Seguimiento 1 – 7 febrero – Opción A

1

Dada la integral $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}dydx$

(a) Realiza la integral simbólica utilizando Matlab

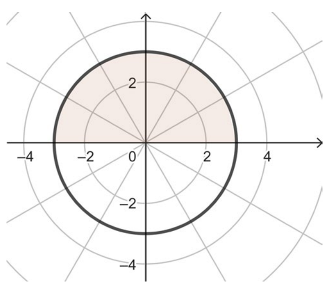
(b) Plantea y resuelve a mano la integral en polares y obtén su valor de manera numérica con la ayuda de Matlab.

Solución:

(a) Para hacer la integral en simbólico se debe escribir el siguiente código

```
syms x y
I=int(int((x^2+y^2)^1.5,y,0,sqrt(9-x^2)),x,-3,3)
double(I)
%152.681
```

(b) Se calcula la integral en polares.



$$y=\sqrt{9-x^2}\Rightarrow y^2=9-x^2\,,\ y\geq 0$$
$$\Rightarrow x^2+y^2=9\ ,\ y\geq 0$$

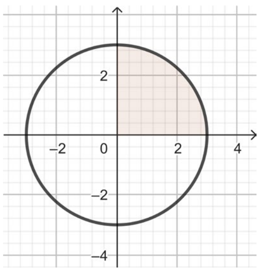
En coordenadas polares $\begin{cases}0\leq\theta\leq\pi\\ 0\leq r\leq 3\end{cases}$

$$I=\int_0^{\pi}\int_0^{3}\left(r^2\right)^{3/2} r\,drd\theta=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{3} r^4dr\right)d\theta=\pi\cdot\frac{r^5}{5}\Bigg|_{r=0}^{r=3}=\frac{3^5\pi}{5}$$

```
f=@(r,theta)    r.^4;
integral2(f,0,3,0,pi)
```

Nota: Para las siguientes opciones, se tendría

$$\int_0^{3}\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}dydx$$

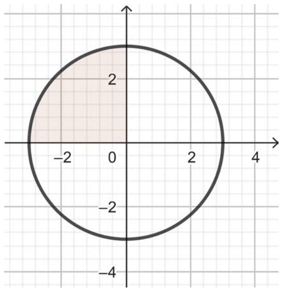


$$I=\int_0^{\pi/2}\int_0^{3}\left(r^2\right)^{3/2} r\,drd\theta=$$
$$=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{3} r^4dr\right)d\theta=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{r^5}{5}\Bigg|_{r=0}^{r=3}=\frac{3^5\pi}{10}$$

```
syms x y
I=int(int((x^2+y^2)^1.5,y,0,sqrt(9-x^2)),x,0,3)
double(I)


f=@(r,theta)    r.^4
integral2(f,0,3,0,pi/2)   %76.340
```

$$\int_{-3}^{0}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}dydx$$



$$I=\int_{\pi/2}^{\pi}\int_{0}^{3}\left(r^2\right)^{3/2} r\,drd\theta=$$

$$=\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_{0}^{3} r^4dr\right)d\theta=\frac{\pi}{2}\cdot\left.\frac{r^5}{5}\right|_{r=0}^{r=3}=\frac{3^5\pi}{10}$$

```
syms x y
I=int(int((x^2+y^2)^1.5,y,0,sqrt(9-x^2)),x,-3,0)
double(I)


f=@(r,theta)    r.^4
integral2(f,0,3,pi/2,pi)
%76.340
```

Seguimiento 2 – 12 marzo – Opción A

1A

Calcula la longitud de las curva C definida como $r=e^{2\theta}$, $\theta\in[0,\pi]$ utilizando coordenadas polares y considerando una parametrización de C.

Nota: Escribe en esta hoja el planteamiento para realizar el ejercicio, el código Matlab para calcular las integrales y el resultado que devuelve Matlab.

La longitud de una curva polar, $r=f\left(\theta\right)$, $\theta\in[0,\pi]$ se calcula de la forma siguiente

$$long(C)=\int_{0}^{\pi}\sqrt{\left[r\left(\theta\right)\right]^2+\left[r'\left(\theta\right)\right]^2}\,d\theta$$

en este caso $r\left(\theta\right)=e^{2\theta}$, $\theta\in[0,\pi]$.

En paramétricas, a partir de la ecuación polar de la curva, la longitud será

$$\left.\begin{array}{ll} x\left(\theta\right)=r\left(\theta\right)\cos\left(\theta\right) & \theta\in\left[0,\pi\right] \\ y\left(\theta\right)=r\left(\theta\right)sen\left(\theta\right) & \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} x\left(\theta\right)=e^{2\theta}\cos\left(\theta\right) & \theta\in\left[0,\pi\right] \\ y\left(\theta\right)=e^{2\theta}sen\left(\theta\right) & \end{array}\right\}$$

$$long(C)=\int_{0}^{\pi}\sqrt{x'\left(\theta\right)^2+y'\left(\theta\right)^2}\,d\theta$$

```
syms t
%Curva polar
int(sqrt(exp(2*t)^2+(2*exp(2*t))^2),0,pi)
%Curva en paramétricas
x=exp(2*t)*cos(t);
y=exp(2*t)*sin(t);
int(sqrt(diff(x)^2+diff(y)^2),t,0,pi)
```

$$\frac{\sqrt{5}\left(e^{2\pi}-1\right)}{2} \approx 5.975798375798875e+02$$

2A

Calcula la longitud de las curva C definida como

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(1-sen(t)\right)\cos(t) \\ y(t) &= \left(1-sen(t)\right)sen(t) \qquad t \in [0, \pi/4] \end{aligned}$$

utilizando esta parametrización y coordenadas polares.

