Apellidos y Nombre: Núm.

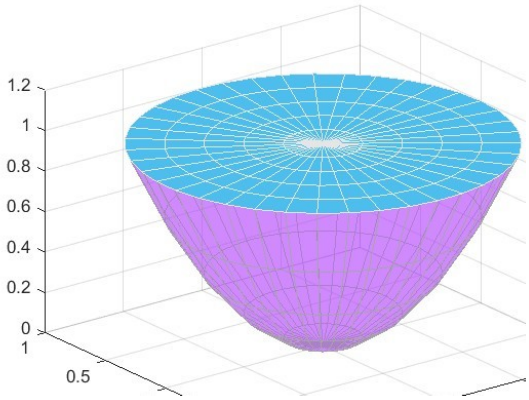
En todos los ejercicios se deberá justificar las respuestas

Bloque 1 - 28 de marzo de 2025

1

Se considera el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=(x-y)\mathbf{i}+(y-z)\mathbf{j}+(z-x)\mathbf{k}$ y H el sólido formado por los puntos (x,y,z) tales que $x^2+y^2\le z\le 1$. Calcula el flujo de $\mathbf{F}$ hacia el interior de la frontera de H utilizando y sin utilizar el teorema de la divergencia de Gauss. Escribe las condiciones que deben cumplirse para aplicar el resultado e identifica cada elemento que interviene en este teorema.

Para calcular el flujo hacia dentro del campo $\mathbf{F}(x,y,z)=(x-y)\mathbf{i}+(y-z)\mathbf{j}+(z-x)\mathbf{k}$ a través de la frontera de H, que llamaremos S, se puede utilizar la definición. La superficie S está formado por dos superficies, S_1 que es la porción de plazo $z=1$ que forma parte de S y S_2 la porción del paraboloide.



Llamamos D a la proyección de S sobre el plano z=0, esto es, el círculo unidad.

Aplicando la definición

Dado que el flujo pedido es **hacia dentro** se deberá considerar para S_1 la normal $\mathrm{n}_1=(0,0,-1)$ y para S_2 la normal $\mathrm{n}_2=(-2x,-2y,+1)$. Se tendrá que:

$$flujo=\iint_{S_1}\mathrm{F}\bullet\mathrm{n}_1 dS+\iint_{S_2}\mathrm{F}\bullet\mathrm{n}_2 dS$$

- El flujo a través de S_1, siendo D el interior del disco unidad es,

$$\iint_{S_1}\mathrm{F}\bullet\mathrm{n}_1 dS=\iint_D(x-y,y-1,1-x)\cdot(0,0,-1)\,dA=\iint_D(-1+x)\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1(-1+r\cos\theta)\,rdrd\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 -r\,drd\theta+\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos\theta\,drd\theta}_{=0\ \ \text{integrando en }\theta}=-\frac{2\pi}{2}=-\pi$$

Apellidos y Nombre: Núm.

- El flujo a través de S_2, siendo D el interior del disco unidad es,

$$\iint_{S_2} \mathrm{F} \bullet \mathrm{n}_2 dS = \iint_D \left(x-y, y-\left(x^2+y^2\right), x^2+y^2-x\right)\cdot\left(-2x,-2y,1\right)dA =$$
$$= \iint_D \left[-\left(x-y\right)2x - 2yy + 2y\left(x^2+y^2\right) + x^2+y^2-x\right]dA =$$
$$= \iint_D \left[\left(-x^2-y^2+2xy+2y\left(x^2+y^2\right)-x\right)\right]dA =$$

Pasando a coordenadas polares:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-r^2+2r^2\cos\theta sen\theta + 2r^3 sen\theta - r\cos\theta\right) r dr d\theta = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 dr d\theta = -\frac{\pi}{2}$$

Las integrales del segundo, tercer y cuarto sumando valen cero al integrar primero en θ.

