el otro orden (si viniera definida como x-simple, escribirla como y-simple, y viceversa).

b) Calcula el área de A.

c) Supongamos que esta región es una lámina (sin grosor) de un material de densidad de masa proporcional en cada punto a la distancia del punto al eje $y=0$. Encuentra la masa de la lámina.

d) Calcula el valor medio de la función densidad en la placa y los puntos de la placa en los que se alcanza este valor.

Solución



$$A=\left\{(x,y)\,/\quad 0\le y\le 2\,,\quad -\sqrt{2y}\le x\le\sqrt{2y}\ \right\}=$$

$$=\left\{(x,y)\,/\quad -2\le x\le 2\,,\quad \frac{x^2}{2}\le y\le 2\right\}$$

$$\acute{a}rea = \int_{-2}^{2}\int_{\frac{x^2}{2}}^{2} dydx = \frac{16}{3} \qquad \text{ó} \qquad \acute{a}rea = \int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dxdy = \frac{16}{3}$$

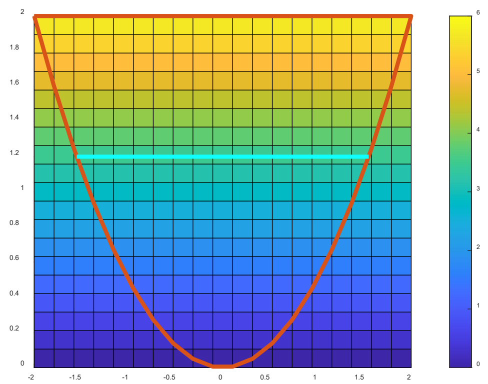
Teniendo en cuenta que la densidad es $\delta\left(x,y\right) = ky$ la masa es

$$masa = \iint_D \delta\left(x,y\right) dA = \int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} ky \; dxdy = \frac{32}{5}k$$

$$valor \;\; medio = \frac{\iint_D \delta\left(x,y\right) dA}{\acute{a}rea} = \frac{\frac{32}{5}k}{16\,/\,3} = \frac{6}{5}k$$

Se alcanza el valor medio en los puntos $\left\{\left(x,y\right) / \; -2\sqrt{\frac{3}{5}} \le x \le 2\sqrt{\frac{3}{5}} \;, \quad y = \frac{6}{5}\right\}$

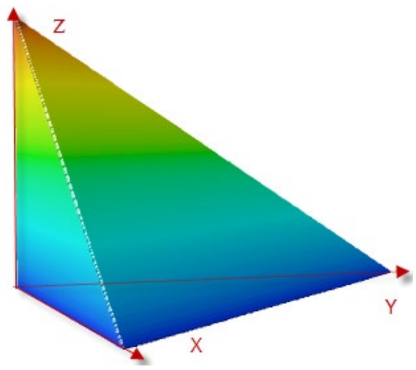
En la imagen siguiente se muestran coloreada sobre la placa la función densidad para k=3. La línea azul sería los puntos de la placa que están a densidad media.



39 Resolver con Matlab el siguiente ejercicio

a) Calcular el volumen del sólido H limitado por los planos coordenados y el plano $z = a - y - x$

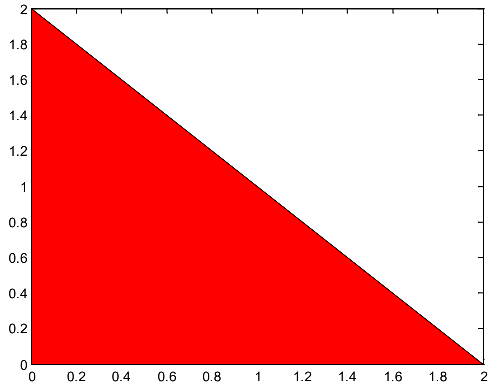
b) Representar el dominio de proyección del sólido H sobre el plano XY.



Solución

Los puntos de corte con los ejes coordenados son $(a,0,0)$, $(0,a,0)$ y $(0,0,a)$. La proyección de H sobre el plano XY es el interior del triángulo de vértices $(0,a,0)$, $(0,0,0)$ y $(a,0,0)$.

```
a=2;
fill([0 0 a],[a 0 0],'r')
%El commando fill rellena del color indicado en el tercer
%argumento, en este caso sería rojo, el polígono de vertices
%(0,a), (0,0) y (a,0)
```



El volumen del sólido H es por tanto:

$$vol(H) = \int_0^a \int_0^{a-x} \int_0^{a-x-y} dz dy dx = \int_0^a \int_0^{a-x} (a-x-y) dy dx$$

Para calcular la integral se deberá escribir el siguiente código:

```
a=2;
syms x y z
int(int(a-x-y,y,0,a-x),x,0,a)
```

INTEGRAL TRIPLE

40 Calcular el volumen y el centro de gravedad del sólido limitado por el cilindro $z = 4 - x^2$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $y = 6$, $z = 0$, siendo la densidad constante e igual a k.

Solución

Definición (**Centro de gravedad**).- Sea V un sólido básico cuya densidad se expresa mediante una función continua $\lambda = \lambda(x,y,z)$. Las coordenadas del centro de masas o centro de gravedad (x_M, y_M, z_M) son medias ponderadas de la densidad

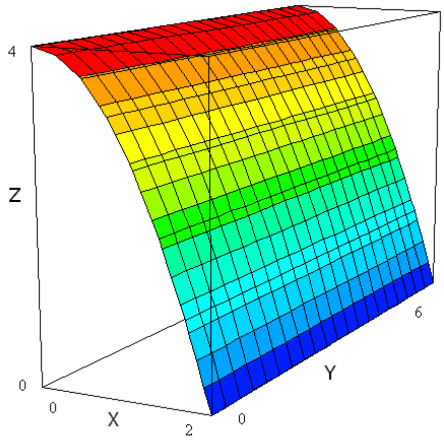
$$x_M = \frac{\iiint_V x\,\lambda(x,y,z)dxdydz}{M}; \quad y_M = \frac{\iiint_V y\,\lambda(x,y,z)dxdydz}{M};$$

$$z_M = \frac{\iiint_V z\,\lambda(x,y,z)dxdydz}{M}$$

Los denominadores representan la masa del sólido, $M = \iiint_V \lambda(x,y,z)dxdydz$

La intersección de $z = 4 - x^2$ con $z = 0$ será $x = \pm 2$.

La solución $x = -2$ no sirve por estar limitado por $x = 0$, por tanto $0 \le x \le 2$.



$$V = \iiint_S dx\,dy\,dz = \int_0^2 \left[\int_0^6 \left(\int_0^{4-x^2} d\,z \right) dy \right] dx = \int_0^2 \left[\int_0^6 \left(4 - x^2 \right) dy \right] dx,$$

por otro lado $\int_0^6 \left(4 - x^2 \right) d\,y = \left[4\,y - x^2\,y \right]_0^6 = 24 - 6\,x^2$, luego

$$V = \int_0^2 \left(24 - 6\,x^2 \right) d\,x = \left[24\,x - 2\,x^3 \right]_0^2 = 48 - 16 = 32 \qquad \Rightarrow \qquad Masa = Vk = 32k$$

$$x_G = \frac{\iiint_S k\,x\,dx\,dy\,dz}{32\,k}$$

$$\iiint_S k\,x\;\; dx\,dy\,dz = k\int_0^2 \left[\int_0^6 \left(\int_0^{4-x^2} x\,dz \right) dy \right] dx = k\int_0^2 \left[\int_0^6 \left(4\,x - x^3 \right) dy \right] dx =$$

$$= \int_0^6 \left(4\,x - x^3 \right) d\,y = \left[4\,x\,y - x^3 y \right]_0^6 = 24\,x - 6\,x^3 \;\;;$$

por tanto $\iiint_S kx\,dx\,dy\,dz = k\int_0^2 \left(24\,x - 6\,x^3 \right) dx = k\left[12\,x^2 - \frac{3}{2}x^4 \right]_0^2 = 24k$, luego

$$x_G = \frac{\iiint_S k\,x\,dx\,dy\,dz}{32\,k} = \frac{24k}{32k} = \frac{3}{4} \text{ u d l}$$

$$y_G=\frac{\iiint_S k\,y\,dx\,dy\,dz}{32\,k}$$

$$\iiint_S ky\,dx\,dy\,dz=k\int_0^2\left[\int_0^6\left(\int_0^{4-x^2}y\,dz\right)dy\right]dx=k\int_0^2\left[\int_0^6\left(4-x^2\right)y\,dy\right]dx=$$

$$=\int_0^6\left(4-x^2\right)y\,d\,y=\left[\left(4-x^2\right)\frac{y^2}{2}\right]_0^6=18\left(4-x^2\right);$$

