

CAPÍTULO

2

Funciones

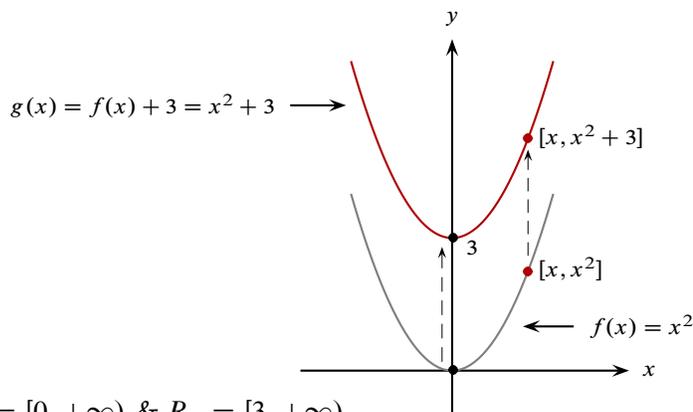
1

2.7 Transformaciones de funciones

Se pretende ahora que, a partir del conocimiento de la gráfica de una función f , esencialmente mediante traslaciones, contracciones y reflexiones, se obtenga un bosquejo de la gráfica de una función g de la forma

$$g(x) = kf(ax - b) + c.$$

Ejemplo 2.7.1 La gráfica de: $g(x) = x^2 + 3$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia arriba 3 unidades.

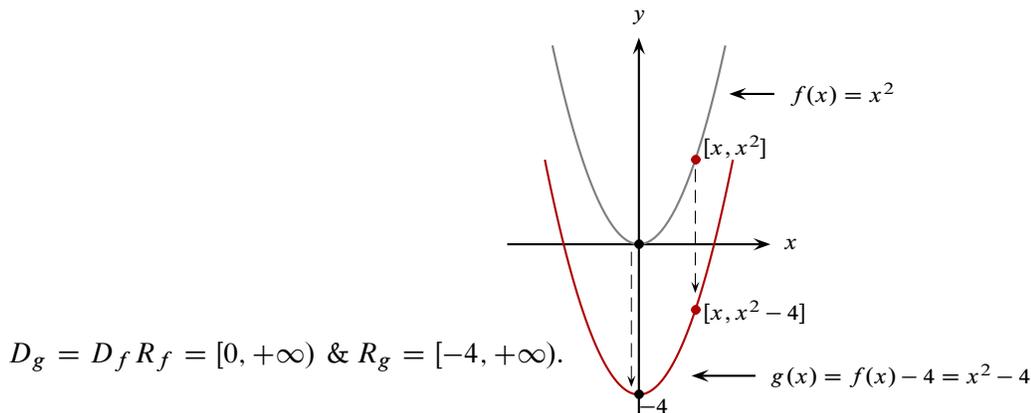


$$D_g = D_f, R_f = [0, +\infty) \text{ \& } R_g = [3, +\infty).$$

□

Ejemplo 2.7.2 La gráfica de: $g(x) = x^2 - 4$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia abajo 4 unidades.

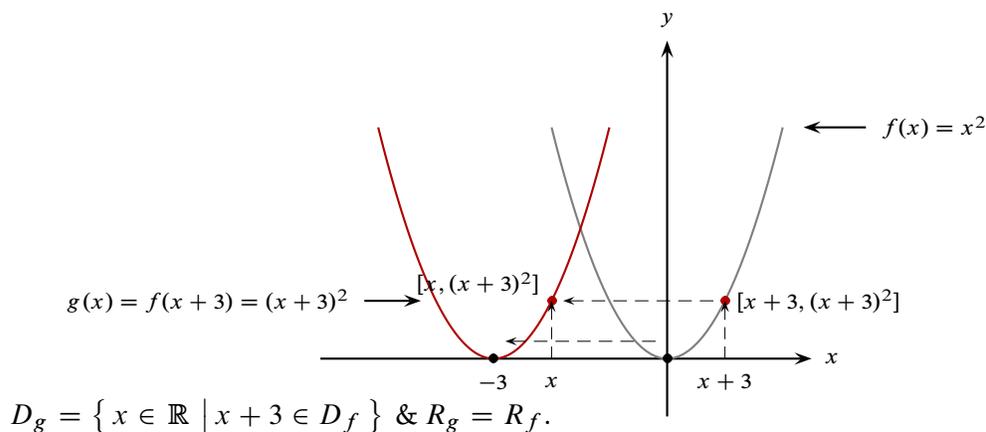
¹canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



De los dos ejemplos anteriores vemos que:

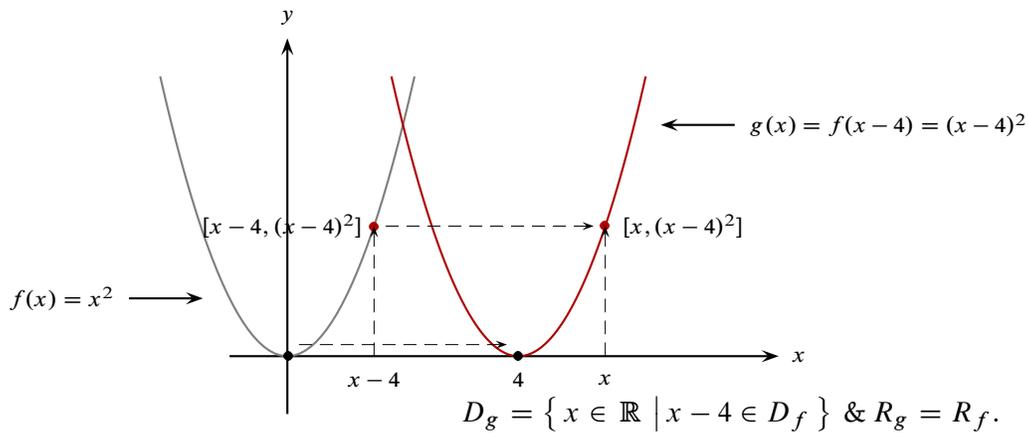
- La gráfica de $g(x) = f(x) + c$ es la gráfica de f desplazada verticalmente c unidades.
En este caso $D_g = D_f \ \& \ R_g = \{ f(x) + c \mid f(x) \in R_f \}$.

Ejemplo 2.7.3 La gráfica de $g(x) = (x + 3)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia la izquierda 3 unidades.



Ejemplo 2.7.4 La gráfica de $g(x) = (x - 4)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia la derecha 4 unidades.