El flujo hacia dentro de S es la suma de los dos flujos obtenidos: $-\pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{-3\pi}{2}$

Aplicando el Teorema de Gauss:

Se puede aplicar el teorema de la divergencia ya que S, frontera de H, es cerrada y suave por partes y además el campo es de clase C1 en todo el plano, calcularemos el flujo teniendo en cuenta que nos piden hacia adentro aplicando el teorema de Gauss

$$flujo\ \ hacia\ \ dentro = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = -\iiint_V div\,\mathbf{F}\, dxdydz = -\iiint_V 3\, dxdydz$$

Como $x^2+y^3 \le z \le 1$ y los puntos (x,y) están en el interior del disco unidad, se tendrá

$$-\iiint_V 3\, dxdydz = -3\iint_D \left[\int_{x^2+y^3}^1 dz\right]dA = -\iint_D 3\left(1-\left(x^2+y^2\right)\right)dA \underset{\substack{pasando \\ a\ polares}}{=} -3\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1-r^2\right) r dr d\theta =$$
$$= -6\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} = -6\pi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-3\pi}{2}$$

2

Se considera:

- C la curva plana en polares: $r = 2sen(t)$, $t\in[0,\pi/2]$.
- S la superficie: $z = 1-x^2$ sobre D el disco unidad.
- F el campo: $\mathbf{F}(x,y) = \left(x^2, y\right)$
- T la función: $T(x,y,z) = x+y+z$

Se pide, **plantear las integrales** que permitirían obtener los siguientes valores.

1. Longitud de C.
2. El valor medio de T sobre S.

Apellidos y Nombre: Núm.

3. El trabajo desarrollado por $\mathbf{F}$ para mover una partícula a lo largo de la curva C.

Escribir el **código Matlab** para calcular la integral del apartado 2.

Apartado 1. La curva viene dada en polares $r = 2sen(t)$. La longitud de la curva C se puede obtener de distintas formas:

- Utilizando la expresión de la diferencial de arco en polares, su longitud será:

$$L = \int_C ds = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}\, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{[2sen(t)]^2 + [2\cos(t)]^2}\, dt = \int_0^{\pi/2} 2dt = \pi$$

- Pasando a cartesianas se puede ver que es un arco de la circunferencia

$$r^2 = 2rsen(t) \to x^2 + y^2 = 2y \to x^2 + (y-1)^2 = 1$$

Como $t \in [0, \pi/2]$, su longitud es π. Se puede calcular este valor también como integral.

- En paramétricas, la curva se puede expresar como

$$x(t) = r(t)\cos(t) = 2sen(t)\cos(t) = sen(2t) \to x'(t) = 2\cos(2t)$$
$$y(t) = r(t)\operatorname{sen}(t) = 2sen(t)sen(t) = 2sen^2(t) \to y'(t) = 4sen(t)\cos(t)$$

$$L = \int_C ds = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{[2\cos(2t)]^2 + [4sen(t)\cos(t)]^2}\, dt$$

Apartado 2. Considerando S la superficie $z = f(x,y) = 1 - x^2$ que está definida sobre D el disco unidad, la integral pedida es

$$T_{media} = \frac{\iint_S T(x,y,z)\, dS}{\iint_S dS} = \frac{\iint_D T(x,y,1-x^2)\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_x)^2 + 1}\; dxdy}{\iint_D \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_x)^2 + 1}\; dxdy} =$$

Sustituyendo

$$T_{media} = \frac{\iint_D (x + y + 1 - x^2)\sqrt{4x^2 + 1}\; dxdy}{\iint_D \sqrt{4x^2+1}\; dxdy} =$$

Pasando a polares:

Apellidos y Nombre: Núm.

$$T_{media} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r\cos(\theta) + rsen\left(\theta\right) + 1 - r^2\cos^2(\theta)\right)\sqrt{4r^2\cos^2\left(\theta\right)+1}\ r\ drd\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{4r^2\cos^2\left(\theta\right)+1}\ r\ drd\theta}$$

Apartado 3. El campo es conservativo, por lo que aplicando el teorema fundamental de integrales de línea. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f\left(B\right) - f\left(A\right)$ siendo f una función potencial del campo y B el punto final de la curva y A el extremo inicial. Es decir,

$$f\left(x,y\right) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2}$$

$$A = \left(x\left(0\right), y\left(0\right)\right) = \left(0,0\right) \qquad B = \left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(0,2\right)$$

Sería:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f\left(B\right) - f\left(A\right) = \frac{4}{2} - 0 = 2$$

