E.T.S.I. Industriales y Telecomunicación Curso 2012-2013

Grados E.T.S.I. Industriales y Telecomunicación Asignatura: Cálculo I

RESUMEN TEMA SUCESIONES

DEFINICIONES BÁSICAS

Existen muchos fenómenos que no se comportan de manera continua, sino que necesitan un determinado tiempo para producirse. Por ejemplo, el crecimiento de una población se produce a intervalos regulares y los pagos a un banco se realizan una vez al mes.

En este tema se introducen técnicas matemáticas que permiten estudiar fenómenos que se producen a intervalos regulares de tiempo en el que el concepto de continuidad no tiene sentido.

¿Qué son?

Un conjunto de objetos ordenados mediante los números naturales. Si esta colección es de números se dirá que la sucesión es numérica. En este tema estudiaremos las sucesiones de números reales.

Cada uno de los elementos de una sucesión se denomina término.

Notación:

A los términos de una sucesión se les designa del siguiente modo:

$$a_1 \qquad a_2 \qquad a_3 \qquad a_4 \qquad a_5 \qquad \ldots$$

(se lee "a sub uno" para el primer término, "a sub dos" para el segundo, "a sub tres" para el tercero, ...)

Definición: Podemos considerar una sucesión como una función que asigna a cada número natural un número real

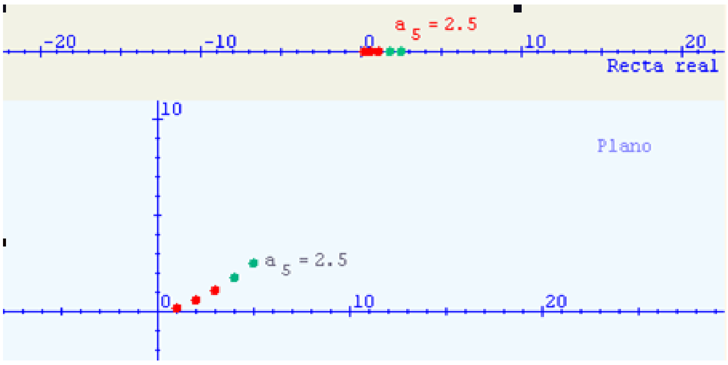
$$\mathbb{N} \xrightarrow{a} \mathbb{R}$$

interpretando que $a_1 = a(1)$ $\qquad a_2 = a(2)$ $\qquad a_3 = a(3)$ $\qquad \ldots$

En general, el transformado de un número n se designa por $a_n = a(n)$ y se llama término enésimo (o también n-ésimo) de la sucesión. La sucesión se representa por (a_n) ó $\{a_n\}$ ó $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son iguales si $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión admite una **representación** en la recta real y en el plano:



Sucesiones monótonas

Definiciones:

A) Una sucesión $\left(a_n\right)$ se denomina monótona creciente si verifica:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$$

esto es si se cumple $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

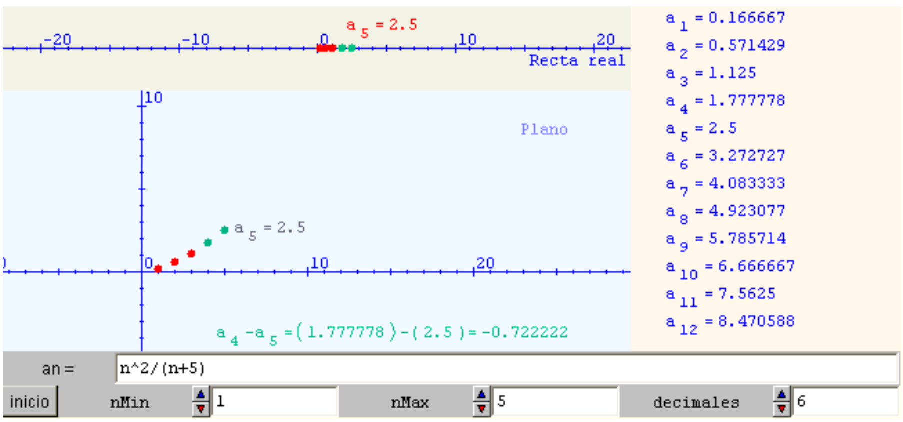
Si verifica $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, se llama estrictamente creciente.