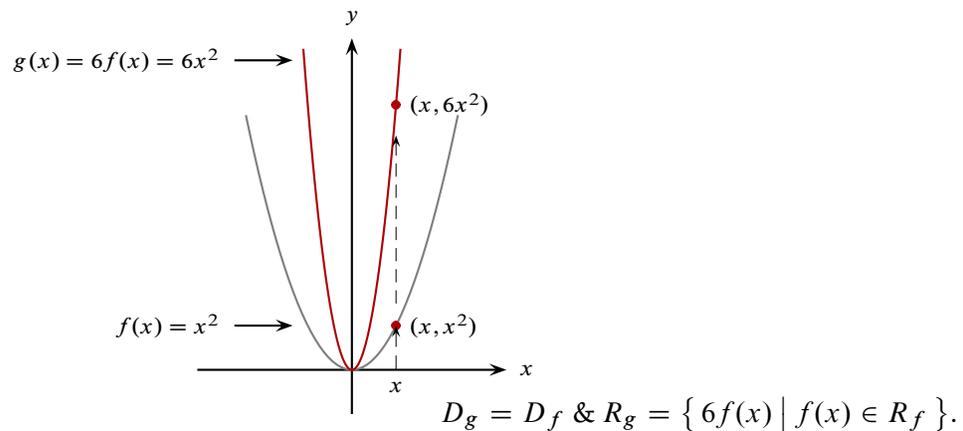


□

De los dos ejemplos anteriores vemos que:

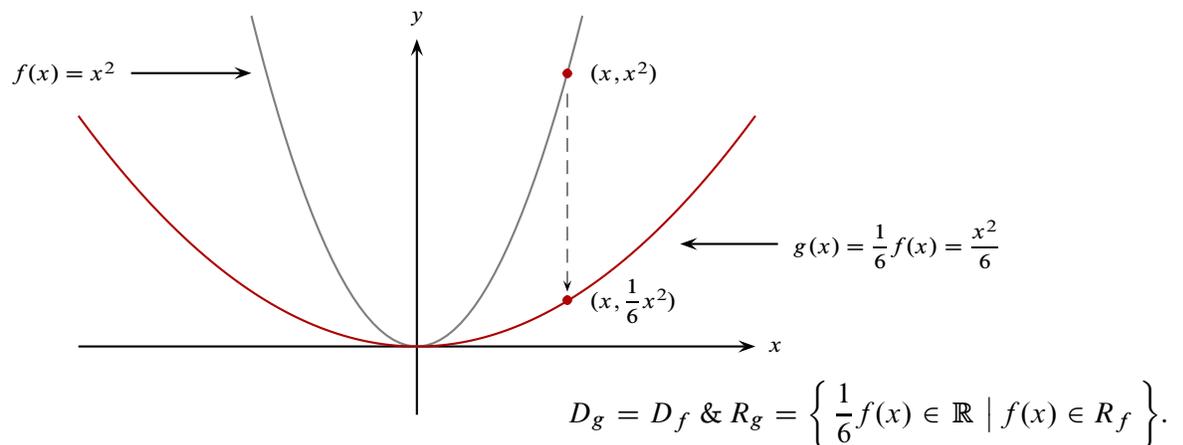
- La gráfica de: $g(x) = f(x - c)$ es la gráfica de f desplazada horizontalmente c unidades.
En este caso $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x - c \in D_f\} \ \& \ R_g = R_f.$

Ejemplo 2.7.5 La gráfica de $g(x) = 6x^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ alargada 6 veces en la dirección vertical.



□

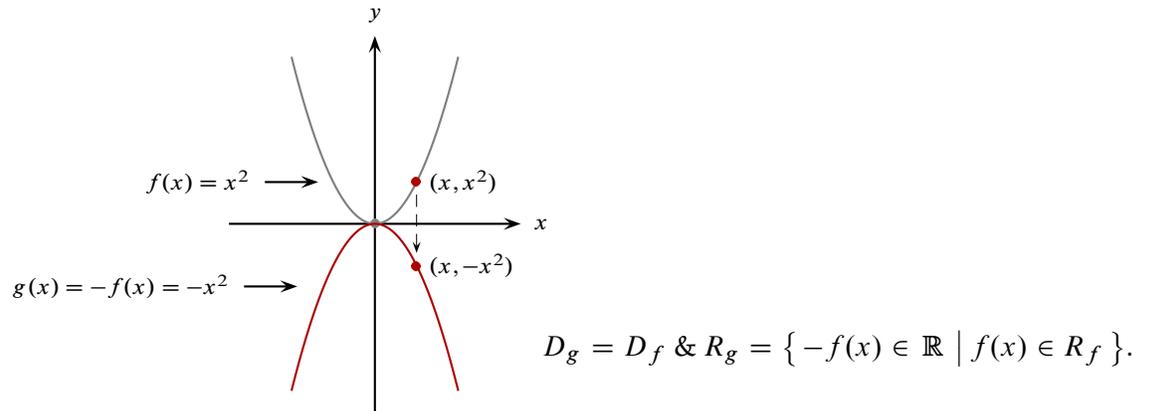
Ejemplo 2.7.6 La gráfica de $g(x) = \frac{1}{6}x^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ comprimida 6 veces en la dirección vertical.



□

Ejemplo 2.7.7 La gráfica de $g(x) = -x^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ reflejada respecto al eje x .

▼



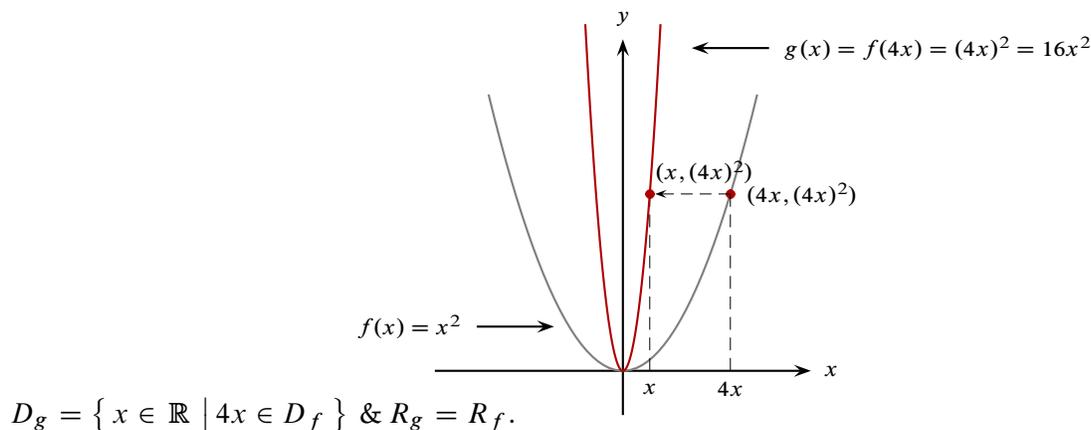
□

De los tres ejemplos anteriores vemos que:

- La gráfica de $g(x) = kf(x)$ es la gráfica de f :
 1. Alargada verticalmente si $k > 1$.
 2. Comprimida verticalmente si $0 < k < 1$.
 3. Si $k < 0$, consideramos a la gráfica de la función $|k| f(x) = -kf(x)$ y la reflejamos con respecto al eje de las x .
 $D_f = D_g, R_g = \{ kf(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} \}.$

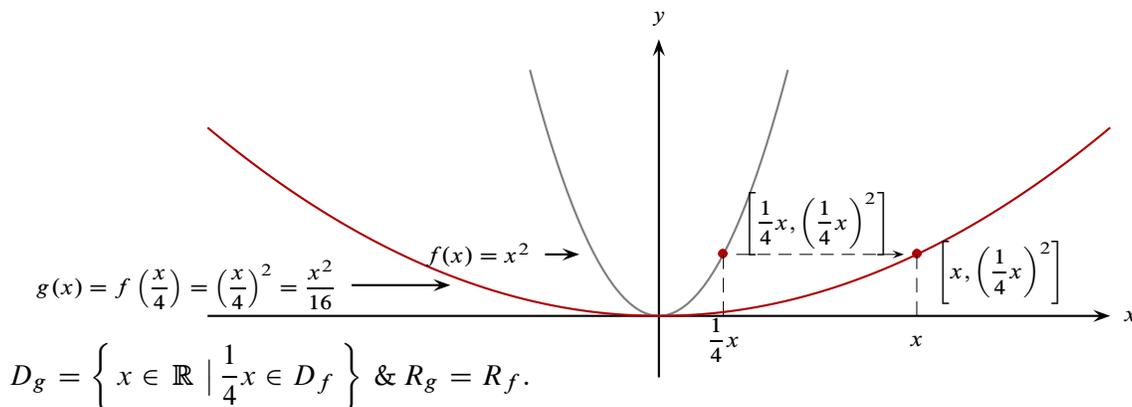
Ejemplo 2.7.8 La gráfica de $g(x) = (4x)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ comprimida horizontalmente 4 veces.