Nota: Escribe en esta hoja el planteamiento para realizar el ejercicio, el código Matlab para calcular las integrales y el resultado que devuelve Matlab.

La longitud de una curva en paramétricas se obtiene

$$long(C) = \int_0^{\pi/4} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

La curva polar, a partir de la ecuación paramétrica, es

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos(t) \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ y(t) &= r(t)sen(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow r(t) = 1 - \operatorname{sen}(t) \;\; t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

La longitud se calculará de la forma siguiente

$$long(C) = \int_0^{\pi/4} \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}\, dt$$

```
syms t
%Curva paramétrica
x=(1-sin(t))*cos(t);
y=(1-sin(t))*sin(t);
I=int(sqrt(diff(x)^2+diff(y)^2),t,0,pi/4)
%Curva polar
r=1-sin(t);
int(sqrt(r^2+(cos(t))^2),0,pi/4)
double(I)
```

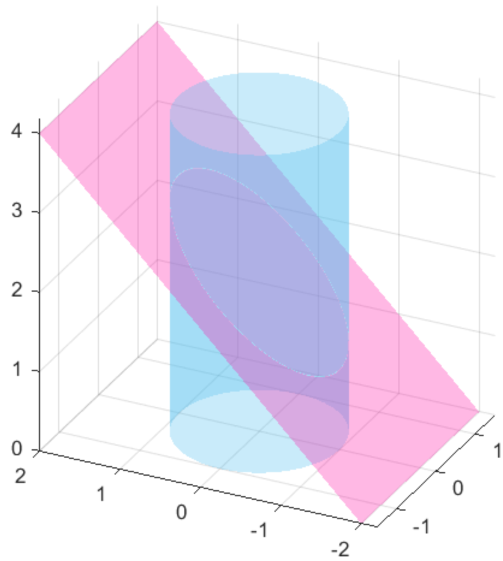
$$-\frac{4\left(\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}-2} \approx 0.867091005298957$$

Seguimiento 3 – 26 marzo

1

Se considera el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$ y S la porción del plano $z=y+2$ que se encuentra en el interior del cilindro $x^2+y^2=1$. Calcular el flujo a través de S considerando el vector normal hacia arriba.

Solución



La superficie es la porción del plano $z=f(x,y)=y+2$ interior al cilindro. Por lo tanto su proyección D es el círculo interior a $x^2+y^2=1$. En consecuencia, el flujo hacia arriba se calculará considerando $\mathbf{N}=\left(-f_x',-f_x',1\right)=(0,-1,1)$ de la forma siguiente

$$flujo=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_D \mathbf{F}(x,y,z)\big|_S\cdot\left(-f_x',-f_x',1\right)dA=\iint_D \left(x^2,y^2,(y+2)^2\right)\cdot(0,-1,1)\,dA=$$

$$=\iint_D\left[-y^2+(y+2)^2\right]dA=\iint_D[4y+4]\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(4rsen\,\theta+4\right)r\,drd\theta=4\pi$$

El código matlab será el siguiente

```
syms r t
int(int((4*r^2*sin(t)+4*r),r,0,1),t,0,2*pi)
%4 pi
```

Bloque 1

1

(a) Dada la integral: $\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dydx$ se pide:

a. Representar gráficamente el dominio de integración.

b. Escribir la integral usando coordenadas polares.

c. Calcular la integral doble para $f(x,y)=1$.

(b) Calcular $\iint_D (x+y)\,dxdy$ siendo D la región acotada por las rectas $y=x$, $y=-x$, $x=1$ barriendo el dominio D por franjas horizontales y por franjas verticales describiendo el dominio utilizando desigualdades.

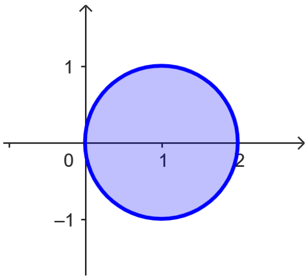
Solución a)

El dominio de integración es el conjunto de puntos (x,y) del plano cumpliendo

$$0 \le x \le 2$$
$$-\sqrt{2x-x^2} \le y \le \sqrt{2x-x^2}$$

Teniendo en cuenta que

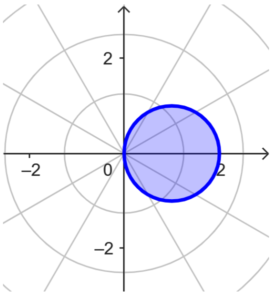
$$y=\pm\sqrt{2x-x^2} \Leftrightarrow y^2=2x-x^2 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$$



se trata del interior de un círculo de centro (1,0) y radio 1. Para escribir la integral usando coordenadas polares se tendrá en cuenta que la curva es

$$y^2=2x-x^2 \Leftrightarrow r^2=2r\cos\theta \Leftrightarrow r=2\cos\theta$$

y el dominio puede describirse como los puntos (θ,r) con



$$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$
$$0 \le r \le 2\cos\theta$$

Por lo tanto, la expresión de la integral en polares es

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2\cos\theta} f\left(r\cos\theta, rsen\theta\right) r dr d\theta$$

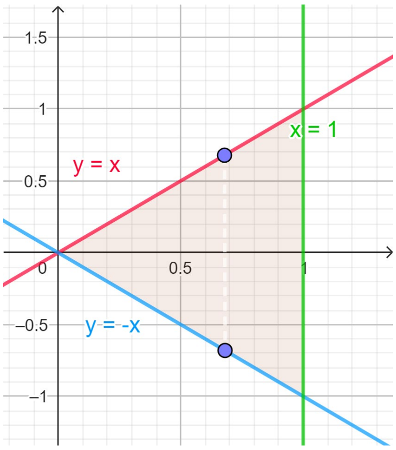
Calculando la integral para $f\left(x,y\right)=1$ utilizando coordenadas polares