Por tanto $\iiint_S ky\,dx\,dy\,dz=18\,k\int_0^2\left(4-x^2\right)dx=18\,k\left[4\,x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=96\text{k}$; es decir

$$y_G=\frac{\iiint_S k\,y\,dx\,dy\,dz}{32\,k}=3\text{ u d l}$$

$$z_G=\frac{\iiint_S k\,z\,dx\,dy\,dz}{32\,k}$$

$$I=\iiint_S k\,z\,dx\,dy\,dz=k\int_0^2\left[\int_0^6\left(\int_0^{4-x^2}zdz\right)dy\right]dx$$

Como

$$\int_0^{4-x^2}zdz=\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{4-x^2}=\frac{1}{2}(4-x^2)^2=8-4\,x^2+\frac{1}{2}x^4$$

$$\int_0^6\left(\int_0^{4-x^2}zdz\right)dy=\int_0^6\left(8-4\,x^2+\frac{1}{2}x^4\right)dy=\left[\left(8-4\,x^2+\frac{1}{2}x^4\right)y\right]_0^6=6\left(8-4\,x^2+\frac{1}{2}x^4\right)$$

$$I=\iiint_S k\,z\,dx\,dy\,dz=k\int_0^2\left[\int_0^6\left(\int_0^{4-x^2}zdz\right)dy\right]dx=$$

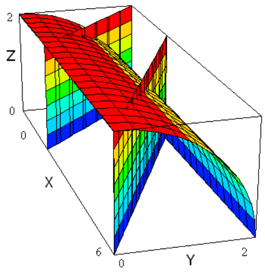
$$=6\,k\int_0^2\left(8-4\,x^2+\frac{1}{2}x^4\right)d\,x=6\,k\left[8\,x-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5\right]_0^2=\frac{256k}{5};\qquad z_G=\frac{8}{5}\text{ u d l}$$

41 Calcular J= $\iiint_V zdxdydz$, siendo V la región limitada en el primer octante por los planos $x+y=2$, $2y+x=6$ y el cilindro $y^2+z^2=4$.

Solución

Por estar la integral extendida solamente al primer octante en lo que respecta a los valores de z, es decir $z = \pm\sqrt{4-y^2}$ únicamente tomaremos el positivo, por tanto, tenemos:

$$J = \iint_D dx\,dy \left[\int_0^{+\sqrt{4-y^2}} z\,dz \right] \quad \text{(I)}$$



siendo D el dominio en el plano XOY limitado por las rectas

$x + y = 2\,,\; 2y + x = 6$

Calculamos previamente la integral respecto de la variable z

$$\int_0^{+\sqrt{4-y^2}} z\,dz = \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{+\sqrt{4-y^2}} = \frac{4-y^2}{2};$$

sustituyendo en (I) se obtiene

$$J = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 (4-y^2)\,dy \left(\int_{2-y}^{6-2y} dx \right) \right) \quad \text{siendo} \quad \int_{2-y}^{6-2y} dx = \left[x \right]_{2-y}^{6-2y} = 4 - y\,;$$

luego sustituyendo queda

$$J = \frac{1}{2}\int_0^2 (y^3 - 4y^2 - 4y + 16)\,dy\,,$$

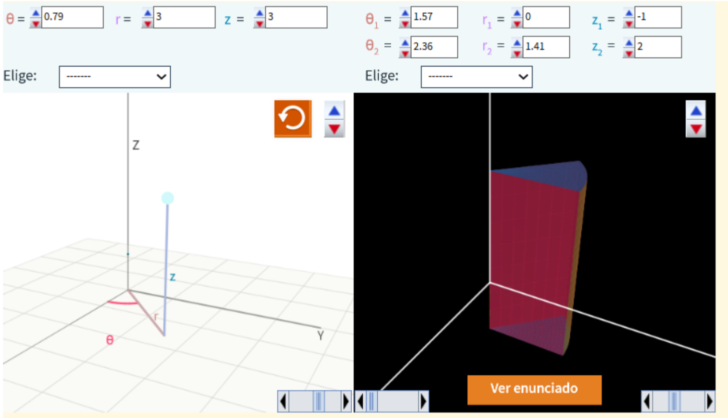
resolviendo la integral se tiene $\boxed{J = \dfrac{26}{3}}$

INTEGRAL TRIPLE. COORDENADAS CILÍNDRICAS

42 Realizar los ejemplos que se muestran en las siguientes herramientas interactivas que se encuentran en la página

https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/integracion_multiple.html

Coordenadas cilíndricas



43 Escribe el código Matlab para representar el sólido cuyo volumen esté dado por la integral siguiente en coordenadas cilíndricas

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{1}\int_{r^4}^{r} r\ dz\ dr\,d\theta$$

El sólido que viene dado por la integral en coordenadas cilíndricas se define de la forma siguiente,

$$\begin{aligned} &0 \le \theta \le \pi / 2 \\ &0 \le r \le 1 \\ &r^4 \le z \le r \end{aligned}$$

El dominio D en el que se proyecta el sólido es el interior de la circunferencia de centro 0 y radio 1 en el primer cuadrante

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le \theta \le \pi / 2 \\ 0 \le r \le 1 \end{array}\right\} \quad \to \quad \left.\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \end{array}\right\}$$

y la coordenada z varía entre las superficies

$$f_1(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2} = f_2(x,y)$$

Representando estas dos superficies el sólido se encontrará entre ambas. Considerando la ecuación en implícitas de estas superficies,

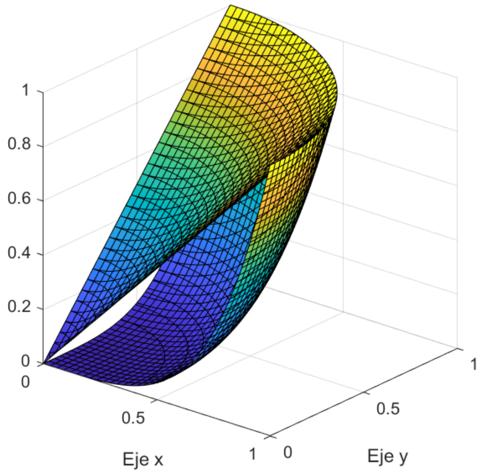
$$z = \left(x^2+y^2\right)^2 \to F_1(x,y,z) = \left(x^2+y^2\right)^2 - z = 0$$

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \to F_2(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} - z = 0$$

El código Matlab es

```
F1=@(x,y,z) (x.^2+y.^2).^2-z
F2=@(x,y,z) sqrt(x.^2+y.^2)-z
fimplicit3(F1,[0 1 0 1 0 1])
hold on
fimplicit3(F2,[0 1 0 1 0 1])
hold off
```

```
xlabel("Eje x")
ylabel("Eje y")
axis equal
```



44

(a) Se considera el sólido H cuyos puntos están acotado inferiormente por la superficie $z = \dfrac{x^2+y^2}{2}$ y son interiores a a $x^2+y^2+z^2 = \dfrac{5}{4}$. Este sólido tiene una densidad variable, igual a la distancia de cada punto al plano $z = 0$. Plantea la integral para calcular la masa de H, justificando la respuesta, y obtén después el resultado en Matlab.

Solución

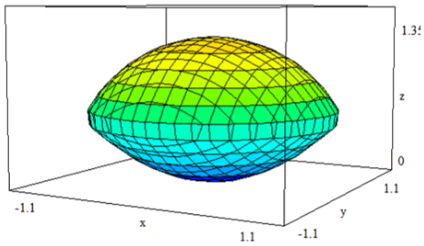
Para calcular la intersección tenemos que encontrar los puntos que verifican

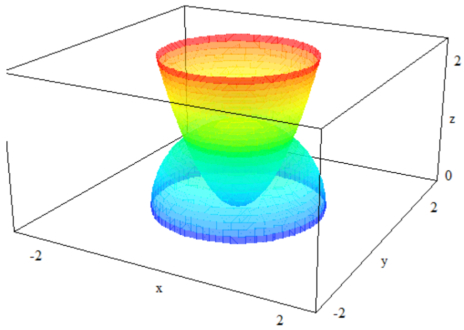
$$\left.\begin{array}{l} 2z = x^2+y^2 \\ z^2 - \dfrac{5}{4} = x^2+y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad 2z + z^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow z = \frac{1}{2}$$

Se cortan en la curva $x^2+y^2 = 1, \quad z = \dfrac{1}{2}$.