Otra forma, utilizando la definición de integral de línea, se tendrá

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}\left(\mathbf{r}\left(t\right)\right)\cdot\mathbf{r}'\left(t\right)dt = \int_0^{\pi/2}\left[x\left(t\right)^2, y\left(t\right)\right]\cdot\left(x'\left(t\right), y'\left(t\right)\right)dt = \int_0^{\pi/2} x\left(t\right)^2 x'\left(t\right)dt + y\left(t\right)y'\left(t\right)dt$$

siendo $\mathbf{r}\left(t\right) = \left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right)$ con $t\in\left[0,\pi/2\right]$

$$x\left(t\right) = r\left(t\right)\cos\left(t\right) = 2sen\left(t\right)\cos\left(t\right) = sen\left(2t\right) \to x'\left(t\right) = 2\cos\left(2t\right)$$
$$y\left(t\right) = r\left(t\right)\operatorname{sen}\left(t\right) = 2sen\left(t\right)sen\left(t\right) = 2sen^2\left(t\right) \to y'\left(t\right) = 4sen\left(t\right)\cos\left(t\right)$$

Es decir,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2}\mathbf{F}\left(\mathbf{r}\left(t\right)\right)\cdot\mathbf{r}'\left(t\right)dt = \int_0^{\pi/2}\left[2\,sen^2\left(2t\right)\cos\left(2t\right) + 8sen^3\left(t\right)\cos\left(t\right)\right]\cdot dt$$

3

(a) Invertir el orden de integración en la siguiente integral $\int_0^1\int_{x^2}^{e^x} f\left(x,y\right)dydx$.

(b) Calcular la integral $\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ siendo D el dominio limitado por $y = x$

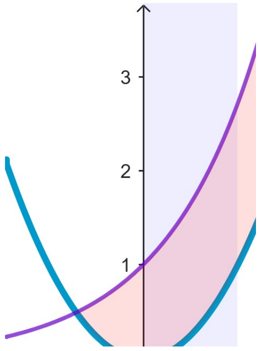
$x^2 - x + y^2 = 0$. Nota: Considerar el dominio de área más pequeña de los dos posibles limitados por estas curvas.

Puntuación: 2.0

Apartado a)

Apellidos y Nombre: Núm.

La región de integración es la comprendida entre las curvas $y = x^2$, $y = e^x$ para $0 \le x \le 1$.



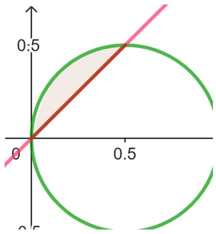
Describiendo la región por franjas horizontales, la integral se podrá calcular como

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{e^x} f(x,y)\,dydx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy + \int_1^e \int_{\log y}^1 f(x,y)\,dxdy$$

Apartado b)

Completando cuadrados, puede verse que la curva $x^2 - x + y^2 = 0$ es una circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}.0\right)$ y radio ½: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

Pasando a coordenadas polares, la curva será $r^2 = r\cos\theta \to r = \cos\theta$ siendo $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.



El área de la región pedida es

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} rsen\theta \cdot r \cdot rdrd\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=\cos\theta} sen\theta d\theta = \frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4(\theta)\, sen\theta d\theta = -\left.\frac{\cos^5(\theta)}{20}\right|_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^5}{20 \cdot 2^5}$$

Apellidos y Nombre: Núm.

4

(a) Calcular la integral $\int_C (x-2y)\,dx + y^2 dy$ a lo largo de la circunferencia unidad.

(b) Se considera $\mathbf{F}(x,y) = (y, x^3 y)$ y $A(2,0)$, $B\left(1,\frac{1}{3}\right)$ y $C\left(2,\frac{8}{3}\right)$ tres puntos. Se pide calcular

$\int_C \operatorname{div}\mathbf{F}\,ds$ siendo C la curva que une AB seguida de la curva $y=\frac{x^3}{3}$ que une B con C.

Puntuación: 1.5

Apartado a)

Como la curva es cerrada, simple y suave por partes y el campo $\mathbf{F}(x,y) = (x-2y, y^2)$ es de clase C^1 en todo el plano, aplicando el Teorema de Green, el valor de la integral será

$$\int_C \underbrace{(x-2y)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{y^2}_{N(x,y)}\,dy = \iint_D -2dA = -2\pi\cdot 1^2 = -2\pi$$

donde D es el dominio encerrado por C, esto es, el interior de la circunferencia unidad.