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2\cos\theta} r dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2\theta \; d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\frac{1+\cos 2\theta}{2}\; d\theta = \theta\Big|_{\pi/2}^{\pi/2} = \pi$$

Nota: Observad que esta última integral es el área de un círculo de radio 1, luego la integral obtenida tiene que tener como valor $\pi\cdot 1^2=\pi$

Solución b)

- Para calcular la integral por franjas verticales, los puntos $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$ cumplirán

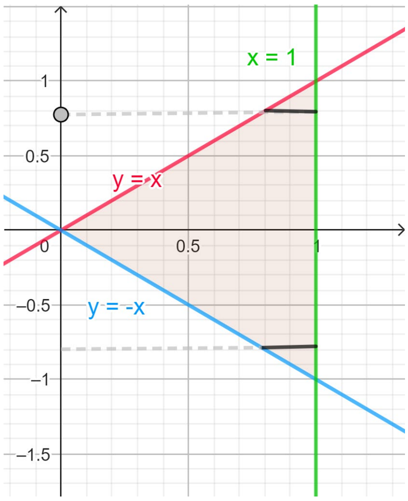


$$\begin{array}{l} 0\le x\le 1 \\ -x\le y\le y \end{array}$$

$$\iint_D \left(x+y\right)dxdy = \int_0^1\int_{-x}^{x}\left(x+y\right)dydx = \int_0^1\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)_{y=-x}^{y=x} dx =$$

$$= \int_0^1\left(x^2+\frac{x^2}{2}+x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}$$

- Para calcular la integral por franjas horizontales, los puntos $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$ cumplirán



$$0 \le y \le 1$$
$$y \le x \le 1$$

$$-1 \le y \le 0$$
$$-y \le x \le 1$$

$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \int_{-1}^{0}\int_{-y}^{1}(x+y)\,dxdy + \int_{0}^{1}\int_{y}^{1}(x+y)\,dxdy = \int_{-1}^{0}\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)_{x=-y}^{1} dy + \int_{0}^{1}\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)_{x=y}^{1} dy =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}+y-\frac{y^2}{2}+y^2\right)dy + \int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}+y-\frac{y^2}{2}-y^2\right)dy =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}+y+\frac{y^2}{2}\right)dy + \int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}+y-\frac{3y^2}{2}\right)dy = \left(\frac{y}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}\right)_{-1}^{0} + \left(\frac{y}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{2}\right)_{0}^{1} = \frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

2

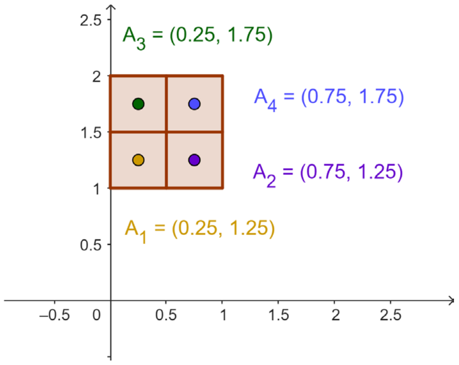
(a) Escribir la expresión de la suma de Riemann de la función $f(x,y)=\cos\left(x^2+y\right)$ cuando se considera una partición regular 2x2 en el rectángulo [0,1]x[1,2] tomando el punto medio en cada subrectángulo. No se pide calcular su valor, únicamente dejar indicada la expresión de la suma.

(b) Calcular el valor de la integral $\int_C y\,dx + e^{\mathrm{sen}\,y^2}dy$, siendo C la circunferencia $(x-1)^2+y^2=1$ recorrida en sentido horario.

(c) Calcular la integral curvilínea $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ siendo $\mathbf{F}(x,y,z)=(yz,xz,xy)$ lo largo de la hélice C de ecuaciones $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\,\mathrm{sen}\,t \\ z=t \end{cases}$ cuando t varía entre 0 y 2π.

Nota: En estos ejercicios, si se aplica una fórmula o un teorema debe indicarse en qué condiciones es aplicar e identificar los elementos que intervengan con los datos del problema.

Solución a)



Al considerar una suma 2x2 se tendrá $\Delta x = \Delta y = \dfrac{1}{2}$. Considerando los puntos intereriores a cada uno de los cuatro subrectángulos se obtendrán los puntos del dibujo A1, A2, A3 y A4. La suma de Riemanna es

$$\left[f\left(A_1\right)+f\left(A_2\right)+f\left(A_3\right)+f\left(A_4\right)\right]\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{\cos\left(0.25^2+1.25\right)}{4}+\frac{\cos\left(0.75^2+1.25\right)}{4}+\frac{\cos\left(0.25^2+1.75\right)}{4}+\frac{\cos\left(0.75^2+1.75\right)}{4}$$

Solución b)

Comprobando que se puede utilizar el teorema de Green (ver apuntes), llamando D al interior de la curva cerrada C del enunciado y siendo M y N las componentes del campo, se cumplirá

$$\int_C Mdx + Ndy = -\iint_D \left(N_x^{'} - M_y^{'}\right)dA$$

Hay que hacer notar que el signo menos se debe a que la curva se recorre en sentido horario. Por lo tanto,

$$\int_C ydx + e^{\operatorname{sen} y^2}dy = -\iint_D \left(0-1\right)dA = area\left(D\right) = \pi$$

Nota: Esta integral ya se calculó en el ejercicio 1 también.