El sólido H se describe como

$$\begin{array}{l} (x,y) \in D \quad (círculo \;\; unidad) \\ \dfrac{x^2+y^2}{2} \le z \le \sqrt{\dfrac{5}{4} - x^2 - y^2} \end{array}$$





Utilizando coordenadas cilíndricas

$$0 \le \theta \le 2\pi \qquad\qquad 0 \le r \le 1 \qquad\qquad \frac{r^2}{2} \le z \le \sqrt{\frac{5}{4} - r^2}$$

La masa será

$$\iiint_H z\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2/2}^{\sqrt{5/4 - r^2}} rz\ dz\ dr\, d\theta = \frac{\pi}{3}$$

El cálculo con Matlab es

```
int(int(int(r*z, z, r^2/2,sqrt(5/4-r^2)),r,0,1),t,0,2*pi)
```

Para obtener el volumen se deberá calcular

$$\iint_D \left(\sqrt{\frac{5}{4} - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\sqrt{\frac{5}{4} - r^2} - \frac{r^2}{2} \right] r\ dr\ d\theta = \frac{\pi \left(5^{3/2} - 4\right)}{12} \approx 1.8798$$

La aproximación de la integral que da el volumen

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\sqrt{\frac{5}{4} - r^2} - \frac{r^2}{2} \right] r\ dr\ d\theta$$

mediante la suma de Riemann pedida es

```
m=8;n=4;
incr=1/m;
inct=2*pi/n;  vt=0:inct:2*pi-incr;  vr=0:incr:1-incr;
[T,R]=meshgrid(vt,vr);
f=(sqrt(5/4-R.^2)-R.^2/2).*R;
sum(f(:))*incr*inct
```

Sol. 1.8464

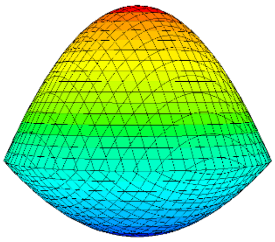
45

a) Calcular el volumen del sólido H limitado superiormente por $z = 2 - x^2 - y^2$ e inferiormente por $z = \left(x^2 + y^2\right) / 2$.

(b) Calcular el volumen del sólido H limitado superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e inferiormente por $z = \left(x^2 + y^2\right) / 2$.

Solución a)

El sólido está limitado por dos paraboloides



La curva intersección es:

$$\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = \left(x^2 + y^2\right) / 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{4}{3} \\ z = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Llamando D al interior de la curva proyectada sobre el plano XY

$$D = \left\{ \left(x, y\right) / \ x^2 + y^2 \leq \frac{4}{3} \right\}$$

se tendrá que el sólido H es el conjunto de puntos $\left(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}\right) \in \mathbb{R}^3$ cumpliendo

$$\left(x, y\right) \in D \qquad \frac{x^2 + y^2}{2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$$

En coordenadas cilíndricas

$$\left(r, \theta, \mathrm{z}\right) \in \mathbb{R}^3 \qquad 0 \leq r \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad \frac{r^2}{2} \leq z \leq 2 - r^2$$

El volumen se podrá calcular como:

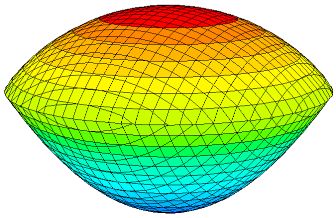
$$V = \int_0^{2/\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_{r^2/2}^{2-r^2} r \ dz \ d\theta \ dr \quad \text{o} \quad V = 4 \int_0^{2/\sqrt{3}} \int_0^{\pi/2} \int_{r^2/2}^{2-r^2} r \ dz \ d\theta \ dr \ \text{(utilizando simetrías)}$$

El código Matlab es:

```
syms z t r
int(int(int(r,z,r^2/2,2-r^2),t,0,2*pi),r,0,2/sqrt(3))
```

Apartado b)

El sólido está limitado superiormente por una esfera e inferiormente por un paraboloide



La curva intersección es:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=\left(x^2+y^2\right)/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z+z^2=4 \\ z=\left(x^2+y^2\right)/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-1+\sqrt{5} \\ x^2+y^2=-2+2\sqrt{5} \end{cases}$$

Llamando D al interior de la curva proyectada sobre el plano XY

$$D=\left\{\left(x,y\right)/\ x^2+y^2\le -2+2\sqrt{5}\right\}$$

se tendrá que el sólido H es el conjunto de puntos $\left(x,\mathrm{y},\mathrm{z}\right)\in\mathbb{R}^3$

$$con\ \left(x,y\right)\in D \qquad \frac{x^2+y^2}{2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}$$

En coordenadas cilíndricas

$$\left(r,\theta,\mathrm{z}\right)\in\mathbb{R}^3 \qquad 0\le r\le\sqrt{-2+2\sqrt{5}} \quad 0\le\theta\le 2\pi \quad \frac{r^2}{2}\le z\le\sqrt{4-r^2}$$

El volumen se podrá calcular como:

$$V=\int_0^{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}\int_0^{2\pi}\int_{r^2/2}^{\sqrt{4-r^2}} r\ dz\ d\theta\ dr \quad \text{o} \quad V=4\int_0^{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}\int_0^{\pi/2}\int_{r^2/2}^{\sqrt{4-r^2}} r\ dz\ d\theta\ dr$$

(utilizando simetrías)

El código Matlab es:

```
syms z t r
a=sqrt(-2+2*sqrt(5))
volumen=int(int(int(r,z,r^2/2,sqrt(4-r^2)),t,0,pi/2),r,0,a)
double(volume)
```

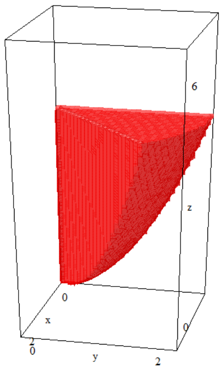
46 Dado H la porción de sólido del primer octante limitado por $z=x^2+y^2$, $z=4$, $x=y$, $x=0$, se pide

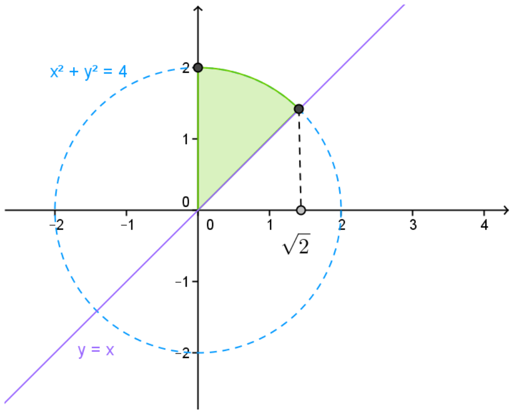
a) Escribir esta región en coordenadas cartesianas.

b) Calcular su volumen (no necesariamente utilizando coordenadas cartesianas).

Solución a)

En la imagen se muestra a la izquierda el hólido H y a la derecha la proyección sobre el dominio XY





La expresión en coordenadas cartesianas es

$$H=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; 0\le x\le\sqrt{2},\, x\le y\le\sqrt{4-x^2},\, x^2+y^2\le z\le 4\right\}$$

Solución b)

Utilizando coordenadas cilíndricas,

$$H=\left\{(r,\theta,z)\;/\;\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\,0\le r\le 2,\, r^2\le z\le 4\right\}$$

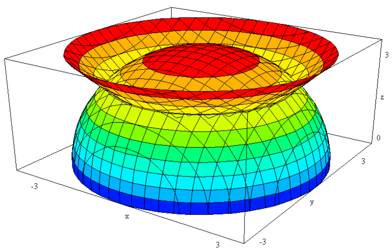
$$volumen\ \ H=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{0}^{2}\int_{r^2}^{4} r\ dz\ dr\ d\theta=\frac{\pi}{4}\int_0^2\left(4r-r^3\right)dr=\frac{\pi}{4}\left(2r^2-\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2}=\frac{\pi}{4}\left(8-4\right)=\pi$$

Nota: Se trata de la octava parte del paraboloide limitado por el plazo z=4.

$$volumen\ \ H=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^{4} r\ dz\ dr\ d\theta=\pi$$

47 Hallar el volumen definido por $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2\le 9$.

Solución



Para obtener el dominio, eliminamos la *z* entre las ecuaciones

$$\begin{cases} z^2=x^2+y^2\\ x^2+y^2+z^2=9\end{cases}$$

resultando $x^2+y^2=\dfrac{9}{2}$, que es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Sean $z_1=\sqrt{9-\left(x^2+y^2\right)}$ y $z_2=\sqrt{x^2+y^2}$. Para saber cuál de estas superficies está por encima y cuál por debajo, tomamos un punto interior al dominio *D*, por ejemplo el $(0,0)$, obteniéndose $z_1=3$ y $z_2=0$.