▼

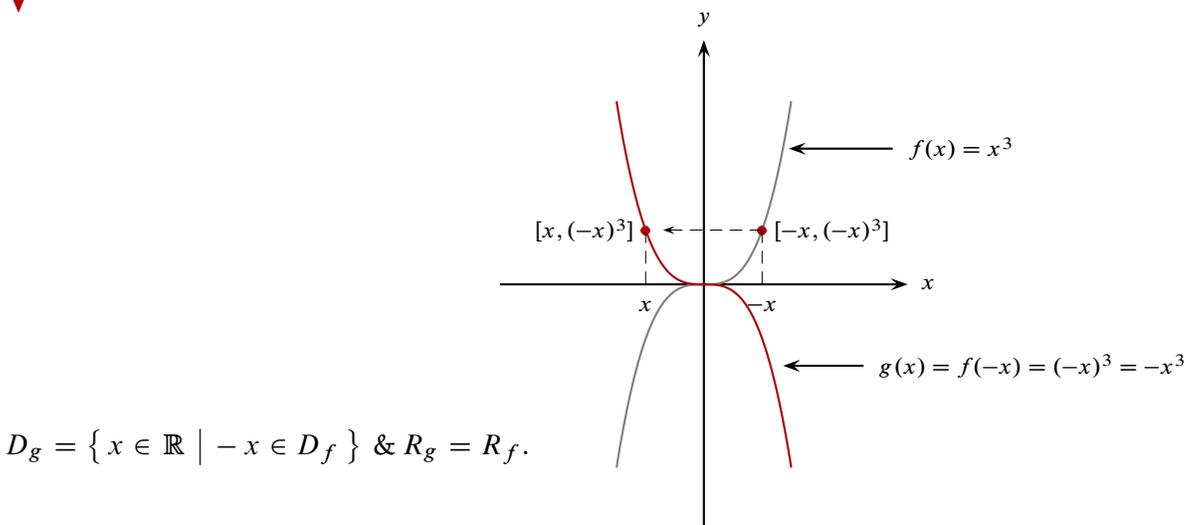


□

Ejemplo 2.7.9 La gráfica de $g(x) = \left(\frac{1}{4}x\right)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ alargada horizontalmente 4 veces.



Ejemplo 2.7.10 La gráfica de $g(x) = (-x)^3$ es la gráfica de $f(x) = x^3$ reflejada respecto al eje y .



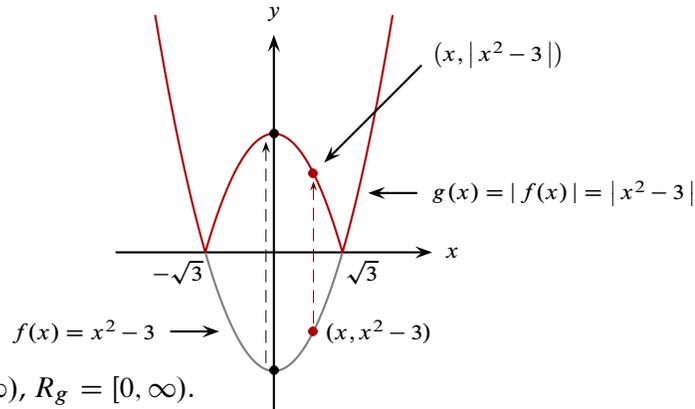
De los tres ejemplos anteriores vemos que:

- La gráfica de $g(x) = f(kx)$ es la gráfica de f :
 1. Comprimida horizontalmente si $k > 1$.
 2. Alargada horizontalmente si $0 < k < 1$.
 3. Si $k < 0$, consideramos a la gráfica de la función $f(|k|x) = f(-kx)$ y la reflejamos con respecto al eje de las y .
 $D_g = \{ x \in \mathbb{R} \mid kx \in D_f \}$, $R_g = R_f$.

Por otro lado, tenemos el siguiente resultado:

Ejemplo 2.7.11

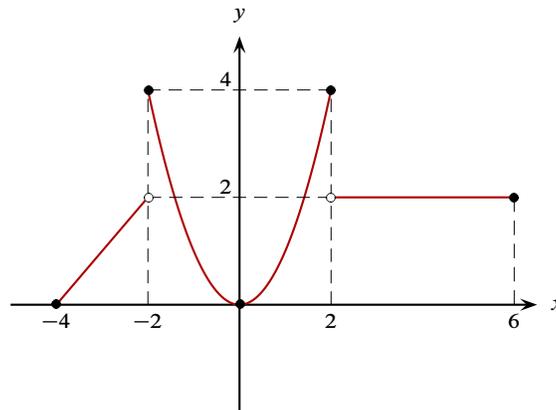
Si $g(x) = |x^2 - 3|$, la gráfica de g es la gráfica de $f(x) = x^2 - 3$ cuando $x^2 - 3 \geq 0$ y la simétrica de f con respecto al eje de las x cuando $x^2 - 3 < 0$.



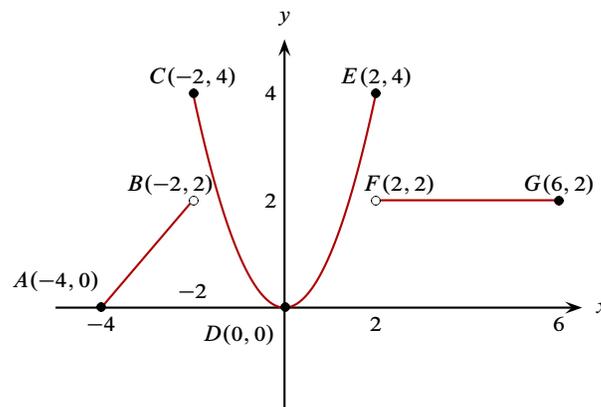
- Si $g(x) = |f(x)|$, la gráfica de $g(x)$ es la gráfica de f cuando $f(x) \geq 0$ y es la simétrica de f con respecto al eje de las x cuando $f(x) < 0$.

$$D_g = D_f, R_g = \{ |f(x)| \mid f(x) \in \mathbb{R} \}.$$

Ejemplo 2.7.12 Considerando que la siguiente curva es la gráfica de la función f , bosquejar la gráfica de la función $g(x) = f(2x) - 3$.