Solución c)

El campo es conservativo ya que el $rot\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$. La función potencial $f\left(x,y,z\right)$ es

$$f_x^{'} = yz \rightarrow f\left(x,y,z\right) = xyz + h\left(y,z\right)$$

$$f_y^{'} = xz \rightarrow xz = xz + h_y^{'}\left(y,z\right) \rightarrow h_y^{'}\left(y,z\right) = 0 \rightarrow h\left(y,z\right) = g\left(z\right)$$

Por lo tanto, $f\left(x,y,z\right) = xyz + g\left(z\right)$

$$f_z^{'} = yx \rightarrow yx = yx + g'\left(z\right) \rightarrow g'\left(z\right) = 0 \rightarrow g\left(z\right) = C \in \mathbb{R}$$

Luego, $f\left(x,y,z\right) = xyz + C$ siendo $C \in \mathbb{R}$

Aplicando, el teorema fundamental de integrales de línea

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f\left(B\right) - f\left(A\right)$$

Como los puntos iniciales y final de la curva son

$$A = \left(x\left(0\right), y\left(0\right), z\left(0\right)\right) = \left(2\cos 0, 2\,\mathrm{sen} 0, 0\right) = (2,0,0)$$
$$B = \left(x\left(2\pi\right), y\left(2\pi\right), z\left(2\pi\right)\right) = \left(2\cos\left(2\pi\right), sen(2\pi), 2\pi\right) = \left(2,0,2\pi\right)$$

el valor de la integral será

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f\left(B\right) - f\left(A\right) = 0 - 0 = 0$$

Nota: Este ejercicio se puede realizar también utilizando la definición de integral de línea

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\left(\mathbf{r}\left(t\right)\right)\cdot \mathbf{r'}\left(t\right) dt = \int_0^{2\pi} \left(2t\cos\left(t\right), 2t\,\mathrm{sen}\left(t\right), t\right)\cdot\left(-2\,\mathrm{sen}\left(t\right), 2\cos\left(t\right), 1\right) dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(2t\,\mathrm{sen}\left(t\right), 2t\cos\left(t\right), 4\cos\left(t\right)\mathrm{sen}\left(t\right)\right)\cdot\left(-2\,\mathrm{sen}\left(t\right), 2\cos\left(t\right), 1\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\underbrace{-4t\,\mathrm{sen}^2\left(t\right) + 4t\cos^2\left(t\right)}_{\cos^2\left(t\right)-\mathrm{sen}^2\left(t\right)=\cos\left(2t\right)} + \underbrace{4\cos\left(t\right) sen\left(t\right)}_{2\cos t\,\mathrm{sen} t = sen\left(2t\right)}\right] dt = \underbrace{\int_0^{2\pi} 4t\cos\left(2t\right) dt}_{por\ partes} + \underbrace{\int_0^{2\pi} sen\left(2t\right) dt}_{=0} = 0$$

3

Se considera el sólido H que ocupa la región del espacio limitada superiormente por $z = 3 - x^2 - y^2$ e inferiormente por $z = 1 + x^2 + y^2$. Cada punto de H está a una temperatura dada por la función $T\left(x, y, z\right) = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$. Sea S la superficie frontera de H. Se pide

(a) Calcula la temperatura media del sólido H.

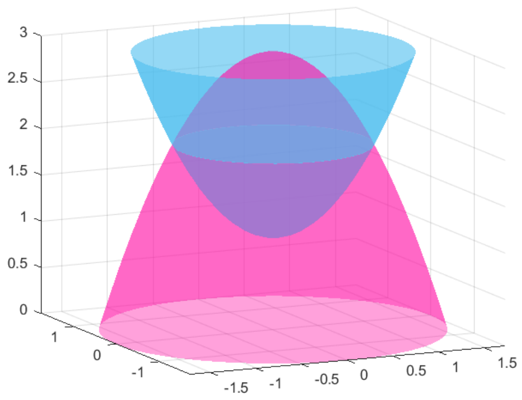
(b) Calcula el área de la superficie S.

(c) Plantea las integrales para calcular la temperatura media de la superficie S y escribe el código Matlab para obtener su valor.

Nota: Debes describir los elementos que intervienen en la resolución del ejercicio, escribir las integrales indicando las regiones de integración y las diferenciales a utilizar.

Solucion a)

El sólido H está limitado por los dos paraboloides, el azul de la figura siguiente, S1, que tiene por ecuación $z = 1 + x^2 + y^2$ y el rosa S2 de ecuación $z = 3 - x^2 - y^2$. Estas dos superficies encierran al sólido H.



Para calcular la temperatura media del sólido H se deberá calcular

$$T_{media} = \frac{T_{total\,en\,H}}{volumen(H)} = \frac{\iiint\limits_H T(x,y,z)\,dV}{\iiint\limits_H dV}$$

Los dos paraboloides se cortan en la curva

$$\left.\begin{array}{l} z = 3 - x^2 - y^2 \\ z = 1 + x^2 + y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1,\ z = 2$$

Por lo que la proyección del sólido sobre el plano XY es el dominio D, interior del círculo de centro (0,0) y radio 1. Los puntos de sólido H serán

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \ tales\ \ que\ \ (x,y) \in D, \quad z_{\text{inf}} \le z \le z_{\text{sup}}$$

$$volumen(H) = \iiint\limits_H dV = \iint\limits_{(x,y)\in D} (z_{\text{sup}} - z_{\text{inf}})\,dA = \iint\limits_{(x,y)\in D} \left(3 - x^2 - y^2 - \left(1 + x^2 + y^2\right)\right) dA =$$

$$\iint\limits_{(x,y)\in D} \left(2 - 2x^2 - 2y^2\right) dA \underset{\substack{pasando\,a\\ polares}}{=} 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 - r^2\right) r\,dr\,d\theta = 4\pi\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)_{r=0}^{r=1} = \pi$$