Por tanto $z_1 \geq z_2$ y el volumen vendrá dado por

$$V=\iint_D \left(z_1-z_2\right)dxdy=\iint_D \left(\sqrt{9-\left(x^2+y^2\right)}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

Por simetría en la frontera del dominio y en la función subintegral, ya que al cambiar x por $-x$ e y por $-y$ ninguna de las dos cambia podemos escribir

$$V=4\iint_{D'} \left(\sqrt{9-\left(x^2+y^2\right)}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

Siendo D' el cuadrante del círculo de centro $(0,0)$ y radio $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. La integral se resuelve en polares:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\operatorname{sen}\theta \\ J=r \end{cases} \qquad \text{El nuevo dominio es:} \qquad D''\equiv\left\{0\leq r\leq\frac{3}{\sqrt{2}}\ ;\quad 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right\}$$

Y el volumen:

$$V=4\iint_{D''}\left(\sqrt{9-r^2}-r\right)rdrd\theta=4\iint_{D''} r\sqrt{9-r^2}\,drd\theta-4\iint_{D''} r^2drd\theta = \text{A + B}$$

Calculamos las integrales A y B:

$$A=4\iint_{D''} r\sqrt{9-r^2}\,drd\theta=4\int_o^{\pi/2}d\theta\int_o^{3/\sqrt{2}} r\sqrt{9-r^2}\,dr=\left\{\begin{array}{l} 9-r^2=t^2\rightarrow rdr=-tdt \\ r=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\rightarrow 9-\dfrac{9}{2}=\dfrac{9}{2}=t^2\rightarrow t=\dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ r=0\rightarrow 9-0=t^2\rightarrow t=3 \end{array}\right\}$$

Primera integral iterada:

$$\int_0^{3/\sqrt{2}} r\sqrt{9-r^2}\,dr=-\int_3^{3/\sqrt{2}} t^2dt=\left[-\frac{t^3}{3}\right]_3^{3/\sqrt{2}}=-\frac{1}{3}\left(\frac{27}{2\sqrt{2}}-27\right)=\frac{9}{2\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

Segunda integral iterada:

$$4\int_o^{\pi/2}d\theta=4\left[\theta\right]_0^{\pi/2}=4\left[\frac{\pi}{2}-0\right]=2\pi$$

$$A=4\int_o^{\pi/2}d\theta\int_o^{3/\sqrt{2}}r\sqrt{9-r^2}dr=-\frac{9}{2\sqrt{2}}2\pi\left[1-2\sqrt{2}\right]=-\frac{9\pi}{\sqrt{2}}\left[1-2\sqrt{2}\right]\text{ u. d. v.}$$

$$B=-4\iint_{D''}r^2drd\theta=-4\int_o^{\pi/2}d\theta\int_o^{3/\sqrt{2}}r^2dr=-4\left[\theta\right]_0^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{3/\sqrt{2}}=-\frac{9\pi}{\sqrt{2}};$$

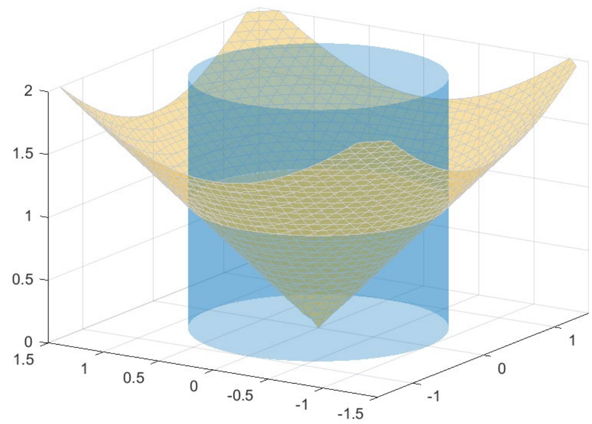
Finalmente,

$$\text{V = A + B} =-\frac{9\pi}{\sqrt{2}}\left[1-2\sqrt{2}\right]-\frac{9\pi}{\sqrt{2}}=\frac{9\pi}{\sqrt{2}}\left[2\sqrt{2}-2\right]=9\pi\left[2-\sqrt{2}\right]\quad\text{u. d. v}$$

48 Evalúa $\iiint_H x^2dV$ donde V es el sólido que está dentro de $x^2+y^2=1$, por encima del plano $z=0$ y por debajo del cono $z^2=x^2+y^2$.Nota: Plantea las integrales a mano y realiza el cálculo de las integrales con Matlab

Solución

El sólido V es el conjunto de puntos del espacio que está dentro del cilindro $x^2+y^2=1$, por encima del plano $z=0$ y por debajo del cono $z^2=x^2+y^2$. La figura siguiente muestra la representación del cilindro y el cono.



El sólido V se puede describir en coordenadas cartesianas (x,y,z) donde (x,y) son los puntos del círculo unidad y $0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}$. Utilizando coordendas cilíndricas, el sólido V se puede describir de la forma siguiente

$$0\le\theta\le 2\pi\qquad 0\le r\le 1\qquad 0\le z\le r$$

La integral pedida será entonces

$$\iiint_H x^2dV=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^r r^2\cos^2\theta\ r\ dz\,dr\,d\theta$$

El código matlab para calcularla es el siguiente:

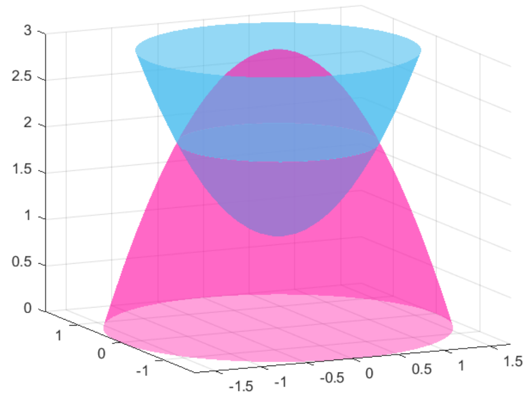
```
syms r theta z
I=int(int(int(r^3*cos(theta)^2,z,0,r),r,0,1),theta,0,2*pi)
double(I)
```

E_02

Se considera el sólido H que ocupa la región del espacio limitada superiormente por $z = 3 - x^2 - y^2$ e inferiormente por $z = 1 + x^2 + y^2$. Cada punto de H está a una temperatura dada por la función $T(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$. Sea S la superficie frontera de H. Se pide calcular la temperatura media del sólido H.

Solución

El sólido H está limitado por los dos paraboloides, el azul de la figura siguiente, S1, que tiene por ecuación $z = 1 + x^2 + y^2$ y el rosa S2 de ecuación $z = 3 - x^2 - y^2$. Estas dos superficies encierran al sólido H.



Para calcular la temperatura media del sólido H se deberá calcular

$$T_{media} = \frac{T_{total\,en\,H}}{volumen(H)} = \frac{\iiint\limits_H T(x, y, z)\, dV}{\iiint\limits_H dV}$$

Los dos paraboloides se cortan en la curva

$$\left.\begin{array}{l} z = 3 - x^2 - y^2 \\ z = 1 + x^2 + y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1,\ z = 2$$

Por lo que la proyección del sólido sobre el plano XY es el dominio D, interior del círculo de centro (0,0) y radio 1. Los puntos de sólido H serán

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ tales\ \ que\ (x, y) \in D, \quad z_{\inf} \le z \le z_{\sup}$$

$$volumen\left(H\right)=\iiint\limits_{H} dV=\iint\limits_{(x,y)\in D}\left(z_{\text{sup}}-z_{\text{inf}}\right)dA=\iint\limits_{(x,y)\in D}\left(3-x^2-y^2-\left(1+x^2+y^2\right)\right)dA=$$

$$\iint\limits_{(x,y)\in D}\left(2-2x^2-2y^2\right)dA\underset{\substack{pasando\,a\\ polares}}{=}2\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(1-r^2\right)rdrd\theta=4\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)_{r=0}^{r=1}=\pi$$

Para calcular la temperatura en H se tendrá que calcular la siguiente integral

$$volumen\left(H\right)=\iiint\limits_{H} T(x,y,z)dV=\iint\limits_{(x,y)\in D}\left[\int_{1+x^2+y^2}^{3-x^2-y^2}\frac{1}{\sqrt{z}}dz\right]dA=\iint\limits_{(x,y)\in D}\left(2\sqrt{z}\right)_{z=1+x^2+y^2}^{z=3-x^2-y^2}dA=$$

$$=\iint\limits_{(x,y)\in D}2\left(\sqrt{3-x^2-y^2}-\sqrt{1+x^2+y^2}\right)dA\underset{\substack{pasando\\ a\,polares}}{=}\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(2r\sqrt{3-r^2}-2r\sqrt{1+r^2}\right)drd\theta=$$

$$=2\pi\left[-\frac{\left(3-r^2\right)^{3/2}}{3/2}-\frac{\left(1+r^2\right)^{3/2}}{3/2}\right]_{r=0}^{r=1}=\frac{4\pi}{3}\left[-2^{3/2}+3^{3/2}-2^{3/2}+1\right]=\frac{4\pi}{3}\left[-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+1\right]$$