▼ Elegimos 7 puntos apropiados que determinan la gráfica de f cuyas imágenes determinarán la de g :



1. Primero se obtiene la curva $y = f(2x)$ comprimiendo horizontalmente la curva $y = f(x)$ por un factor de 2. La transformación de los puntos ocurre así:

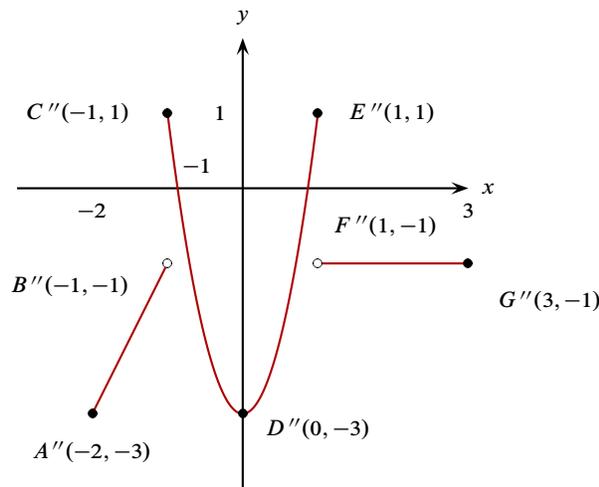
$$A(-4, 0), B(-2, 2), C(-2, 4), D(0, 0), E(2, 4), F(2, 2) \text{ \& } G(6, 2); \\ A'(-2, 0), B'(-1, 2), C'(-1, 4), D'(0, 0), E'(1, 4), F'(1, 2) \text{ \& } G'(3, 2).$$

2. Luego se obtiene la curva $y = f(2x) - 3$ desplazando verticalmente 3 unidades hacia abajo a la curva $y = f(2x)$.

La transformación de los puntos ocurre así:

$$A'(-2, 0), B'(-1, 2), C'(-1, 4), D'(0, 0), E'(1, 4), F'(1, 2) \text{ \& } G'(3, 2); \\ A''(-2, -3), B''(-1, -1), C''(-1, 1), D''(0, -3), E''(1, 1), F''(1, -1) \text{ \& } G''(3, -1).$$

3. La gráfica de $g(x) = f(2x) - 3$ es así:



También lo podríamos resolver directamente notando que $D_f = [-4, 6]$ y que por tanto el $D_g = [-2, 3]$. Usando los puntos elegidos anteriormente tenemos:

$$A(-4, 0): g(-4) = f(-4) - 3 = 0 - 3 = -3 \Rightarrow \\ A''(-2, -3) \in G_g;$$

$$B(-2, 2): g(-1^-) = f(-2^-) - 3 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow \\ B''(-1, -1) \notin G_g;$$

$$C(-2, 4): g(-1) = f(-2) - 3 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \\ C''(-1, 1) \in G_g;$$

$$D(0, 0): g(0) = f(0) - 3 = 0 - 3 = -3 \Rightarrow D''(0, -3) \in \\ G_g;$$

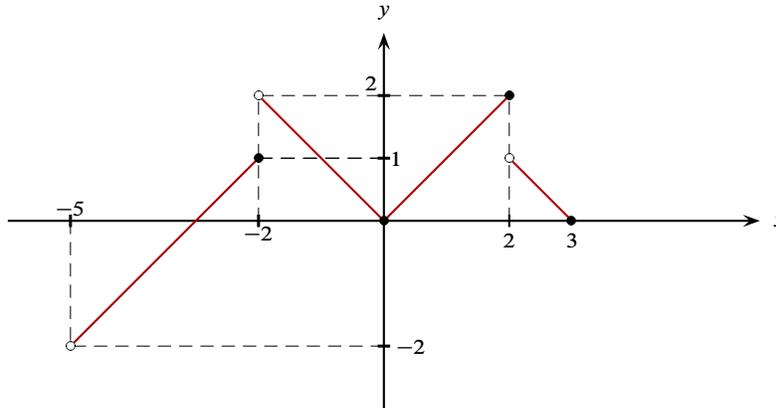
$$E(2, 4): g(1) = f(2) - 3 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow E''(1, 1) \in G_g;$$

$$F(2, 2): g(1^+) = f(2^+) - 3 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow \\ F''(1, -1) \notin G_g;$$

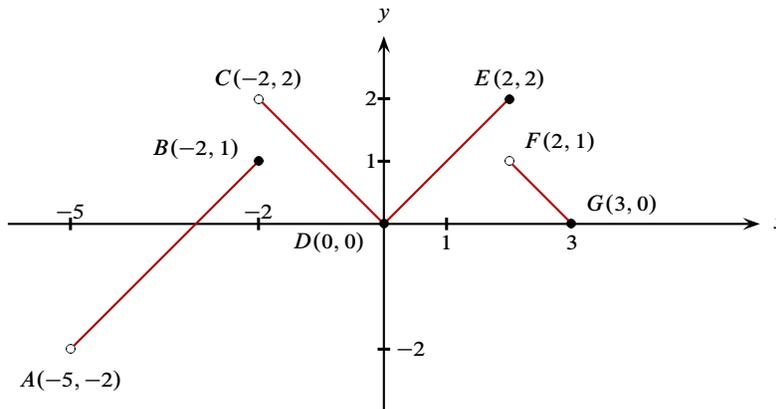
$$G(6, 2): g(3) = f(6) - 3 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow G''(3, -1) \in \\ G_g.$$



Ejemplo 2.7.13 Considerando que la siguiente figura es la gráfica de una función f , bosquejar la gráfica de la función $g(x) = 1 - 2f(x - 3)$.



▼ Elegimos 7 puntos apropiados que determinan la gráfica de f cuyas imágenes determinarán la de g :



- Primero se obtiene la curva $y = f(x - 3)$ desplazando horizontalmente 3 unidades hacia la derecha a la curva $y = f(x)$. La transformación de los puntos ocurre así:

$$A(-5, -2), \quad B(-2, 1), \quad C(-2, 2), \quad D(0, 0), \quad E(2, 2), \quad F(2, 1) \quad \& \quad G(3, 0);$$

$$A'(-2, -2), \quad B'(1, 1), \quad C'(1, 2), \quad D'(3, 0), \quad E'(5, 2), \quad F'(5, 1) \quad \& \quad G'(6, 0).$$

- Luego se obtiene la curva $y = 2f(x - 3)$ alargando verticalmente a la curva $y = f(x - 3)$ por un factor de 2. La transformación de los puntos ocurre así:

$$A'(-2, -2), \quad B'(1, 1), \quad C'(1, 2), \quad D'(3, 0), \quad E'(5, 2), \quad F'(5, 1) \quad \& \quad G'(6, 0);$$

$$A''(-2, -4), \quad B''(1, 2), \quad C''(1, 4), \quad D''(3, 0), \quad E''(5, 4), \quad F''(5, 2) \quad \& \quad G''(6, 0).$$

- Después se obtiene la curva $y = -2f(x - 3)$ poniendo un espejo en el eje x para reflejar a la curva $y = 2f(x - 3)$. Esto se consigue multiplicando a las ordenadas por -1 . La transformación de los puntos ocurre así:

$$A''(-2, -4), \quad B''(1, 2), \quad C''(1, 4), \quad D''(3, 0), \quad E''(5, 4), \quad F''(5, 2) \quad \& \quad G''(6, 0);$$

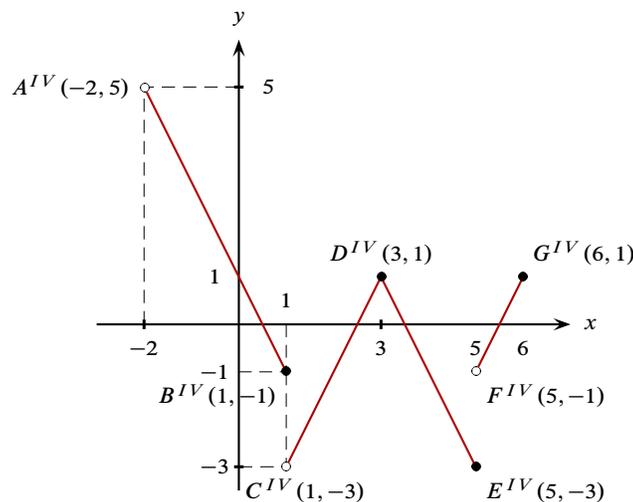
$$A'''(-2, 4), \quad B'''(1, -2), \quad C'''(1, -4), \quad D'''(3, 0), \quad E'''(5, -4), \quad F'''(5, -2) \quad \& \quad G'''(6, 0).$$