B) Análogamente, una sucesión $\left(a_n\right)$ se denomina monótona decreciente si se cumple

$a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Si verifica $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, se llama estrictamente decreciente.

C) Una sucesión se denomina monótona si es monótona creciente o monótona decreciente.

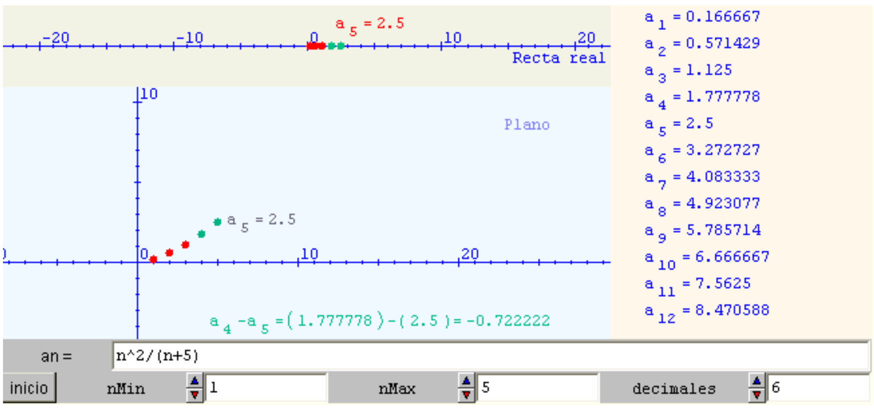


Applet Laboratorio Sucesiones

RESUMEN TEMA SUCESIONES

Ejemplos :

- La sucesión -1, -2, 3, -4, -5, 6, -7, -8, 9 ... no es monótona.
- La sucesión de término general $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ tampoco es monótona.
- La sucesión de término general $a_n = n$ es monótona creciente y también estrictamente creciente.
- La sucesión –1, -1, 0, 0, 1, 1, 2, 2 ... es monótona creciente, pero no es estrictamente creciente.
- La sucesión de término general $a_n = -n^2$ es monótona decreciente y es también estrictamente decreciente.
- La sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$ es monótona decreciente, sin embargo no es estrictamente decreciente.



Applet Laboratorio Sucesiones

Nota práctica:

En algunos casos, para probar que una sucesión es monótona creciente resulta útil probar que $a_{n+1} - a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y para sucesiones de términos positivos también se puede demostrar probando que se cumple:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Análogamente, para las sucesiones monótonas decrecientes se probará que $a_{n+1} - a_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, o bien, si es de términos positivos, que verifica

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Teniendo en cuenta que una sucesión es una aplicación de los números naturales en los reales, para ciertas sucesiones, se puede utilizar técnicas de cálculo diferencial para estudiar la monotonía. Bastará considerar la función resultado de cambiar n por x en el término general de la sucesión. Si $a_n = f(n)$ y $f'(x) > 0$ (respectivamente $f'(x) < 0$) para $x > n_o$ entonces a_n es creciente (respectivamente) para $x > n_o$.

Sucesiones acotadas

- Decimos que un número real k es **cota superior** de la sucesión (a_n) si verifica

$$a_n \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Se denomina **supremo** a la menor de las cotas superiores. Si el supremo es un término de la sucesión se denomina **máximo**.

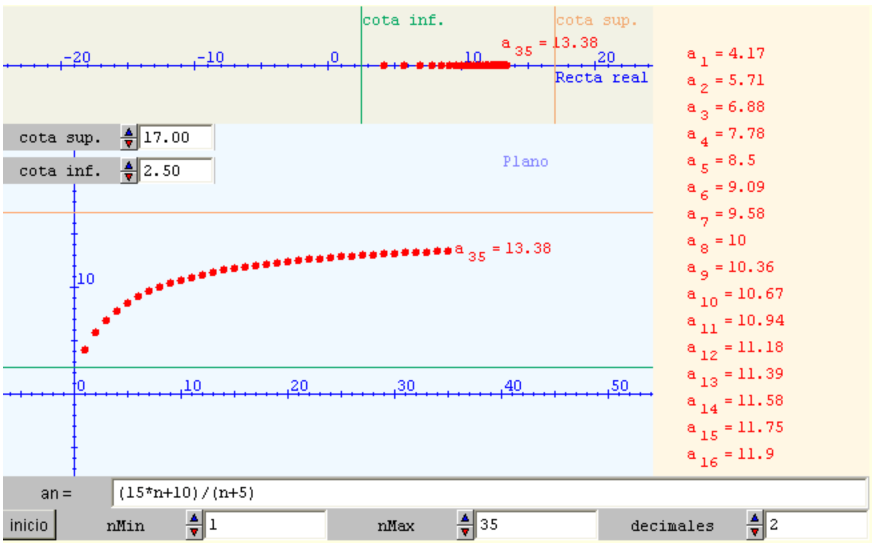
- Análogamente, dicho número k será **cota inferior** de la sucesión (a_n) si verifica