La temperatura media es

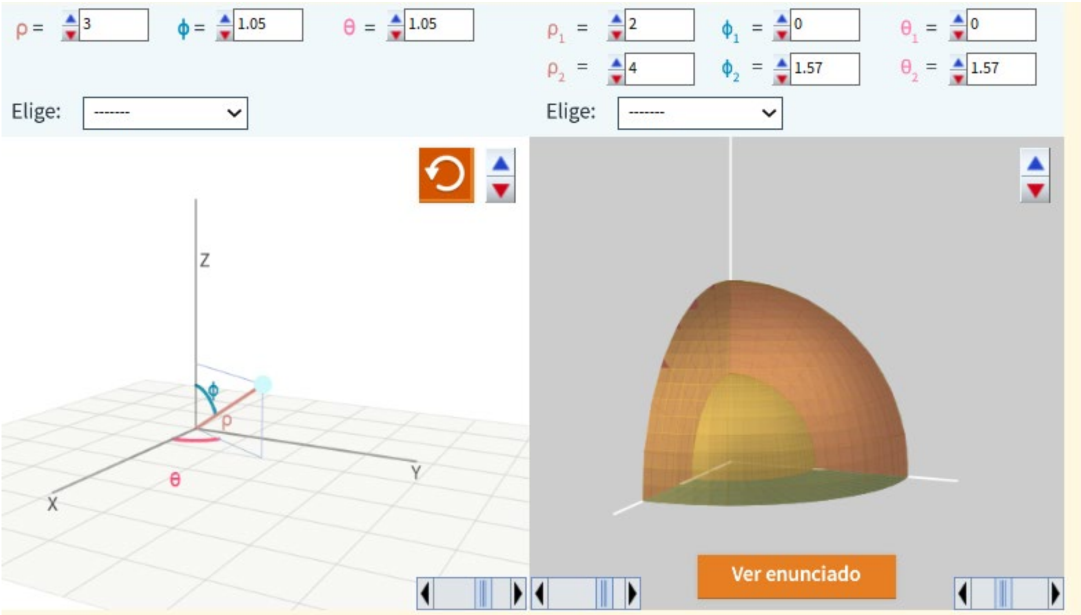
$$T_{media}=\frac{T_{total\,en\,H}}{volumen(H)}=\frac{\frac{4\pi}{3}\left[-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+1\right]}{\pi}=\frac{4\left[-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+1\right]}{3}$$

INTEGRAL TRIPLE. COORDENADAS ESFÉRICAS

49 Realizar los ejemplos que se muestran en las siguientes herramientas interactivas que se encuentran en la página

https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/integracion_multiple.html

Coordenadas esféricas



50 Dado el punto $\left(\rho,\phi,\theta\right)=\left(4,\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ en coordenadas esféricas, escribirlo en coordenadas cartesianas y coordenadas cilíndricas.

Solución

Considerando la expresión que relaciona las coordenadas cartesianas con las esféricas

$$\begin{cases} x=\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ y=\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ z=\rho\cos\phi \end{cases}$$

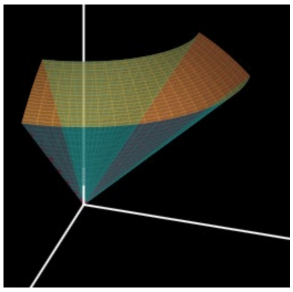
se tiene sustituyendo $\left(\rho,\phi,\theta\right)=\left(4,\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ que $\left(x,y,z\right)=\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0\right)$.

Considerando estas coordenadas cartesianas y la relación con las coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\operatorname{sen}\theta \\ z=z \end{cases} \qquad \text{se tendrá } \left(r,\theta,z\right)=\left(4,\frac{\pi}{4},0\right).$$

51 Describe en esféricas el sólido determinado por los puntos del espacio del primer octante que son exteriores a $z=\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}$ e interiores a las superficies $z=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}$ y $x^2+y^2+z^2=16$.

Solución



$$0 \le \rho \le 4, \qquad \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

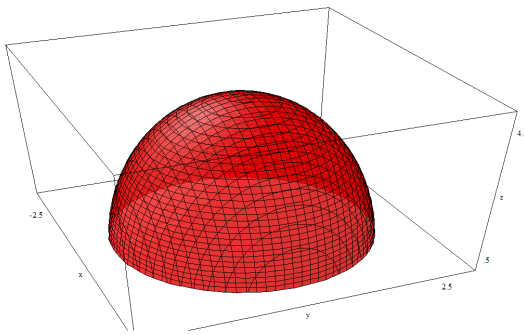
52 Hallar la masa de la porción del sólido limitado por $z = \sqrt{16 - 4x^2 - 4y^2}$ y el plano z=0, siendo la densidad en un punto de dicho sólido proporcional a la distancia entre el punto y el plano z=0.

Solución

La masa de la porción de sólido es

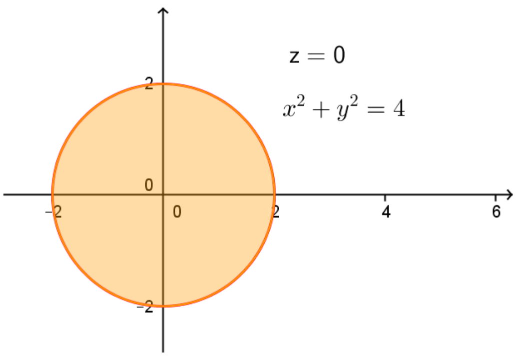
$$m = \iiint_H \delta\left(x, y, z\right) dV$$

donde $\delta\left(x, y, z\right) = kz$ es la función de densidad (k es la constante de proporcionalidad) y H es el sólido limitado por $z = \sqrt{16 - 4x^2 - 4y^2}$ y el plano z=0.



Utilizando coordenadas cilíndricas

$$\delta\left(r, \theta, z\right) = kz \quad H \equiv \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le \sqrt{16 - 4r^2} \end{cases}$$



La masa del sólido es

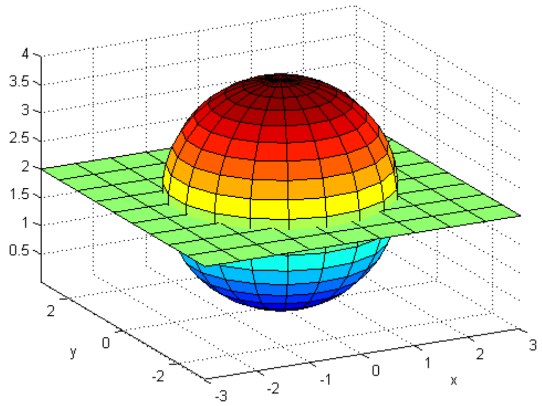
$$m = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{16-4r^2}} k\,z\,rdz\,dr\,d\theta = k\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{2} \left.\frac{z^2}{2}\right|_{z=0}^{z=\sqrt{16-4r^2}} rdr\right) =$$

$$= k\pi\int_0^{2}\left(16-4r^2\right)rdr = k\pi\left[8r^2 - r^4\right]_{r=0}^{r=2} = 16k\pi$$

53 Una esfera de radio a está situada de forma que es tangente al plano horizontal en el origen y su diámetro está sobre el eje OZ.

Plantear una integral triple en coordenadas esféricas para calcular el volumen de la esfera situado sobre el plano $z = a$. Se escribirán los límites de integración, pero no se calculará la integral.

Solución



Esfera en cartesianas:

$$x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$$

Relación entre cartesianas y esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

El volumen de la semiesfera que está situada por encima del plano $z = a$, se calcula con la siguiente integral triple:

$$V = \iiint_H dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_{a/\cos\phi}^{2a\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

Nótese que la variación de ϕ es $0 \le \phi \le \pi/4$, por tratarse de la semiesfera con $z \ge a$.

54 Considera el cubo en esféricas dado por

$$H = \{(\rho,\theta,\phi)\,/\quad \rho_1 \le \rho \le \rho_2,\quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2,\quad \phi_1 \le \phi \le \phi_2\}$$

cuya densidad de masa en cada punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al origen de coordenadas.

Encuentra a mano las fórmulas que dan el volumen de H, su masa y el valor promedio de la densidad. Encuentra también el lugar geométrico de los puntos donde la función densidad alcanza ese valor promedio.

Solución

$$Volumen = \iiint_H dV = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \cdot d\theta \cdot d\phi \cdot d\rho = \frac{1}{3}\left(\theta_2 - \theta_1\right)\left(\cos\phi_1 - \cos\phi_2\right)\left(\rho_2^3 - \rho_1^3\right)$$

$$Masa = \iiint_H \lambda\left(x,y,z\right) dV = \iiint_H \frac{k}{x^2+y^2+z^2} dV = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{k}{\rho^2}\rho^2 \operatorname{sen}\varphi \cdot d\theta \cdot d\phi \cdot d\rho$$

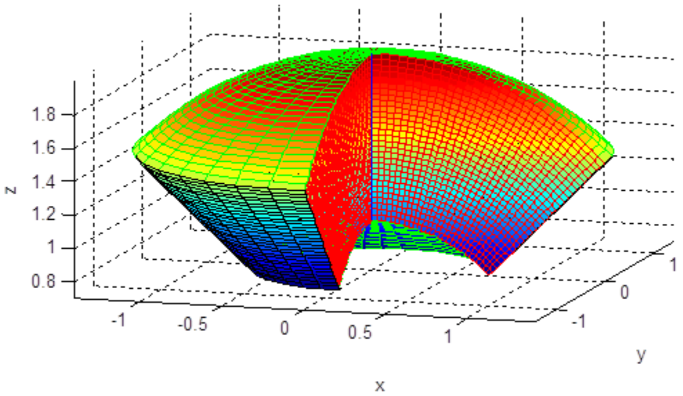
$$Masa = k\left(\theta_2 - \theta_1\right)\left(\cos\phi_1 - \cos\phi_2\right)\left(\rho_2 - \rho_1\right)$$

$$Densidad \quad media = \frac{masa}{volumen} = \frac{3k\left(\rho_2 - \rho_1\right)}{\left(\rho_2^3 - \rho_1^3\right)} = \frac{3k}{\left(\rho_2^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_1^2\right)}$$