4. Finalmente se obtiene la curva $y = -2f(x - 3) + 1$ desplazando hacia arriba una unidad a la curva $y = -2f(x - 3)$. La transformación de los puntos ocurre así:

$$A'''(-2, 4), B'''(1, -2), C'''(1, -4), D'''(3, 0), E'''(5, -4), F'''(5, -2) \text{ \& } G'''(6, 0);$$

$$A^{IV}(-2, 5), B^{IV}(1, -1), C^{IV}(1, -3), D^{IV}(3, 1), E^{IV}(5, -3), F^{IV}(5, -1) \text{ \& } G^{IV}(6, 1).$$

5. Por lo tanto, la gráfica de $g(x) = 1 - 2f(x - 3)$ es



También lo podríamos resolver directamente notando que $D_f = [-5, 3]$ y que por tanto el $D_g = [-2, 6]$. Usando los puntos elegidos anteriormente tenemos:

$$A(-5, -2): g(-2) = 1 - 2f(-5) = 1 - 2(-2) = 1 + 4 = 5 \Rightarrow A^{iv}(-2, -5) \notin G_g;$$

$$B(-2, -1): g(1) = 1 - 2f(-2) = 1 - 2(1) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow B^{iv}(1, -1) \in G_g;$$

$$C(-2, 2): g(1^+) = 1 - 2f(-2^+) = 1 - 2(2) = 1 - 2 = -3 \Rightarrow C^{iv}(1, -3) \notin G_g;$$

$$D(0, 0): g(3) = 1 - 2f(0) = 1 - 2(0) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow D^{iv}(3, 1) \in G_g;$$

$$E(2, 2): g(5) = 1 - 2f(2) = 1 - 2(2) = 1 - 4 = -3 \Rightarrow E^{iv}(5, -3) \in G_g;$$

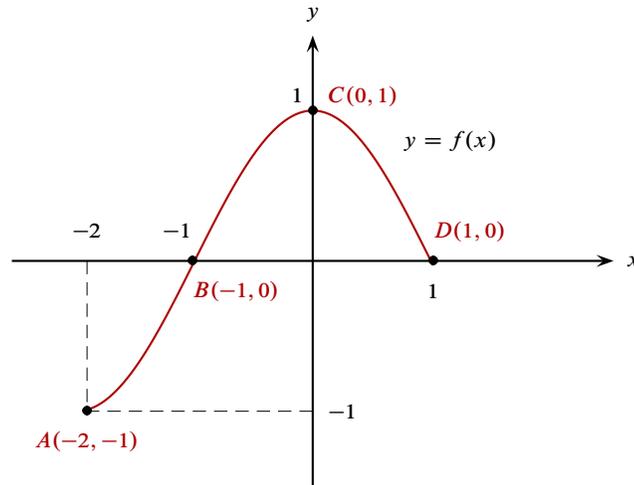
$$F(2, 1): g(5^+) = 1 - 2f(2^+) = 1 - 2(1) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow F^{iv}(5, -1) \notin G_g;$$

$$G(3, 0): g(6) = 1 - 2f(3) = 1 - 2(0) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow G^{iv}(6, 1) \in G_g.$$

□

Ejercicios 2.7.1 Soluciones en la página 15

1. Considerando la siguiente figura como la gráfica de cierta función f ,

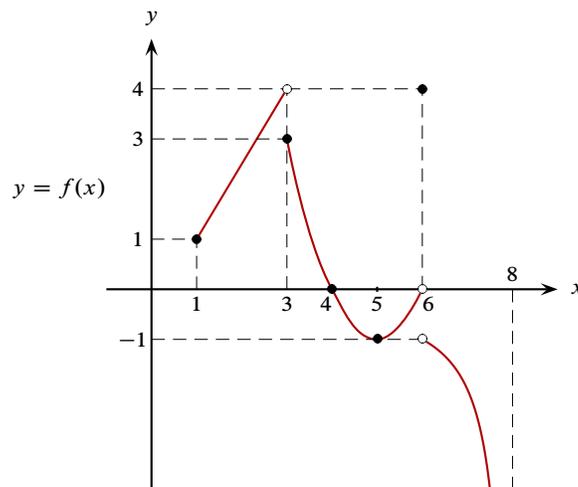


realizar un bosquejo de la gráfica de la función

$$g(x) = -2f(x - 1) + 3.$$

Especificar la nueva posición de los puntos $A(-2, -1)$; $B(-1, 0)$; $C(0, 1)$ & $D(1, 0)$.

2. Considerando que la figura siguiente es un bosquejo de la gráfica de cierta función f , obtenga el dominio, el rango, las raíces así como un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = -3f(x + 5) + 2$.



3. Considerando la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0; \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- Realizar un bosquejo de la gráfica de la función f .
- Realizar un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = f(x - 3) - 2$.
- Obtener dominio, rango y raíces de la función g .

4. Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \leq -1; \\ 2x - 3 & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

Obtenga la gráfica de $h(x) = f(x - 3) - 1$.

5. Dada la función

$$g(t) = \begin{cases} 4 - t^2 & \text{si } -3 \leq t < 1; \\ 3t & \text{si } 1 < t < 2. \end{cases}$$

- Bosquejar su gráfica y determinar dominio, rango y raíces.
- Obtener los intervalos en los que $g(t) \geq 0$ así como aquellos en donde $g(t) < 0$.
- A partir de la gráfica obtenida, bosquejar la gráfica de $f(t) = 2g(t + 2) - 3$.

6. Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } -8 \leq x < 0; \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

- Determinar dominio, raíces o puntos en donde la función vale cero, gráfica y rango de f .
- A partir de la gráfica de f , construir la gráfica de $h(x) = 1 - 2f(x + 3)$.

7. Considere la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x < 0; \\ x^2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- Grafique la función f .
- Usando la gráfica de f , construir la gráfica de la función $h(x) = 3 - 2f(2x + 1)$ y obtener una expresión o fórmula para $h(x)$.

8. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -6 \leq x < -4; \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } -4 \leq x \leq 0; \\ 2x - 3 & \text{si } 0 < x < 4, \end{cases}$$

determine:

- Un esbozo gráfico de la función.
- Dominio, rango, raíces, paridad, intervalos de monotonía e intervalos donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$.
- Un esbozo gráfico para la función $g(x) = -f(x - 1) + 2$.

9. Sea

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } -4 < x \leq -1; \\ -1 & \text{si } -1 < x < 3; \\ (x - 4)^2 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

- a. Obtenga dominio, raíces y un bosquejo de la gráfica de g , así como su rango.
 b. Grafique la función $h(x) = g(x + 3) - 2$, a partir de la gráfica de g .

10. Sea f la función dada por $f(t) = t^2$ con $0 \leq t \leq 1$.

Sea g la función definida por

$$g(t) = \begin{cases} -f(-t) & \text{si } -1 \leq t \leq 0; \\ f(t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

- a. Hallar el dominio y hacer un bosquejo de la gráfica de g indicando su rango o imagen.
 b. Si $h(t) = 2g(t - 1) + 3$, hacer un bosquejo de la gráfica de esta nueva función e indicar su dominio y rango.