$$k \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Llamamos **ínfimo** a la mayor de las cotas inferiores. Si el ínfimo es un término de la sucesión se denomina **mínimo**.

- Una sucesión (a_n) decimos que está **acotada superiormente** si tiene alguna cota superior. De forma análoga, diremos que la sucesión está acotada inferiormente si tiene alguna cota inferior.

Una sucesión (a_n) decimos que es **acotada** si está acotada superior e inferiormente.



Applet Laboratorio Sucesiones

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Decimos que el límite de una sucesión $\left(a_n \right)$ es L, y lo escribimos así

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o también} \qquad a_n \to L$$

si es posible conseguir que $\left| a_n - L \right|$ sea tan pequeño como queramos, sin más que asignarle a n valores tan grandes como sea necesario. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; existe \; N_o \in \mathbb{N} \; tal \; que \left| a_n - L \right| < \varepsilon \quad \forall n > N_0$$

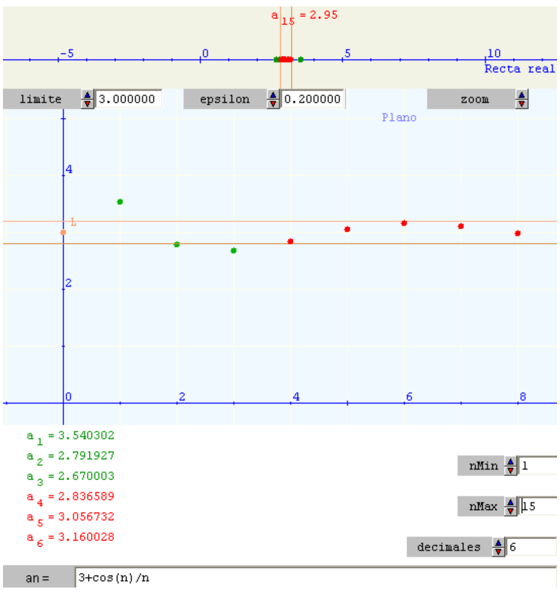
La definición anterior significa que si queremos que los términos de la sucesión se alejen de L una distancia menor que ε, lo podemos conseguir para todos los términos posteriores a un cierto número natural N_0. Cuanto más pequeño sea ε más grande habrá que tomar el valor de N_0.

La definición anterior se lee " límite cuando n tiende a infinito de a_n igual a L". También se puede escribir

$$\lim a_n = L$$

pues n sólo puede tender a infinito.

Las sucesiones que tienen límite se denominan **convergentes**.