Para calcular la temperatura en H se tendrá que calcular la siguiente integral

$$volumen\left(H\right) = \iiint_H T(x,y,z)dV = \iint_{(x,y)\in D}\left(\int_{1+x^2+y^2}^{3-x^2-y^2}\frac{1}{\sqrt{z}}dz\right)dA = \iint_{(x,y)\in D}\left(2\sqrt{z}\right)_{z=1+x^2+y^2}^{z=3-x^2-y^2}dA =$$

$$= \iint_{(x,y)\in D} 2\left(\sqrt{3-x^2-y^2}-\sqrt{1+x^2+y^2}\right)dA \underset{\substack{pasando\\ a\ polares}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1\left(2r\sqrt{3-r^2}-2r\sqrt{1+r^2}\right)drd\theta =$$

$$= 2\pi\left[-\frac{\left(3-r^2\right)^{3/2}}{3/2}-\frac{\left(1+r^2\right)^{3/2}}{3/2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{4\pi}{3}\left[-2^{3/2}+3^{3/2}-2^{3/2}+1\right] = \frac{4\pi}{3}\left[-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+1\right]$$

La temperatura media es

$$T_{media} = \frac{T_{total\,en\,H}}{volumen(H)} = \frac{\frac{4\pi}{3}\left[-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+1\right]}{\pi} = \frac{4\left[-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+1\right]}{3}$$

Solución b)

La superficie S está formada por los dos paraboloides: S1 y S2. El área de S1 y el de S2 es el mismo. El área de cada uno de ellos es

$$área\left(S_1\right) = \iint_{S_1} dS = \iint_D \sqrt{1+\left(f_x'\right)^2+\left(f_y'\right)^2}dA = \iint_D \sqrt{1+\left(2x\right)^2+\left(2y\right)^2}dA \underset{\substack{pasando\ a\\ coordenadas\\ polares}}{=}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\,rdrd\theta = \frac{2\pi}{8}\left.\frac{\left(1+4r^2\right)^{3/2}}{3/2}\right|_{r=0}^{r=1} = \frac{5^{3/2}-1}{6}\pi = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi$$

El área de S es por tanto dos veces el valor obtenido anteriormente.

$$área\left(S\right) = \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\pi$$

Solución c)

La temperatura media de la superficie será

$$T_{media} = \frac{T_{total\,en\,S}}{área(S)} = \frac{\iint_S T\left(x,y,z\right)dS}{\iint_S dS} = \frac{\iint_S T\left(x,y,z\right)dS}{\frac{5\sqrt{5}-1}{3}\pi}$$

Para calcular la temperatura total hay que realizar la siguiente integral

$$\iint_{S_1} T(x,y,z)\,dS + \iint_{S_2} T(x,y,z)\,dS =$$

$$= \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dxdy + \iint_D \frac{1}{\sqrt{3-x^2-y^2}}\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\sqrt{1+4r^2}\;r\,drd\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3-r^2}}\sqrt{1+4r^2}\;r\,drd\theta$$

El código Matlab para calcular esta integral es el siguiente

```
syms r t
T1=int(int(1/sqrt(1+r^2)*sqrt(1+4*r^2)*r,r,0,1),t,0,2*pi)
T2=int(int(1/sqrt(3-r^2)*sqrt(1+4*r^2)*r,r,0,1),t,0,2*pi)
T=T1+T2
```

La temperatura media en S será, por lo tanto,

```
areaS= (pi*(5*5^(1/2) - 1))/3
tm=T/areaS
double(tm) %0.7273
```

Seguimiento 1 – Bloque 2 – 23 abril

1

a) Obtén la pendiente de la recta tangente a la curva solución de la EDO $y' = \dfrac{y^2+\cos(x)}{3x^2+y}$ en el punto $(0,3)$. ¿Existe solución única de la edo que pase por dicho punto?

b) Calcular con Matlab la solución de la ecuación diferencial $(2+x+2y)dx+dy=0$ que pasa por el punto (1,1). Encuentra una curva ortogonal a la obtenida como solución que pase por el mismo punto

c) Representa una muestra del campo de direcciones de la ecuación diferencial del apartado 2 en el rectángulo [0,3]x[-4, 4] considerando 5x6 puntos. Dibuja en la misma gráfica 6 curvas solución de la ecuación diferencial $(2+x+2y)dx+dy=0$ dando 6 valores a la constante de integración entre -10 y 4.

Solución a)

La curva solución $y(x)$ que es solución del problema de valor inicial dado en la pregunta debe cumplir la ecuación luego $y'_{(0,3)} = \dfrac{3^2+\cos(0)}{3\cdot 0^2+3} = \dfrac{10}{3}$.

Aplicando el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden[1], el problema de valor inicial tiene una única solución al ser f y f'_y funciones continuas en un entorno del punto (0,3) siendo

$$f(x,y)=\frac{y^2+\cos(x)}{3x^2+y} \qquad f'_y(x,y)=\frac{2y\left(3x^2+y\right)-\left(y^2+\cos(x)\right)}{\left(3x^2+y\right)^2}$$

Solución b)

Para resolver el problema con Matlab, basta escribir el siguiente código[2]

```
clear all
syms y(x)
ecuacion=diff(y)==-2-x-2*y;
sol(x)=dsolve(ecuacion, y(1)==1)
%Solución (9*exp(-2*x)*exp(2))/4 - x/2 - ¾
```