El lugar geométrico de los puntos donde la función densidad alcanza su valor promedio se obtiene igualando la función densidad a su valor medio, es decir

$$\lambda\left(x,y,z\right) = \frac{k}{x^2+y^2+z^2} = \frac{3k}{\left(\rho_2^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_1^2\right)} \quad \rightarrow \quad x^2+y^2+z^2 = \frac{\left(\rho_2^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_1^2\right)}{3}$$

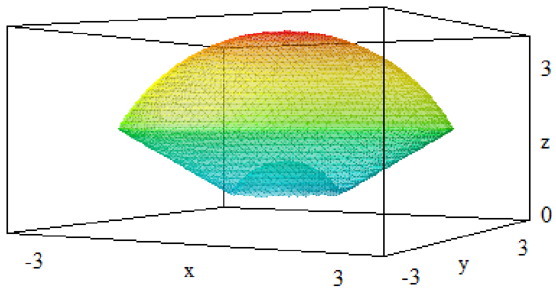
Concluimos que se trata de la esfera de centro $\left(0,0,0\right)$ y radio = $\sqrt{\dfrac{\left(\rho_2^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_1^2\right)}{3}}$



55 Un sólido H está formado por todos los puntos $\left(x,y,z\right) \in \mathbb{R}^3$ que están dentro del cono $z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ y que además verifican $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9$. Se pide:

a) Calcular el volumen de H.

b) Calcular la temperatura media sabiendo que en cada punto esa temperatura viene dada por $T\left(x,y,\mathrm{z}\right) = \dfrac{1}{z\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$.



Apartado a)

Dado que H está limitado por dos esferas y un cono, lo definimos en coordenadas esféricas transformando a este sistema las ecuaciones de las superficies dadas. Teniendo en cuenta $\left\{ x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta,\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta,\ z = \rho\cos\varphi \right\}$, resulta

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \to \rho^{\,2} = 1 \to \rho = 1;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \to \rho^{\,2} = 9 \to \rho = 3;$$

$$z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \to \rho\cos\varphi = \frac{\rho \operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{3}} \to \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \to \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Se define H es esféricas,

$$H = \left\{ (\rho,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 \ /\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3},\ 1 \le \rho \le 3 \right\}$$

La integral para hallar el volumen de H será

$$Volumen(H) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_1^3 \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi \cdot \int_1^3 \rho^2 d\rho =$$

$$= 2\pi \left[-\cos\varphi \right]_0^{\pi/3} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_1^3 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{3} = \frac{26\pi}{3}$$

la integral del numerador para calcular T_{media} será

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_1^3 \frac{1}{\rho\cos\varphi\sqrt{1+\rho^2}} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} d\varphi \cdot \int_1^3 \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} d\rho$$

$$= 2\pi \left[-\log(\cos\varphi) \right]_0^{\pi/3} \cdot \left[\sqrt{1+\rho^2} \right]_1^3 = 2\pi \cdot \left(-\log\left(\frac{1}{2}\right) + \log 1 \right) \cdot \left(\sqrt{10} - \sqrt{2} \right) = 2\pi \log 2 \left(\sqrt{10} - \sqrt{2} \right)$$

Apartado b)

Teniendo en cuenta la definición de temperatura media sobre el sólido H,

$$T_{media} = \frac{\iiint_H T(x,y,z)\, dV}{\text{volumen de } H} = \frac{\iiint_H \frac{1}{z\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}\, dV}{\text{volumen de } H}$$

La temperatura media será

$$T_{media} = \frac{2\pi \log 2\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)}{\frac{26\pi}{3}} = \frac{3\log 2\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)}{13}$$

56 Se considera el sólido H limitado inferiormente por $z = 1 + 2(x^2 + y^2)$ y superiormente por $z = 3 + x^2 + y^2$. Este sólido está sometido a una temperatura variable, proporcional a la distancia de cada punto al plano $z = 0$, con constante de proporcionalidad $k = 1.2$. Se pide

a) calcular la temperatura media del sólido.

b) Determinar los puntos de H que están a temperatura media.

Solución a)

Para plantear las integrales triples, definimos previamente el sólido en coordenadas cilíndricas. Sabemos que la variación de la coordenada z es:

$$1 + 2(x^2 + y^2) \le z \le 3 + x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad 1 + 2r^2 \le z \le 3 + r^2$$

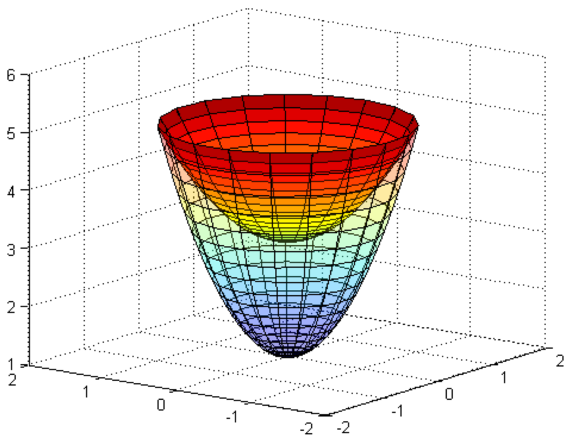
Para saber cuál es la variación de las coordenadas r y θ en el plano XOY, hacemos la intersección de los dos paraboloides,

$$\left.\begin{array}{l} z = 1 + 2(x^2 + y^2) \\ z = 3 + (x^2 + y^2) \end{array}\right\} \rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

Es decir, el sólido se proyecta en el círculo de centro $(0,0)$ y radio $r_0 = \sqrt{2}$

Por lo tanto, la definición de dicho sólido es:

$$H = \left\{1 + 2r^2 \le z \le 3 + r^2,\ 0 \le r \le \sqrt{2}\ ,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$$



Aplicando estos límites, el volumen es:

$$Vol = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{1+2r^2}^{3+r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r\left(2-2r^2\right)dr\,d\theta = 2\pi\left(r^2 - \frac{r^4}{4}\right)_{r=0}^{r=\sqrt{2}} = 2\pi$$

La función temperatura es

$$T(x,y,z)=1.2z \quad \to \quad T(r,\theta,z)=1.2z$$

y la temperatura media es

$$Temp=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{1+2r^2}^{3+r^2}\left(1.2z\right)rdzdrd\theta=1.2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\left(-\frac{3r^5}{2}+r^3+4r\right)drd\theta=$$

$$=1.2\int_0^{2\pi}\left(-\frac{r^6}{4}+\frac{r^4}{4}+2r^2\right)\Bigg|_{r=0}^{r=\sqrt{2}}d\theta=1.2\int_0^{2\pi}\left(-2+1+4\right)d\theta=1.2\cdot 6\pi$$

$$\to \quad T_m=\frac{Temp}{Vol}=\frac{1.2\cdot 6\pi}{2\pi}=3.6$$

Solución b)

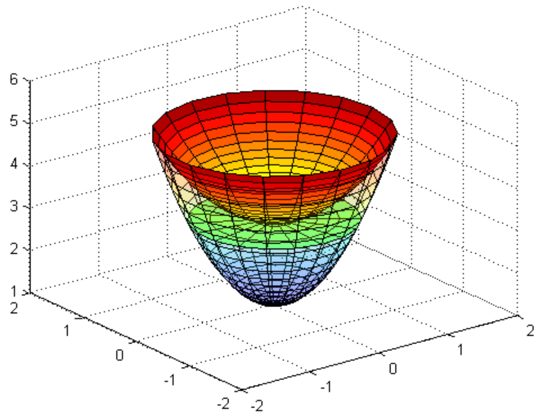
Los puntos del sólido que están a temperatura media son los que verifican

$$1.2\,z=1.2\cdot 3\Rightarrow z=3$$

Con el paraboloide $z=3+x^2+y^2$ solo corta en el punto (0,0,3). Con el otro paraboloide,

$$3=1+2(x^2+y^2) \qquad \Rightarrow \qquad x^2+y^2=1$$

corta en los puntos de la circunferencia unidad. Por lo tanto, los puntos a temperatura media están en un disco de radio 1, situado en el plano $z=3$.