11. Sean

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} & \text{si } x \leq -1; \\ |3x-4| & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

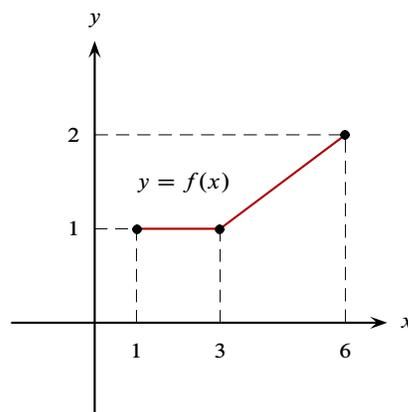
$$g(x) = 3f(x+1) - 4,$$

determinar las gráficas de ambas funciones, el dominio y el rango de la función g .

12. Dada la función

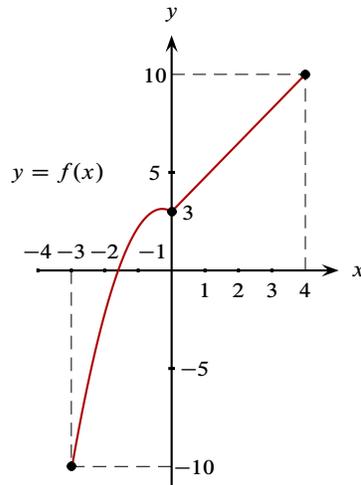
$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } -3 < x \leq -1; \\ 1-x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2; \\ -1 & \text{si } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

- a. Obtener la gráfica, el rango y las raíces de f .
 b. A partir de la gráfica de f hacer un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = 2 - f(x-1)$.
13. a. Encuentre la regla de correspondencia para la función f representada por la siguiente gráfica:



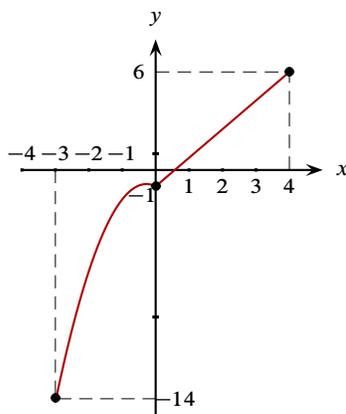
- b. Elabore la gráfica de la función dada por: $g(x) = 3f(2x - 2) + 2$.

14. Dada la gráfica de una función f :

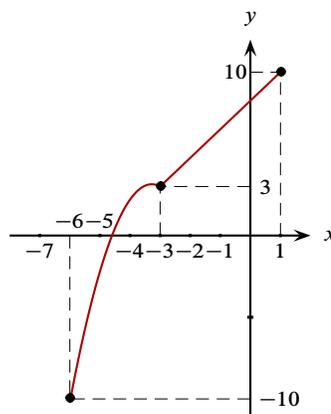


asocie cada una de las siguientes funciones $f(x + 3)$, $-2f(x)$ & $f(x) - 4$ con su gráfica correspondiente.

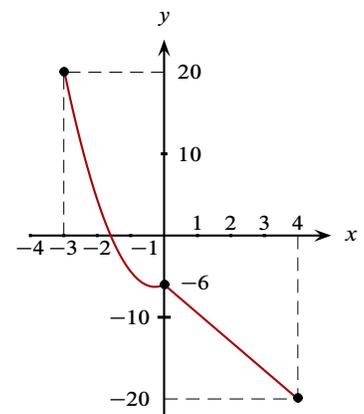
a.



b.



c.



15. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{si } x < -1; \\ 2x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1; \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Grafique:

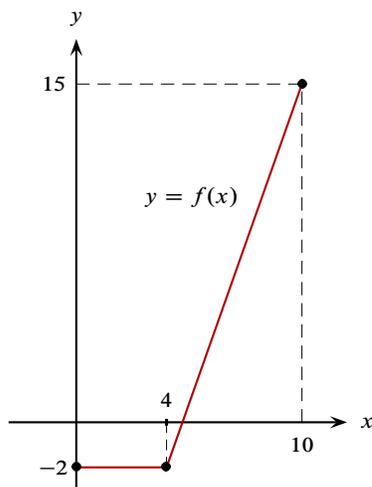
- a. $f(x)$.
- b. $g(x) = f(x - 2) + 5$.
- c. $h(x) = |f(x)|$.

16. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1; \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

- a. Determinar dominio, raíces, gráfica e imagen o rango de f .
- b. A partir de su gráfica, construir la gráfica de $g(x) = |f(x)|$.
- c. Graficar la función $h(x) = -f(x - 1) + 1$.

17. La siguiente es la gráfica de una función $f : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$.



- Determine su regla de correspondencia.
- Considere la función g definida por

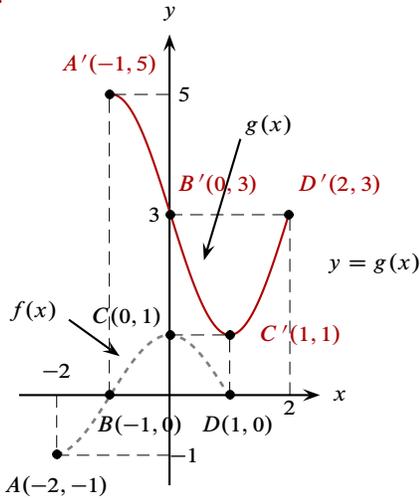
$$g(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{si } -10 \leq x < 0; \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

Bosqueje la gráfica de g . Determine su dominio, rango y raíces.

- Sea $h(x) = g(x + 1) - 2$; a partir de la gráfica de g obtenga la de h .

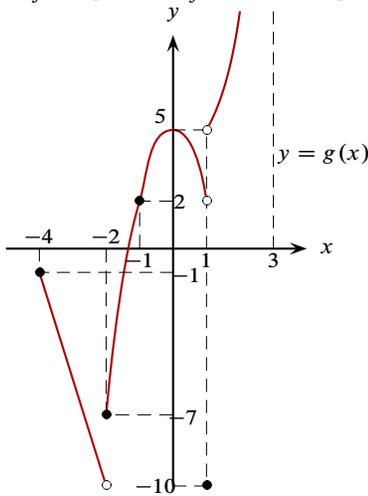
Ejercicios 2.7.1 Transformaciones de funciones, página 9

1.

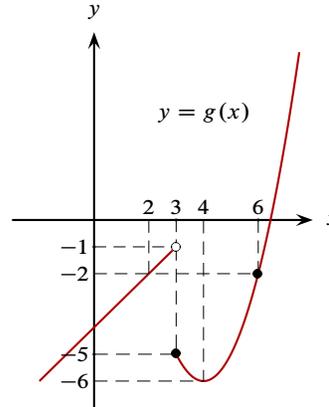
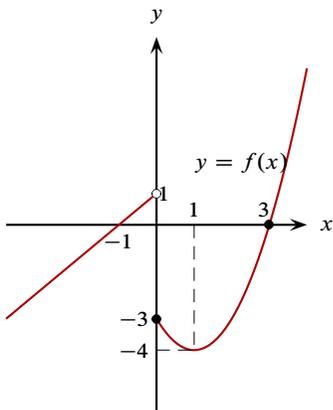


- $A(-2, -1) \rightarrow A'(-1, 5);$
- $B(-1, 0) \rightarrow B'(0, 3);$
- $C(0, 1) \rightarrow C'(1, 1);$
- $D(1, 0) \rightarrow D'(2, 3).$

2. $D_f = [1, 8], R_f = (-\infty, 4],$ raíz $x = 4;$

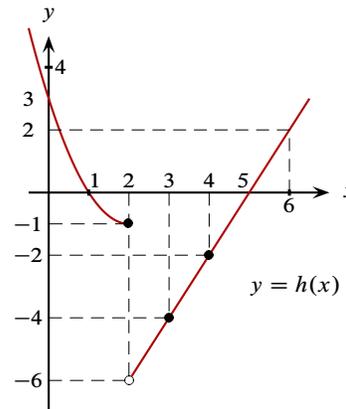


3.