Apartado b)

Dado que $\mathbf{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y)) = (y, x^3 y)$ hay que integrar sobre C el siguiente campo escalar,

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 + x^3 = x^3$$

La curva C está formada por dos curvas.

- C1 segmento que une A con B. Una parametrización es

$$\begin{aligned} x(t) &= 2-t && \rightarrow x'(t) = -1 && t\in[0,1] \\ y(t) &= 0+\frac{t}{3} && \rightarrow y'(t) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

El diferencial de arco es $ds = \sqrt{1+\frac{1}{9}}dt = \frac{\sqrt{10}}{3}dt$

$$\int_{C_1} \operatorname{div}\mathbf{F}\,ds = \int_{C_1} x^3\,ds = \int_0^1 (2-t)^3\frac{\sqrt{10}}{3}dt = -\frac{\sqrt{10}}{3}\frac{(2-t)^4}{4}\Bigg|_{t=0}^{t=1} = -\frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{(1-2^4)}{4} = \frac{5\sqrt{10}}{4}$$

- C2 curva que va desde B hasta C. Una parametrización es.

$$\begin{aligned} x(t) &= t && \rightarrow x'(t) = 1 && t\in[1,2] \\ y(t) &= \frac{t^3}{3} && \rightarrow y'(t) = t^2 \end{aligned}$$

El diferencial de arco es $ds = \sqrt{1+t^4}dt$

Apellidos y Nombre: Núm.

$$\int_{C_2} \operatorname{div} \mathbf{F}\, ds = \int_{C_2} x^3\, ds = \int_1^2 t^3 \left(1+t^4\right)^{1/2} dt = \left.\frac{\left(1+t^4\right)^{3/2}}{4\cdot\frac{3}{2}}\right|_{t=1}^{t=2} = \frac{17^{3/2}-2^{3/2}}{6}$$

Por lo tanto, la integral pedida es la suma de los dos valores obtenidos:

$$\int_{C} \operatorname{div} \mathbf{F}\, ds = \int_{C_1} x^3\, ds + \int_{C_2} x^3\, ds = \frac{5\sqrt{10}}{4} + \frac{17^{3/2}-2^{3/2}}{6}$$

Bloque 2 - 19 de mayo de 2025

1

(a) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial $y\,dx + \left(x+y\right)dy = 0$ utilizando dos métodos de resolución.

(b) Si $\mu\left(x\right) = e^{x^2}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} + p\left(x\right)y = x$, obtener $p\left(x\right)$. Justificar la respuesta.

(c) Encontrar la solución general de $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$. Justificar los pasos.

Solución a)

Forma 1. La ecuación diferencial es exacta ya que:

$$M\left(x,y\right) = y \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$
$$N\left(x,y\right) = x+y \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial N}{\partial y} = 1$$

Buscamos una función f de forma que $df = y\,dx + \left(x+y\right)dy$. Se tendrá que cumplir;

$$f_x' = y \qquad \rightarrow f\left(x,y\right) = yx + h\left(y\right)$$
$$f_y' = x+y \qquad \rightarrow x+y = x + h'\left(y\right) \qquad \rightarrow h'\left(y\right) = y \rightarrow h\left(y\right) = \frac{y^2}{2}$$

La función puede ser $f\left(x,y\right) = yx + \frac{y^2}{2}$ y la soluciíon general de la edo es $yx + \frac{y^2}{2} = C,\ C \in \mathbb{R}$

Forma 2. La ecuación diferencial

$$y\,dx + \left(x+y\right)dy = 0 \qquad \rightarrow \qquad y' = \frac{-y}{x+y}$$

es homogénea, se hace el cambio $z = \frac{y}{x} \rightarrow y = zx \qquad y' = z'x + z$. Sustituyendo

Apellidos y Nombre: Núm.