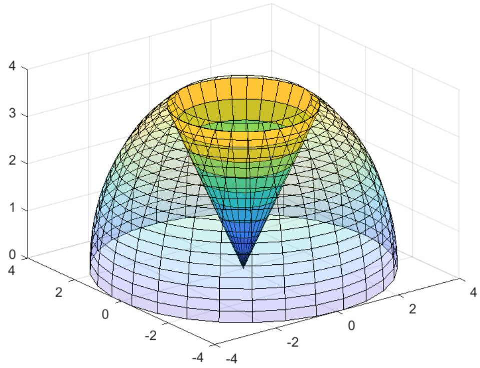


57 Se considera el sólido H en $z\geq 0$ cuyos puntos son exteriores al cono $z^2=4\left(x^2+y^2\right)$ e interiores a la esfera $x^2+y^2+z^2=16$. Este sólido tiene una densidad variable igual a la distancia de cada punto al plano $z=0$. Calcula la densidad media del sólido.

Importante: Deberás hacer el planteamiento a mano y resolver las integrales con Matlab utilizando cálculo simbólico.

Solución

El sólido se representa en la siguiente figura

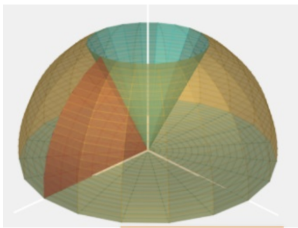


Para plantear las integrales triples, definimos previamente el sólido en coordenadas esféricas al ser el sólido el exterior de un cono e interior a una esfera centrada en el origen de radio 4. La ecuación del cono en coordenadas esféricas es:

$$z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right) \quad \rightarrow \quad \rho^2 \cos^2 \varphi = 4\rho^2 sen^2\varphi \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{4} = tg^2\varphi \quad \rightarrow \quad \varphi = arctg\left(\frac{1}{2}\right)$$

El sólido H se describe en coordenadas esféricas de la forma siguiente



$$0 \le \rho \le 4 \qquad arctg\left(\frac{1}{2}\right) \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Para calcular la densidad total, hay que tener en cuenta que la función densidad es

$$\delta\left(x,y,z\right) = z \rightarrow \delta\left(\rho,\varphi,\theta\right) = \rho\cos\varphi$$

Hay que calcular

$$vol\left(H\right) = \iiint_H dV = \int_0^{2\pi} \int_{arctg\left(\frac{1}{2}\right)}^{\pi/2} \int_0^4 \rho^2 sen\varphi \; d\rho \; d\varphi \; d\theta$$

$$m = \iiint_H \delta\left(x,y,z\right) \, dV = \int_0^{2\pi} \int_{arctg\left(\frac{1}{2}\right)}^{\pi/2} \int_0^4 \rho^3 sen\varphi \cos\varphi d\rho \; d\varphi \; d\theta$$

$$\rightarrow \quad \delta_m = \frac{m}{vol\left(H\right)}$$

Para hacer los cálculos con Matlab se escribirá el siguiente código

```
syms rho phi theta
vol=int(int(int(rho^2*sin(phi),rho,0,4),phi,atan(1/2),pi/2),theta,0
,2*pi)
m=int(int(int(rho^3*sin(phi)*cos(phi),rho,0,4),phi,atan(1/2),
        pi/2),theta,0,2*pi)
dm=double(m/vol)
%valor dm=1.3416
```

58 Calcular el volumen en esféricas del sólido del primer octante que es interior a las superficies $z=\sqrt{4x^2+4y^2}$ y $x^2+y^2+z^2=6$.

Solución

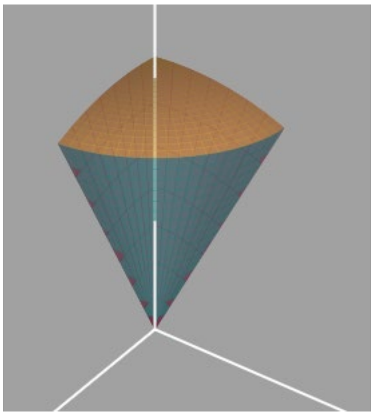
Utilizando coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x=\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ y=\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ z=\rho\cos\phi \end{cases}$$

el sólido es el interior al cono $z=\sqrt{4x^2+4y^2}$ de ecuación $\phi=arctg\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\rho\cos\phi=\sqrt{4\rho^2 sen^2\phi\cos^2\theta+4\rho^2 sen^2\phi sen^2\theta}\Rightarrow\rho\cos\phi=2\rho sen\phi\Rightarrow tg\phi=\frac{1}{2}$$

y la esfera de centro (0,0,0) y radio $\sqrt{6}$, es decir, $\rho=\sqrt{6}$.



El volumen, utilizando coordenadas esféricas, se calculará de la forma siguiente

$$vol=\int_0^{\pi/2}\int_0^{arctg\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\sqrt{6}}\rho^2 sen\phi\ d\rho d\phi d\theta=\frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{6}}\left[-\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=arctg\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{6^{3/2}\pi}{6}\left(1-\cos\left(arctg\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

Material de consulta

Libro Interactivo. Parte II Capítulo 5.
Laboratorios y Unidades didácticas con videos explicativos: enlace
Autora: Elena E. Álvarez

Cálculo III. Gilbert Strang y Edwin Herman. Publicado bajo licencia CC BY-NC-SA 4.0[2]
https://openstax.org/details/books/calculus-volume-3

[2] Las imágenes con marco color rojo están tomadas de este libro.

Ecuaciones de algunas superficies frecuentes

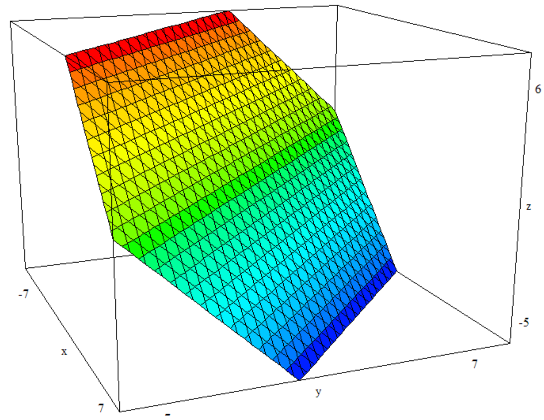
PLANO

Cartesianas

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Paramétricas

$$\begin{aligned} x &= x_o + ua_1 + vb_1 \\ y &= y_o + ua_2 + vb_2 \\ z &= z_o + ua_3 + vb_3 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} x = 1 - v \\ y = -u \qquad u \in I,\ v \in J \\ z = u + v \end{cases}$$

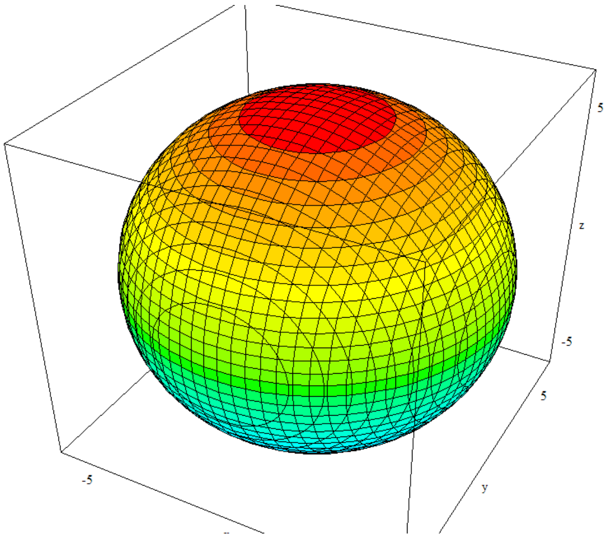
ESFERA

Cartesianas

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Paramétricas

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} u \cos v \\ y &= r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z &= r \cos u \end{aligned}$$



$$\begin{cases} x = 5 \operatorname{sen} u \cos v \\ y = 5 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = 5 \cos u \end{cases}$$

$$0 \le u \le \pi, \quad 0 \le v \le 2\pi$$

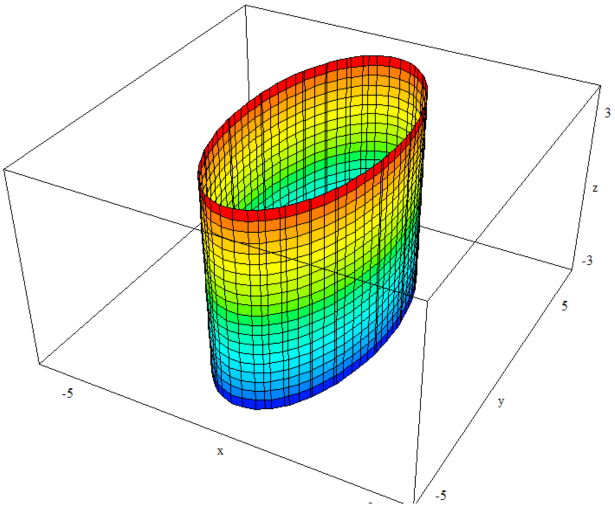
CILINDRO ELÍPTICO

Cartesianas

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Paramétricas

$$x=a\ \cos u$$
$$y=b\ \operatorname{sen} u$$
$$z=v$$



$$\begin{cases} x=2\cos u \\ y=4\operatorname{sen} u \qquad 0\le u<2\pi, \quad v\in I \\ z=v \end{cases}$$