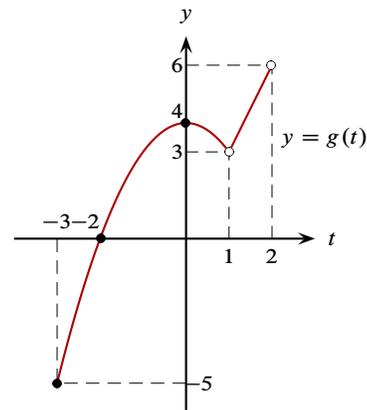


Dominio: $(-\infty, 3)$ y $[3, \infty);$
 rango: $\mathbb{R};$
 raíces: $4 + \sqrt{6}.$

4.



5. a.

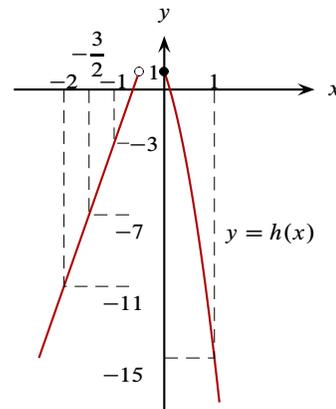
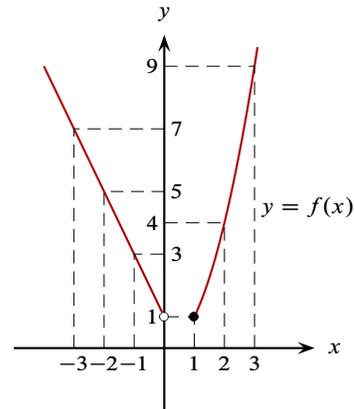
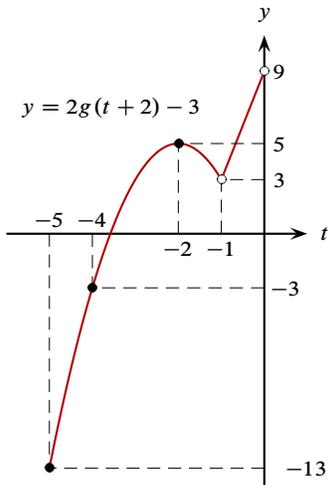


$D_g = [-3, 2) - \{1\} = [-3, 1) \cup (1, 2);$
 $R_g = [-5, 6);$
 raíces: $\{-2\};$

b. $g(t) \geq 0$ si $t \in [-2, 2) - \{1\} = [-2, 1) \cup (1, 2)$;

$g(t) < 0$ si $t \in [-3, -2)$;

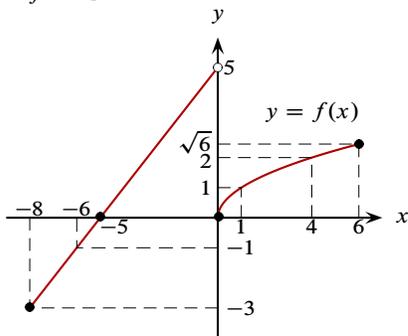
c.



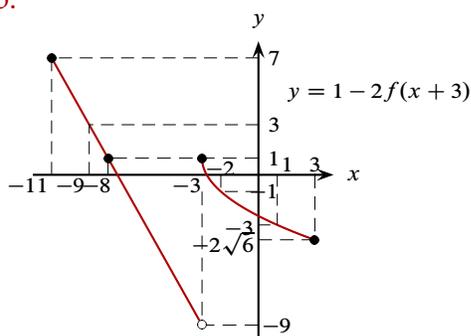
6. a. $D_f = [-8, 6]$;

raíces: -5 & 0 ;

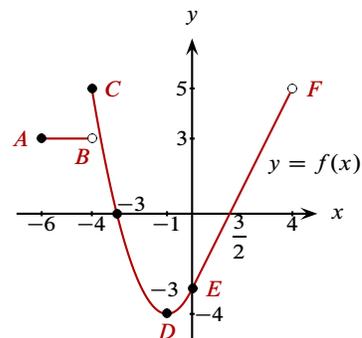
$R_f = [-3, 5]$;



b.



8.



Dominio: $D_f = [-6, 4)$;

rango: $R_f = [-4, 5]$;

raíces: $x = -3, x = 1.5$;

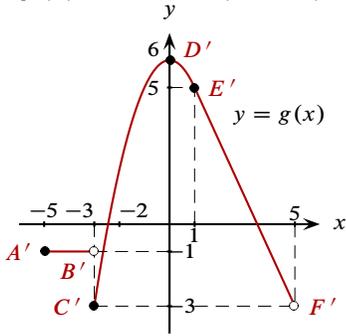
no es par ni impar;

$f(x)$ decrece si $x \in [-4, -1]$;

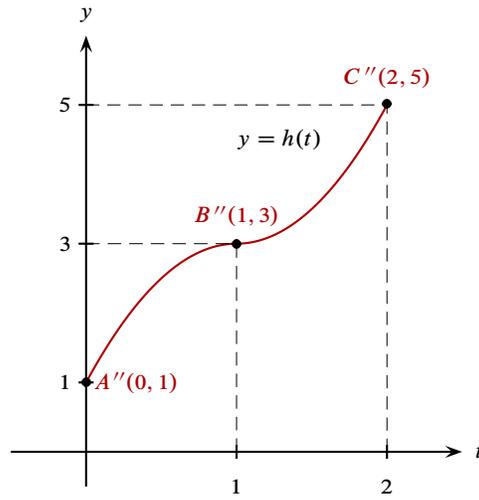
$f(x)$ crece si $x \in [-1, 4)$;

$f(x) > 0$ si $x \in (-6, -3) \cup (1.5, 4)$;

$f(x) < 0$ si $x \in (-3, 1.5)$;



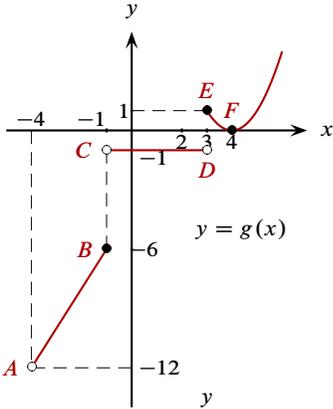
$R_g = [-1, 1]$;



9.