$$z'z+z=\frac{-zx}{x+zx} \qquad \rightarrow z'z+z=\frac{-z}{1+z} \rightarrow z'z=\frac{-z}{1+z}-z$$

$$\rightarrow z'x=\frac{-z-z-z^2}{1+z} \rightarrow x\frac{dz}{dx}=\frac{-2z-z^2}{1+z} \rightarrow \frac{1+z}{2z+z^2}dz=-\frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\log\left|2z+z^2\right|=-\log\left|x\right|+C \rightarrow \left|2z+z^2\right|=\frac{e^C}{x^2} \rightarrow 2z+z^2=\frac{C}{x^2} \quad C\in\mathbb{R}$$

Deshaciendo el cambio,

$$2\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{C}{x^2} \quad \left(C\in\mathbb{R}\right) \qquad \rightarrow \qquad 2yx+y^2=C \quad \left(C\in\mathbb{R}\right)$$

Solución b)

La ecuación diferencial es lineal de orden 1. Un factor integrante es

$$\mu\left(x\right)=e^{\int p(x)dx}=e^{x^2} \qquad \rightarrow \qquad x^2=\int p\left(x\right)dx \rightarrow \qquad p\left(x\right)=2x$$

También puede multiplicarse la ecuación por el factor integrante dado e imponiendo la condicición para que sea exacta, se obtendría el valor de p(x).

Solución c)

La ecuación diferencial es de orden dos y de coeficientes constantes. La solución general es la solución general de la homogénea asociada sumada a una solución particular de la completa.

Para calcular la solución general de la homogénea se calcula la ecuación característica:

$$r^2-2r+1=\left(r-1\right)^2=0 \qquad \rightarrow \qquad r=1 \; doble \qquad \rightarrow \qquad y_{GH}=C_1e^x+C_2xe^x \quad \left(C_1,\, C_2\in\mathbb{R}\right)$$

Para encontrar la solución particular de la completa, utilizamos el método de variación de parámetros considerando

$$y_p=C_1\left(x\right)e^x+C_2\left(x\right)xe^x$$

Dado que y_p debe cumplir la edo, se obtendría la ecuación

$$C_1'\left(x\right)e^x+C_2'\left(x\right)\left(e^x+xe^x\right)=\frac{e^x}{1+x^2}$$

Imponiendo además la siguiente condición $C_1'\left(x\right)e^x+C_2'\left(x\right)xe^x=0$, se resuelve el siguiente sistema

$$\begin{array}{l} C_1'\left(x\right)e^x+C_2'\left(x\right)xe^x=0 \\ C_1'\left(x\right)e^x+C_2'\left(x\right)\left(e^x+xe^x\right)=\dfrac{e^x}{1+x^2} \end{array} \qquad \rightarrow \qquad \begin{array}{l} C_1'\left(x\right)+C_2'\left(x\right)x=0 \\ C_1'\left(x\right)+C_2'\left(x\right)\left(1+x\right)=\dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

Resolviendo

$$C_1'\left(x\right)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & x \\ \dfrac{1}{1+x^2} & 1+x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1+x \end{vmatrix}}=\frac{x}{1+x^2} \qquad \rightarrow C_1\left(x\right)=\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)$$

Apellidos y Nombre: Núm.

$$C_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & \dfrac{1}{1+x^2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & x\\ 1 & 1+x\end{vmatrix}}=\frac{1}{1+x^2}\quad\rightarrow\quad C_2(x)=arctg(x)$$

La solución particular es

$$y_p=\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)e^x+xe^x arctg(x)$$

La solución general de la ecuación diferencial

$$y=y_{GH}+y_p=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)e^x+xe^x arctg(x)\qquad \left(C_1,\,C_2\in\mathbb{R}\right)$$

2

(a) Dada la ecuación diferencial $\left(x^2+2x\right)y''-2(x+1)y'+2y=e^x$,

1. encontrar la solución general de la edo homogénea asociada sabiendo que x^2 es una solución.
2. Escribe el código Matlab para encontrar la solución general de la edo completa y la curva solución que pasa por el punto (0,0) y tiene por pendiente en dicho punto el valor 3.

(b) Obtener **la transformada de Laplace de la solución** del P.V.I. siguiente:

$$q''(t)+2q'(t)+4q(t)=10U(t-1)$$
$$q(0)=0\qquad q'(0)=1$$

Nota: Para calcula la transformada de $U(t-1)$ utiliza la definición de transformada. Se deben enunciar las propiedades de las transformadas que se utilicen.