Para calcular una curva ortogonal a la dada habrá que resolver el problema siguiente,

$$y'=\frac{1}{2+x+2y} \qquad y(1)=1$$

A la hora de corregir esta prueba, se ha considerado la máxima puntuación si se escribía el código Matlab o se explicaba cómo obtener la curva ortogonal aunque no se diera el restultado ya que Matlab no da ninguna solución cuando se escribe el siguiente código,

```
syms y(x)
ecuac=diff(y)==1/(2+x+2*y);
sol(x)=dsolve(ecuac, y(1)==1)
```

No obstante, se puede obtener la solución de forma analítica. Para ello se debe hacer el cambio de variable $z=1+x+2y$, siendo $z'=1+2y' \Rightarrow y'=\dfrac{z'-1}{2}$. En consecuencia, la ecuación diferencial a resolver será de variables separables

$$\frac{z'-1}{2}=\frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad z'=\frac{2}{z}+1 \quad \Rightarrow \quad z'=\frac{2+z}{z}$$

[1] Nota: Leer las páginas 5 y 6 de los apuntes
https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/apuntes/tema4n.pdf

[2] Nota: Ver página 28 de los apuntes
https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/apuntes/tema4n.pdf

$$\frac{z}{2+z}dz = dx \Rightarrow \left(1-\frac{2}{2+z}\right)dz = dx \Rightarrow z - 2\log\left(z+2\right) = x + C$$

Deshaciendo el cambio

$$\left(2+x+2y\right) - 2\log\left(4+x+2y\right) = x + C$$

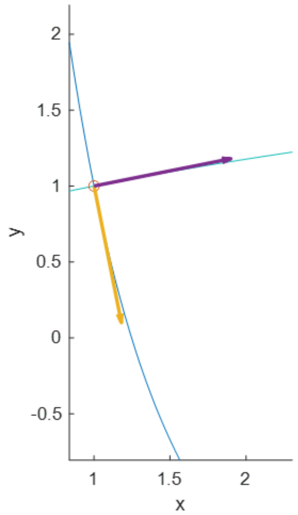
Si se quiere que la solución pase por el (1,1) , se cumplirá

$$5 - 2\log 7 = 1 + C \Rightarrow C = 4 - 2\log 7$$

En consecuencia, la curva ortogonal será entonces:

$$\left(2+x+2y\right) - 2\log\left(4+x+2y\right) = x + 4 - 2\log 7$$

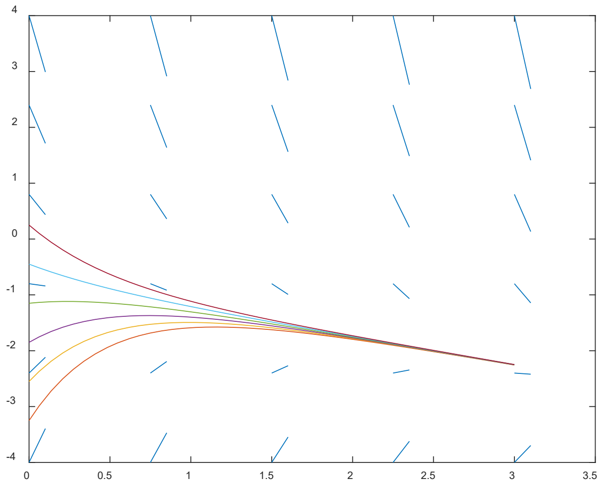
La gráfica muestra en la misma figura tanto la curva solución de la ecuación diferencial dada como su curva ortogonal en el punto (1,1).



Solución c)

El código pedido es

```
%Campo de direcciones de la ecuación diferencial
[X,Y]=meshgrid(linspace(0,3,5),linspace(-4,4,6));
%Se dibujan como vectores en lugar de como segmentos
H=quiver(X,Y,ones(size(X)),-2-X-2*Y);
set(H, 'ShowArrowHead','off');
hold on
%Solución del problema de valor inicial
syms y(x) C1
sol(x,C1)=dsolve(diff(y)==-2-x-2*y)
%Representación de 6 curvas con 6 valores entre 10 y 4 para C1
for k=linspace(-10,4,6)
    fplot(sol(x,k),[0 3])
end
hold off
```



Seguimiento 2 – 7 de mayo – Opción 2A

1

Se considera la ecuación $x(x-1)y''+(1-2x)y'+2y=0$.

a) **Sin utilizar Matlab**, calcula la solución general sabiendo que admite como solución un polinomio de grado 1. Incluye la explicación del proceso.

b) **Calcula y representa, con Matlab** las soluciones de la EDO que pasan por los puntos $(x_o,2)$ para los valores de x_o desde 2 hasta 11 y con pendiente -1.

Solución a)

Para ver que admite una solución que es un polinomio de grado 1, se considera

$$y_1 = Ax+B \rightarrow y_1' = A \ , \ y_1'' = 0$$

Como tiene que ser solución de la EDO se tendrá $x(x-1)\cdot 0+(1-2x)A+2(Ax+B)=0$, es decir,

$$A+2B=0 \rightarrow A=-2B$$

Por lo tanto, una solución podría ser dando un valor a B=-1, una curva solución es $y_1 = 2x-1$.