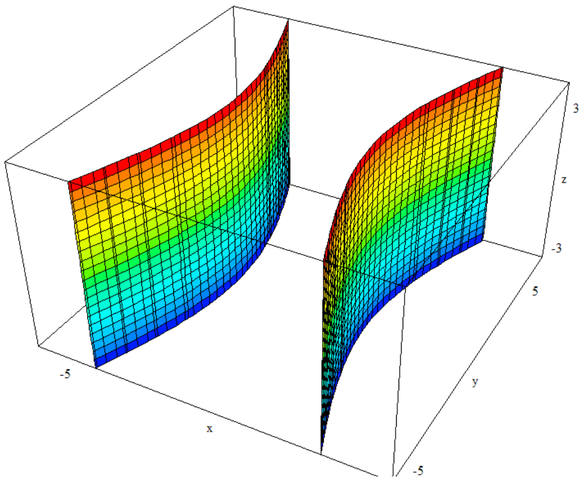
CILINDRO HIPERBÓLICO

Cartesianas

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Paramétricas

$$x=a\cosh u$$
$$y=b\operatorname{senh} u$$
$$z=v$$



$$\begin{cases} x=2\cosh u \\ y=4\operatorname{senh} u \qquad \left(u,v\right)\in D \\ z=v \end{cases}$$

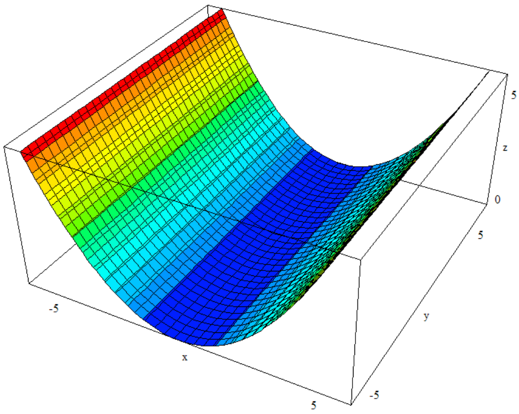
CILINDRO PARABÓLICO

Cartesianas

$$z = \frac{x^2}{a}$$

Paramétricas

$$x = u$$
$$y = v$$
$$z = \frac{u^2}{a}$$



$$x = u, \quad y = v, \quad z = \frac{u^2}{4}, \qquad (u, v) \in D$$

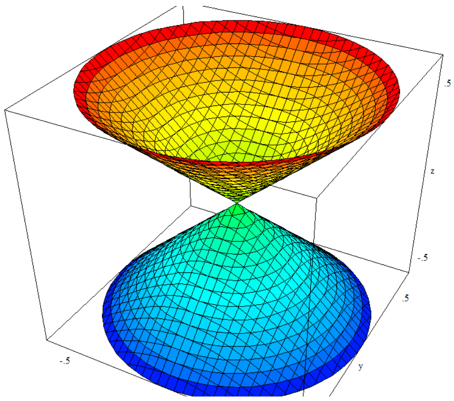
CONO

Cartesianas

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Paramétricas

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \qquad 0 \leq v \leq 2\pi, \ u \in I \\ z = u \end{cases}$$



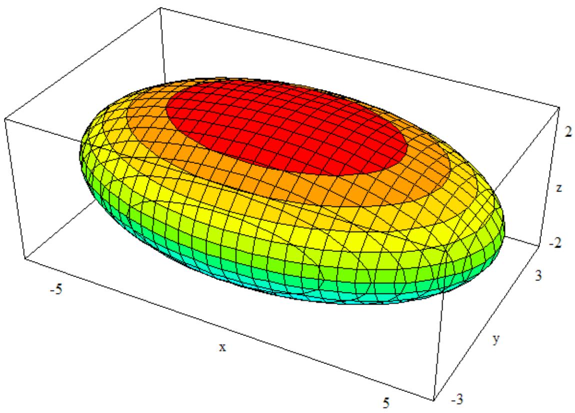
ELIPSOIDE

Cartesianas

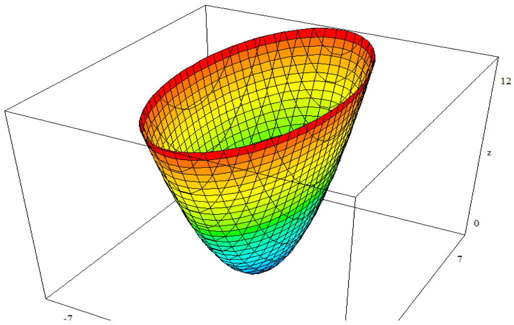
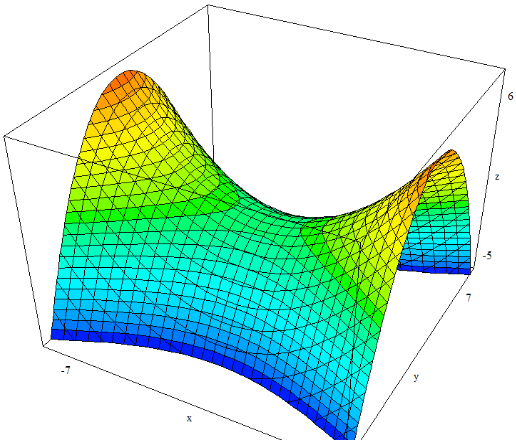
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Paramétricas

$$x = a \operatorname{sen} u \cos v$$
$$y = b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$
$$z = c \cos u$$



$$\begin{cases} x = 5 \operatorname{sen} u \cos v \\ y = 3 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = 2 \cos u \end{cases}$$

	$0 \le u \le \pi,\ \ 0 \le v \le 2\pi$
PARABOLOIDE ELIPTICO Cartesianas Paramétricas $\begin{cases} x = au\cos v \\ y = bu\,\text{sen}\,v \\ z = \pm u^2 \end{cases}$	 $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = 2u\,\text{sen}\,v \qquad u \in I,\ \ 0 \le v < 2\pi \\ z = u^2 \end{cases}$
PARABOLOIDE HIPERBÓLICO Cartesianas $z = \pm\left(\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)$ Paramétricas $\begin{cases} x = au\cosh v \\ y = bu\,\text{senh}\,v \\ z = \pm u^2 \end{cases}$	 $\begin{cases} x = 3u\cosh v \\ y = 2u\,\text{senh}\,v \qquad u \in I,\ \ v \in J \\ z = u^2 \end{cases}$

<table>
<tr>
<td>

HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA

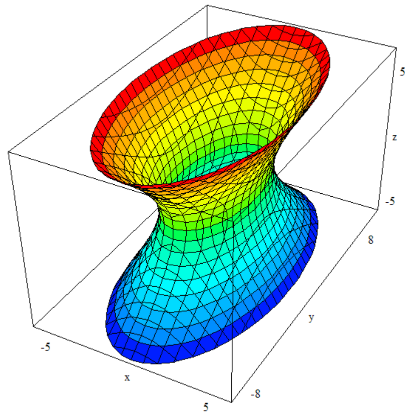
Cartesianas

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Paramétricas

$$\begin{cases} x = a\cosh u \cos v \\ y = b\cosh u \operatorname{sen} v \\ z = c\operatorname{senh} u \end{cases}$$

</td>
<td>



$$\begin{cases} x = 2\cosh u \cos v \\ y = 4\cosh u \operatorname{sen} v \quad -\infty < u < \infty,\ \ 0 \le v \le 2\pi \\ z = 3\operatorname{senh} u \end{cases}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS

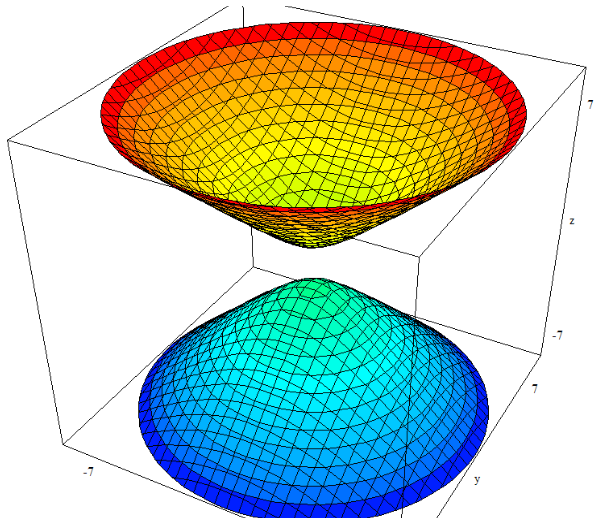
Cartesianas

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Paramétricas

$$\begin{cases} x = a\operatorname{senh} u \cos v \\ y = b\operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \\ z = c\cosh u \end{cases}$$

</td>
<td>



$$\begin{cases} x = \operatorname{senh} u \cos v \\ y = \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \\ z = \cosh u \end{cases}$$

$$-\infty < u < \infty,\ \ 0 \le v \le 2\pi$$

</td>
</tr>
</table>