Apartado a.1

La ecuación diferencial es lineal de orden 2, la homogénea asociada es $\left(x^2+2x\right)y''-2(x+1)y'+2y=0$.

Para encontrar la solución general de la homogénea debemos:

1. Comprobar que $y_1=x^2$ es solución. En efecto, cumple la ecuación diferencial

   $$\left(x^2+2x\right)y_1''-2(x+1)y_1'+2y_1=\left(x^2+2x\right)\cdot 2-2(x+1)\cdot 2x+2x^2=0$$

2. Obtener otra solución de la ecuación diferencial homogénea que sea linealmente independiente con $y_1=x^2$. Para ello se considera $y_2=v(x)x^2$. Derivando

   $$y_2'=v'(x)x^2+v(x)\cdot 2x$$
   $$y_2''=v''(x)x^2+v'(x)\cdot 2x+v'(x)\cdot 2x+v(x)\cdot 2=v''(x)x^2+4x\,v'(x)+v(x)\cdot 2$$

   Sustituyendo en la ecuación diferencial homogénea

   $$\left(x^2+2x\right)\left[v''(x)x^2+4x\,v'(x)+v(x)\cdot 2\right]-2(x+1)\left[v'(x)x^2+v(x)\cdot 2x\right]+2x^2v(x)=0$$

Apellidos y Nombre: Núm.

$$v''(x)\left[(x^2+2x)x^2\right]+v'(x)\underbrace{\left[(x^2+2x)4x-2(x+1)x^2\right]}_{4x^3+8x^2-2x^3-2x^2}+v(x)\underbrace{\left[2(x^2+2x)-4x(x+1)+2x^2\right]}_{=0}=0$$

$$v''(x)(x^2+2x)x^2=-v'(x)x^2(2x+6) \quad \rightarrow \quad \frac{v''(x)}{v'(x)}=-\frac{2x+6}{x^2+2x}\underset{\substack{Desomponiendo\\ en\ fracciones\ simples}}{=}-\frac{3}{x}+\frac{1}{x+2}$$

Integrando

$$\log v'(x)=-3\log x+\log(x+2) \quad \rightarrow \ v'(x)=\frac{x+2}{x^3}=\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}$$

$$\rightarrow \quad v(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \ y_2=x^2\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=-x-1$$

La solución general de la ecuación diferencial homogénea es

$$y_{GH}=C_1x+C_2(x+1) \qquad C_1,\ C_2\in\mathbb{R}$$

Apartado a.2

```
%Para buscar la solución en simbólico
syms  y(x)
dy=diff(y);dy2=diff(dy);
ecuacion=(x^2+2*x)*dy2-2*(x+1)*dy+2*y==exp(x);
condiciones=[y(0)==0,dy(0)==3];
dsolve(ecuacion,condiciones)
```

Apartado b. Llamamos $Q=\mathcal{L}[q](s)$, es decir, Q es la transformada de la solución del PVI. Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación y utilizando que la transformada es lineal, se tendrá

$$\mathcal{L}\{q''(t)\}+2\mathcal{L}\{q'(t)\}+4\mathcal{L}\{q(t)\}=\mathcal{L}\{10U(t-1)\} \qquad (*)$$

Se tiene en cuenta que:

1. Aplicando la propiedad de la derivada

$$\mathcal{L}\{q'(t)\}=s\mathcal{L}\{q(t)\}-q(0)=sQ$$
$$\mathcal{L}\{q''(t)\}=s\mathcal{L}\{q'(t)\}-q'(0)=s^2Q-1$$

2. Para calcular la transformada de

$$f(t)=10U(t-1)=\begin{cases}10 & t\geq 1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

por la definición, habrá que calcular

$$\mathcal{L}[f](s)=F(s)=\int_1^\infty 10\,e^{-st}dt=10\lim_{R\to\infty}\int_1^R e^{-st}dt=10\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_{t=1}^{t=R}=$$

$$=10\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-sR}}{s}+\frac{e^{-s}}{s}\right]=\frac{10e^{-s}}{s} \quad (s>0)$$

Apellidos y Nombre: Núm.