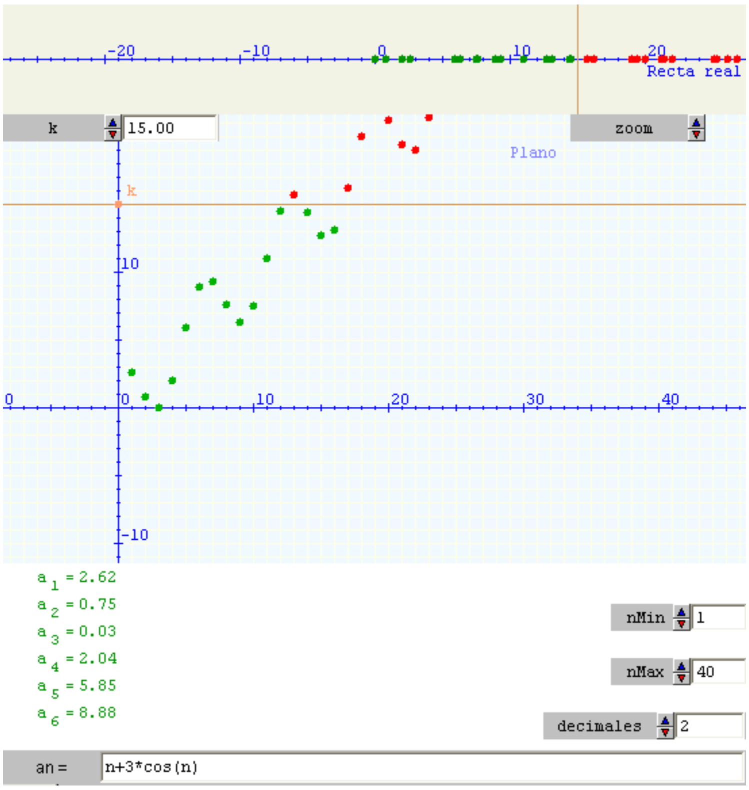


Applet Laboratorio Sucesiones

Sucesiones divergentes

La sucesión (a_n) **tiende a infinito** (∞) si cualquiera que sea el número real k fijado, por grande que este sea, podemos conseguir que los términos de la sucesión superen dicho valor sin más que tomar valores de n mayores que un número natural N_0. Simbólicamente esto puede escribirse así

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad tal\ que \quad a_n > k \quad \forall n > N_0$$



Applet Laboratorio Sucesiones

La sucesión (a_n) **tiende a menos infinito** $(-\infty)$ si cualquiera que sea el número real k fijado, por grande que este sea, podemos conseguir que los términos de la sucesión sean menores que –k, sin más que tomar valores de n mayores que un número natural N_0. Simbólicamente esto puede escribirse así

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad tal\ que \quad a_n < -k \quad \forall n > N_0$$

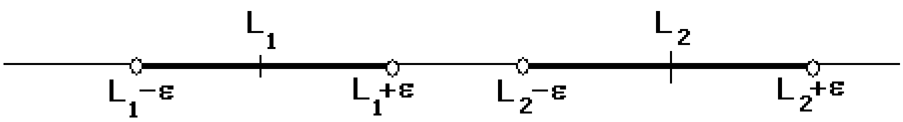
Unicidad del límite: Si la sucesión (a_n) tiene límite, finito o no, este es único.

Demostración:

Sea (a_n) una sucesión convergente y supongamos que tiene dos límites L_1 y L_2, siendo $L_1 < L_2$. A partir de un cierto valor n_0, todos los términos de la sucesión deben pertenecer, simultáneamente, a los entornos

$$(L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon) \quad y \quad (L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$$

lo cual es imposible en cuanto tomemos valores $\varepsilon \leq \dfrac{L_2 - L_1}{2}$.



Sucesiones oscilantes

Existen otras sucesiones que no tienen límite, pero tampoco tienden a infinito ni a menos infinito. Veamos algunos casos

Ejemplos: La sucesión cuyos primeros términos son los siguientes

$$1, \ \frac{1}{2}, \ 3, \ \frac{1}{4}, \ 5, \ \frac{1}{6}, \ 7, \dots$$

Esta sucesión no es convergente, pero tampoco tiende a ∞ ni a $-\infty$. Los términos impares se hacen infinitamente grandes a medida que n crece. Sin embargo, los términos pares tienden a 0, para n suficientemente grande. Se dice que esta sucesión no tiene límite o bien que su carácter es oscilante.

Ejemplos: La sucesión de término general $a_n = (-1)^n \cdot n$, cuyos primeros términos son:

-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8,...

Los términos de esta sucesión tampoco se acercan a un número concreto. Tienden a ∞ los términos pares y tienden a $-\infty$ los términos impares. Por tanto, tampoco tiene límite.

Como conclusión, las sucesiones de los dos ejemplos anteriores se denominan **oscilantes**.