Para encontrar otra linealmente independiente basta tomar

$$y_2 = v(x)(2x-1)$$

Como

$$y_2' = v'(x)(2x-1)+2v(x) \qquad\qquad y_2'' = v''(x)(2x-1)+4v'(x)$$

y se debe cumplir

$$x(x-1)y_2''+(1-2x)y_2'+2y_2''=0$$

se tendrá

$$x\left(x-1\right)\left[v''\left(x\right)\left(2x-1\right)+4v'\left(x\right)\right]+\left(1-2x\right)\left[v'\left(x\right)\left(2x-1\right)+2v\left(x\right)\right]+2v\left(x\right)\left(2x-1\right)=0$$

$$x\left(x-1\right)\left(2x-1\right)v''\left(x\right)+v'\left(x\right)\left[4x\left(x-1\right)+\left(2x-1\right)\left(1-2x\right)\right]=0$$

$$x\left(x-1\right)\left(2x-1\right)v''\left(x\right)+v'\left(x\right)=0$$

$$x\left(x-1\right)\left(2x-1\right)v''\left(x\right)=-v'\left(x\right) \quad \rightarrow \quad \frac{v''\left(x\right)}{v'\left(x\right)}=-\frac{1}{x\left(x-1\right)\left(2x-1\right)}$$

Descomponiendo en fracciones simples e integrando dos veces.

$$v'\left(x\right)=\frac{x\left(x-1\right)}{\left(x-1/2\right)^2} \quad \rightarrow \quad v\left(x\right)=\frac{2x^2}{\left(2x-1\right)}$$

Po lo tanto, $y_2=\dfrac{2x^2}{\left(2x-1\right)}\left(2x-1\right)=2x^2$ y la solución general de la EDO es

$$y_G=C_1y_1+C_2y_2=C_1\left(2x-1\right)+C_2x^2 \qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

Nota: En este opción de ejercicio, se ha valorado con la máxima puntuación dejar indicadas las integrales.

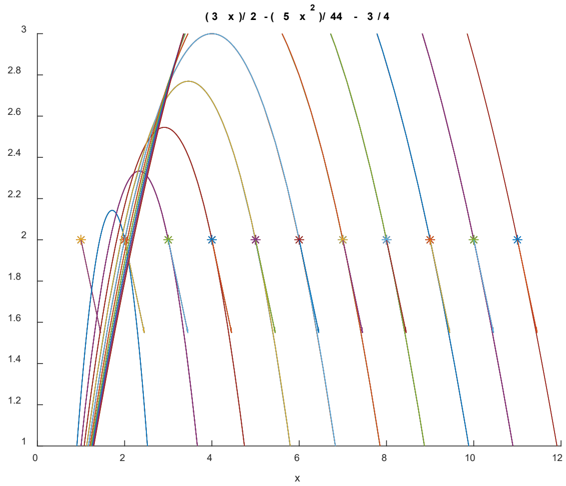
Solución b)

Se trata de resolver distintos problemas de valor inicial donde x_o varía entre 2 y 10

$$\begin{cases} x\left(x-1\right)y''+\left(1-2x\right)y'+2y=0 \\ y\left(x_o\right)=2 \qquad y'\left(x_o\right)=-1 \end{cases}$$

El código pedido es el siguiente

```
syms y(x)
dy=diff(y,x);
dy2=diff(y,x,2);
ecuacion=x*(x-1)*dy2+(1-2*x)*dy+2*y==0;
hold on
for k=2:11
  cond1=y(k)==2;
  cond2=dy(k)==-1;
  sol(x)=dsolve(ecuacion,cond1,cond2)
  ezplot(sol(x), [0 12 1 3])
  %las siguientes líneas de código del for no se pedía incluirlas
  %Representamos los puntos por los que pasan las curvas
  plot(k,2,'*')
  %Representamos un segmento de recta tangente
  %con pendiente -1 en esos puntos
  quiver(k,2,0.5,-0.5)
end
hold off
```



Opción 2 de la prueba

Se considera hacer lo mismo para la ecuación $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$.

Solución a)

$$y_1 = Ax + B \rightarrow y_1' = A \,,\; y_1'' = 0$$

Como tiene que ser solución de la EDO se tendrá $x^2 \cdot 0 + 2xA - 2\left(Ax + B\right) = 0$, es decir, B=0.

Por lo tanto, una solución podría ser $y_1 = x$. Para encontrar otra solución linealmente independiente basta tomar,

$$y_2 = v\left(x\right)x$$

Como

$$y_2' = v'\left(x\right)x + v\left(x\right) \qquad\qquad y_2'' = v''\left(x\right)x + 2v'\left(x\right)$$

y debe ser solución de la EDO, se cumplirá $x^2 y_2'' + 2xy_2' - 2y_2'' = 0$, es decir,

$$x^2\left[v''\left(x\right)x + 2v'\left(x\right)\right] + 2x\left[v'\left(x\right)x + v\left(x\right)\right] - 2v\left(x\right)x = 0$$

$$x^3 v''\left(x\right) + 4x^2 v'\left(x\right) = 0 \rightarrow \frac{v''\left(x\right)}{v'\left(x\right)} = -\frac{4}{x} \rightarrow \log v'\left(x\right) = -4\log x$$

$$\rightarrow \qquad v'\left(x\right) = x^{-4} \qquad \rightarrow \qquad v\left(x\right) = \frac{x^{-3}}{-3}$$

Po lo tanto, $y_2 = \dfrac{-3}{x^3}x = \dfrac{-3}{x^2}$ y la solución general de la EDO es

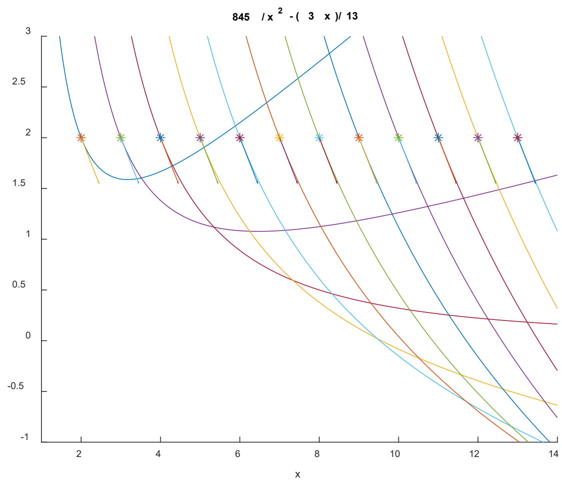
$$y_G = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x + \frac{C_2}{x^2} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Solución b)