Sustituyendo en (*), la transformada de la solución de la ecuación diferencial es:

$$s^2Q - 1 + 2sQ + 4Q = \frac{10e^{-s}}{s} \qquad \to \qquad \left(s^2 + 2s + 4\right)Q = \frac{10e^{-s}}{s} - 1$$

$$Q = \frac{10e^{-s} - s}{s\left(s^2 + 2s + 4\right)}$$

3

Dos recipientes de igual capacidad se llenan de líquidos diferentes. El recipiente A se mantiene a 10°C y el B a 80°C. Una pequeña pieza metálica con temperatura inicial de 30°C se introduce en el recipiente A, donde su temperatura baja a 25°C durante el primer minuto; a los 2 minutos (desde el comienzo) se saca de A y se introduce en B, donde pasado otro minuto alcanza los 40°C. ¿Cuánto tiempo, contado desde el principio del proceso, tardará la pieza en llegar a 60°C?

Nota: Experimentalmente se ha comprobado que la temperatura de un cuerpo cambia proporcionalmente a la diferencia entre su temperatura y la del medio en que se encuentra:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m), (k > 0)$$

donde, T_m es la temperatura del medio.

Ejercicio entregado como tarea de grupo.

Considerando $T\left(t\right)$ la temperatura en el instante t medido en minutos, la ecuación diferencial que modeliza este problema en el recipiente A es la siguiente

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - 10\right) \qquad T\left(0\right) = 30 \ , \ T\left(1\right) = 25$$

La solución de la ecuación diferencial es

$$\frac{dT}{T-10} = -k\,dt \ \to \ \log\left|T - 10\right| = -kt + C \ \to \left|T\left(t\right) - 10\right| = e^C e^{-kt} \to T\left(t\right) = 10 + Ce^{-kt}$$

Con las dos condiciones se obtiene K y la constante C de integración.

$$30 = T\left(0\right) = 10 + C \qquad \to \qquad C = 20$$

$$25 = T\left(1\right) = 10 + 20e^{-k} \qquad \to \qquad e^{-k} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \qquad \to e^{-tk} = \left(\frac{3}{4}\right)^t$$

Por lo tanto, la función para la temperatura en cada instante t.

$$T(t) = 10 + 20\left(\frac{3}{4}\right)^t$$

A los dos minutos la temperatura es $T(2) = 10 + 20\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 + \frac{180}{16} = \frac{340}{16} = \frac{85}{4}$

Para los siguientes minutos, la ecuación diferencial es la siguiente:

Apellidos y Nombre: Núm.

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T-80\right) \qquad T\left(0\right)=\frac{85}{4} \ , \ T\left(1\right)=40$$

Se ha considerado que el instante inicial en este proceso es cuando la pieza se mete en el recipiente B (a los dos minutos de iniciar todo el proceso). La solución es

$$T\left(t\right)=80+Ce^{-kt}$$

Con las dos condiciones se obtiene C y k.

$$\frac{85}{4}=T\left(0\right)=80+C \to C=\frac{85}{4}-80=-\frac{235}{4}$$

$$40=T\left(1\right)=80-\frac{235}{4}e^{-k} \to e^{-k}=\frac{160}{235}=\frac{32}{47} \to e^{-kt}=\left(\frac{32}{47}\right)^{t}$$

La temperatura a partir del segundo minuto es

$$T(t)=80-\frac{235}{4}\left(\frac{32}{47}\right)^{t} \qquad \text{o} \qquad T(t)=80-\frac{235}{4}\left(\frac{32}{47}\right)^{t-2}$$

En el primer caso, el valor de t es el tiempo transcurrido desde el minuto 2, en la segunda expresión, el tiempo se considera desde que se inició todo el proceso. La temperatura será de 60°C para $t \approx 4,8\,\mathrm{min}$

4

Puntos Extra Bloque 2

Dada la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=x-y$, se pide:

(a) Dibujar a mano una muestra del campo de direcciones en la región del plano [0,1]x[1,2] considerando únicamente cuatro puntos en esta región. Justifica la respuesta explicando qué es un campo de direcciones.

(b) Escribe el código Matlab para calcular la solución general de la edo y representar diez curvas solución.

Ver prácticas.