Resumen: Las sucesiones se clasifican según la existencia o no de límite en los siguientes tipos:

E.T.S.I. Industriales y Telecomunicación — Curso 2012-2013

Grados E.T.S.I. Industriales y Telecomunicación — Asignatura: Cálculo I

RESUMEN TEMA SUCESIONES

Convergentes	tienden a un número finito L
No convergentes	**Divergentes** $\begin{cases} \text{tienden a } \infty \\ \text{tienden a } -\infty \end{cases}$ **Oscilantes**

Propiedades de los límites: Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ con $a,b \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\lambda a_n\right) = \lambda a$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n b_n\right) = ab$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ $si\ b \neq 0$

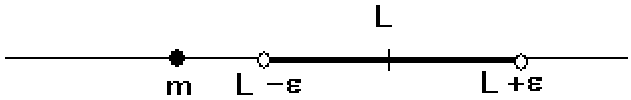
(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n\right)^{b_n} = a^b$ siempre que $a^b \neq 0^0$.

Indeterminaciones: $\infty - \infty$ $\quad \dfrac{0}{0}$ $\quad \dfrac{\infty}{\infty}$ $\quad 0\infty$ $\quad 1^\infty$ $\quad 0^0$ $\quad \infty^0$

Teorema (Acotación): Toda sucesión (a_n) convergente es acotada.

Demostración:

Para demostrar que una sucesión está acotada, tenemos que demostrar que está acotada superior e inferiormente.
Si la sucesión (a_n) es convergente, tomamos ε =1, entonces todos los términos de la sucesión pertenecen, a partir de uno de ellos, al entorno (L-ε , L+ε); en consecuencia. Consideramos el valor más pequeño de los términos de la sucesión que no están en ese intervalo y de L-ε Si llamamos m a ese valor todos los términos de la sucesión serán mayores que m.



Consideramos M el valor más grande de los términos de la sucesión que no están en el intervalo (L-ε , L+ε) y el valor L-ε , es fácil ver que todos los términos de la sucesión son menores que M.

En conclusión, la sucesión (a_n) está acotada, ya que hemos encontrado una cota inferior (m) y una cota superior (M) de dicha sucesión.

Observación: El recíproco del teorema anterior no es cierto: la sucesión 1, 2, 1, 2, 1, 2,... es acotada y, sin embargo, no es convergente.

Teorema (Weierstrass): Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Toda sucesión monótona y no acotada es divergente.

Convergente $\Rightarrow$ Acotada	Convergente $\Leftarrow$ Acotada y Monótona
Divergente $\Rightarrow$ No acotada	Divergente $\Leftarrow$ No acotada y Monótona
(No son ciertos los recíprocos)	(No son ciertos los recíprocos)

Número e

El número **e** es un número irracional de gran importancia en matemáticas superiores.

Podemos definirlo como el límite de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Puede probarse que esta sucesión es monótona y acotada por lo que aplicando el teorema de Weierstrass se concluye que es convergente. El valor al que converge es el número e.

Se trata de un número irracional cuyas diez primeras cifras decimales son: 2’7182818284...

CÁLCULO DE LÍMITES

Propiedades de los límites de sucesiones reales

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, y $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ con $a,b \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (2) $\lim_{n\to\infty} \left(\lambda a_n\right) = \lambda a$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n b_n\right) = ab$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ $si\ b \neq 0$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)^{b_n} = a^b$ siempre que $a^b \neq 0^0$.

Indeterminaciones $\infty - \infty$ $\quad \dfrac{0}{0}$ $\quad \dfrac{\infty}{\infty}$ $\quad 0\infty$ $\quad 1^\infty$ $\quad 0^0$ $\quad \infty^0$

Límites de expresiones racionales

Si se trata de una sucesión cociente entre expresiones polinómicas, así

$$a_n = \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \ldots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + b_2 n^{q-2} + \ldots + b_q}$$

se resuelve dividiendo numerador y denominador por n^k, siendo k el grado del polinomio de menor grado. En resumen, se cumple que:

- Si p>q, $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ (depende de los signos de a_0 y b_0)
- Si p=q, $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{a_0}{b_0}$
- Si p < q, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Límites de expresiones irracionales

Se resuelven multiplicando y dividiendo por la expresión radical “conjugada”.

Límites de la forma $\infty^0,\ 0^0,\ 1^\infty$

Para calcular este tipo de límites se puede tomar logaritmos, de tal forma que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \log a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n \log a_n}$$

Observación: En el caso particular de que la indeterminación sea del tipo 1^∞ se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ luego,

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n \log a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n\left(a_n - 1\right)}$$