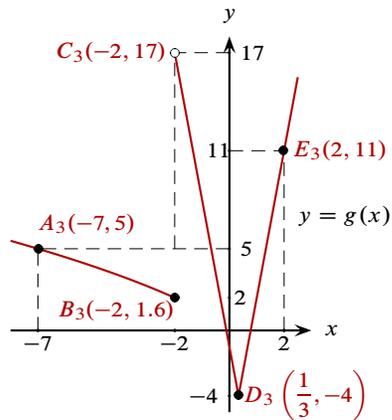
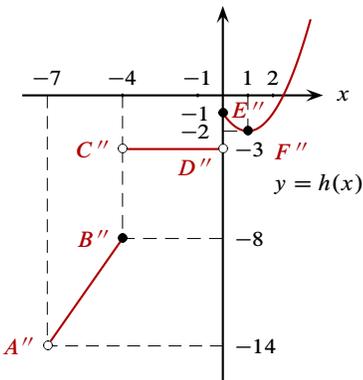
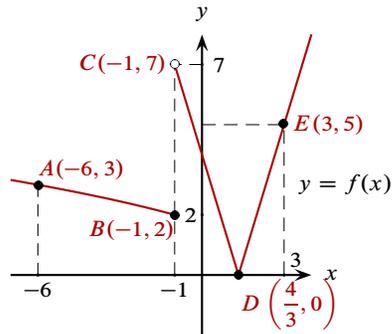
$D_g = (-4, +\infty)$;

$R_g = (-12, -6] \cup \{-1\} \cup [0, +\infty)$;

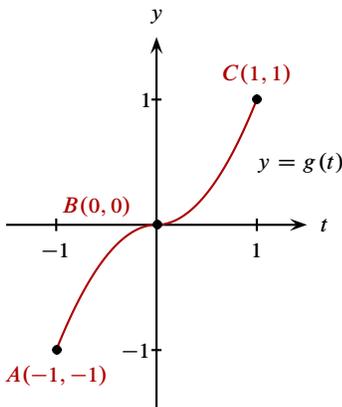


$D_h = [0, 2], R_h = [1, 5]$.

11.



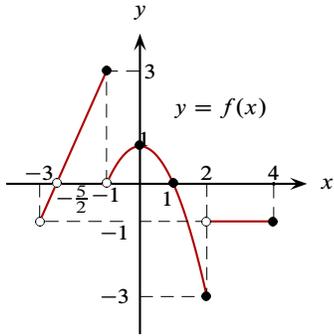
10.



El dominio de g es \mathbb{R} ;

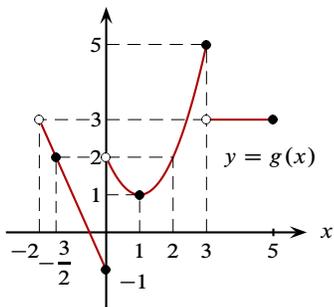
el rango de g es $(-4, +\infty)$.

12.

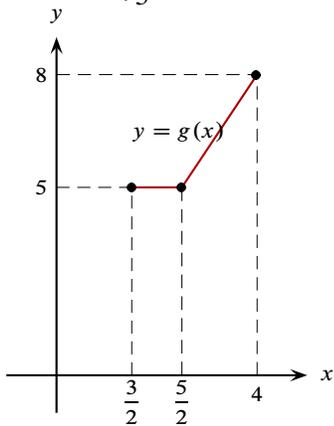


$R_f = [-3, 3];$

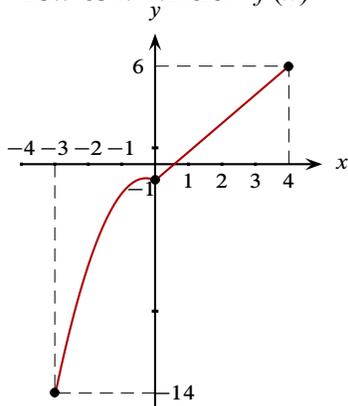
raíces: $x = -\frac{5}{2}; x = 1;$



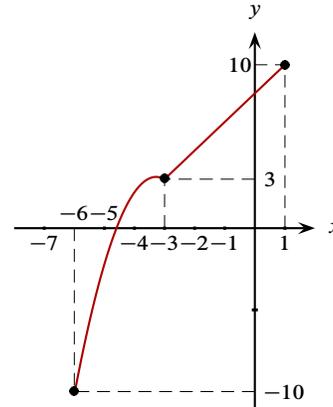
13. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1, 3]; \\ \frac{1}{3}x & \text{si } x \in [3, 6]. \end{cases}$
 (observe que $f(3) = 1$);



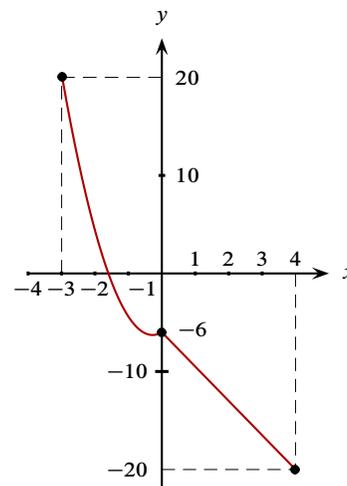
14. a. Ésta es la función $f(x) - 4$:



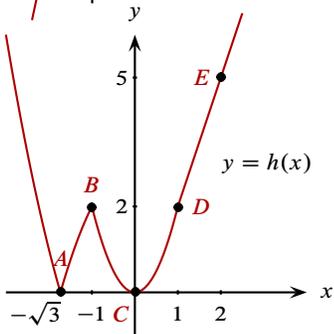
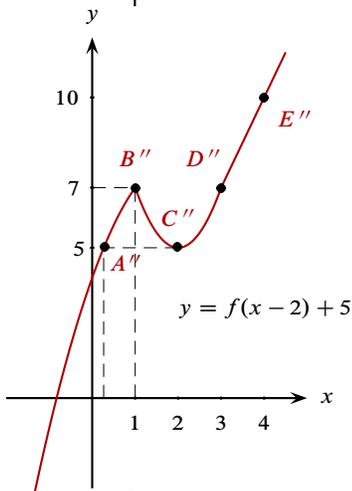
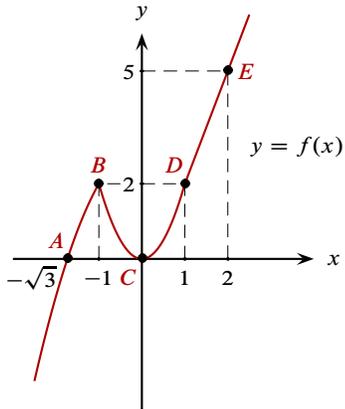
b. Ésta es la función $f(x + 3)$:



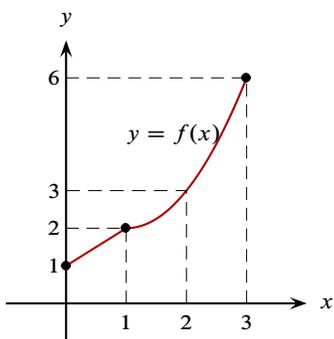
c. Ésta es la función $-2f(x)$:



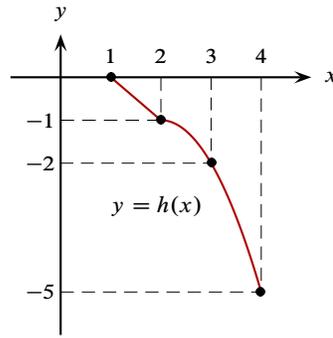
15.



16. $D_f = [0, 3]$; raíces de $f = \emptyset$; $R_f = [1, 6]$.

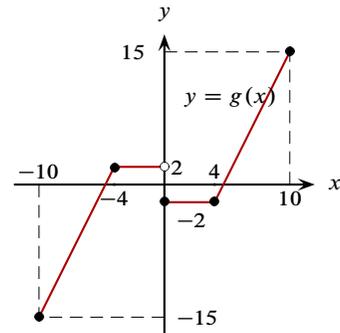


$f(x) = g(x)$;



17. a. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } 0 \leq x < 4; \\ \frac{17}{6}x - \frac{40}{3} & \text{si } 4 \leq x \leq 10. \end{cases}$

b.



$D_g = [-10, 10]$;

$R_g = [-15, 15]$;

raíces: $x = \pm \frac{80}{17}$.

c.