Se trata de resolver distintos problemas de valor inicial donde x_o varía entre 2 y 13

$$\begin{cases} x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0 \\ y(x_o) = 2 \qquad y'(x_o) = -1 \end{cases}$$

```
syms y(x)
dy=diff(y,x);
dy2=diff(y,x,2);
ecuacion=x^2*dy2+2*x*dy-2*y==0;
hold on
for k=2:13
  cond1=y(k)==2;
  cond2=dy(k)==-1;
  sol(x)=dsolve(ecuacion,cond1,cond2);
  ezplot(sol(x),[1,14,-1,3])
  %las siguientes líneas del código dentro del for no se piden
  %Representamos los puntos por los que pasan las curvas
  plot(k,2,'*')
  %Representamos un segmento de recta tangente
  %con pendiente -1 en esos puntos
  quiver(k,2,0.5,-0.5)
end
hold off
```



1

Dada la ecuación diferencial

$$x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = \begin{cases} e^t & 1 \le t < 2 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

con las condiciones iniciales: $x(0) = x'(0) = 1$, se pide,

(a) Encontrar la solución del problema sin utilizar transformadas de Laplace y representa la solución encontrada en el intervalo [0, 3].

(b) Resolver el problema utilizando transformadas de Laplace.

Nota: Para ambos apartados escribe en esta hoja tanto los cálculos realizados a mano como el código Matlab utilizado.

Apartado a)

```
syms x(t)
dx=diff(x);dx2=diff(dx);
f(t)=(heaviside(t-1)-heaviside(t-2))*exp(x)
ecuacion=dy2-4*dy+3*y
%Apartado a
sol1(t)=dsolve(ecuacion==f(t),x(0)==1,dx(0)==1)
fplot(sol1(t),[0,2])
```

Apartado b)

La ecuación es

$$x''(t)-4x'(t)+3x(t)=\begin{cases} e^t & 1\le t<2 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases} \qquad x(0)=x'(0)=1$$

Consideramos

$$f(t)=\begin{cases} e^t & 1\le t<2 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}=e^t\left[U(t-1)-U(t-2)\right]$$

Teniendo en cuenta que

$$X(s)=\mathcal{L}(x) \qquad \mathcal{L}(x')=s\mathcal{L}(x)-x(0)=sX(s)-1$$

$$\mathcal{L}(x'')=s\mathcal{L}(x')-x'(0)=s\left(sX(s)-1\right)-1=s^2X(s)-s-1$$

Aplicando transformadas

$$s^2X(s)-s-1-4\left(sX(s)-1\right)+3X(s)=\mathcal{L}\left(f(t)\right)$$

$$X(s)\left[s^2-4s+3\right]-s+3=\mathcal{L}\left(f(t)\right)$$

```
syms x(t) s positive
%Escribiemos la función f(t) como función escalón
f(t)=(heaviside(t-1)-heaviside(t-2))*exp(t)
%Calculamos la transformada de Laplace de f(t)
valor1=laplace(f(t))
%A mano despeja la transformada de Laplace y llamala Y(S)
valor2=(valor1+s-3)/(s^2-4*s+3);
%Calculamos su transformada inversa
sol(t)=ilaplace(valor2)
```

Bloque 2 (22 de mayo 2024)

En todos los ejercicios se debe explicar los pasos seguidos y justificar las respuestas.

1

(a) Una familia de curvas en cualquier punto del plano (x,y) tiene como pendiente $f(x)=4-2x$. Determinar la curva de esta familia que pasa por el punto $(0,0)$ y calcular también la curva ortogonal que pasa por dicho punto.

(b) Calcular todas las soluciones de la ecuación diferencial $\frac{y'}{2} - x\sqrt{y} = 0$.

(c) Determinar si la función $f(x,y) = x^2 + \sqrt{y^4 - x^2y^2} - \frac{x^2y + xy^2}{x} + \frac{x^5}{y^3}$ es homogénea justificando la respuesta.

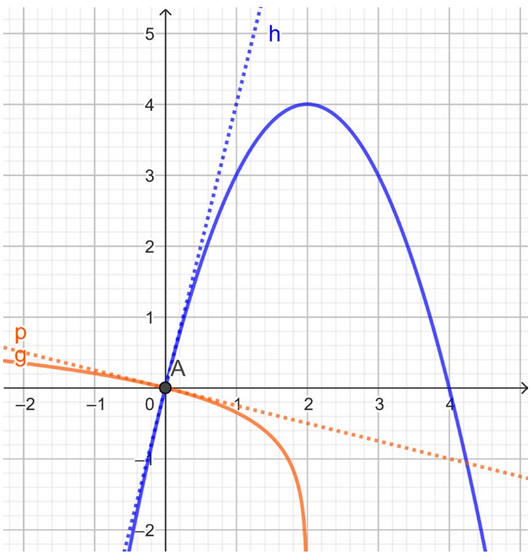
Apartado a)

La familia de curvas verifica $y' = 4 - 2x$, integrando $y = 4x - x^2 + C$. De toda la familia de curvas, la que pasa por el (0,0) es la curva $y = 4x - x^2$.

La curva ortogonal en dicho punto deberá verificar $y' = \frac{-1}{4-2x}$. Integrando

$$y = \frac{1}{2}\log(4-2x) + C$$

Si debe pasar por el (0,0), la curva será $0 = \frac{1}{2}\log(4) + C \quad \Rightarrow C = -\log 2$. La curva ortogonal es $y = \frac{1}{2}\log(4-2x) - \log 2$



Apartado b)

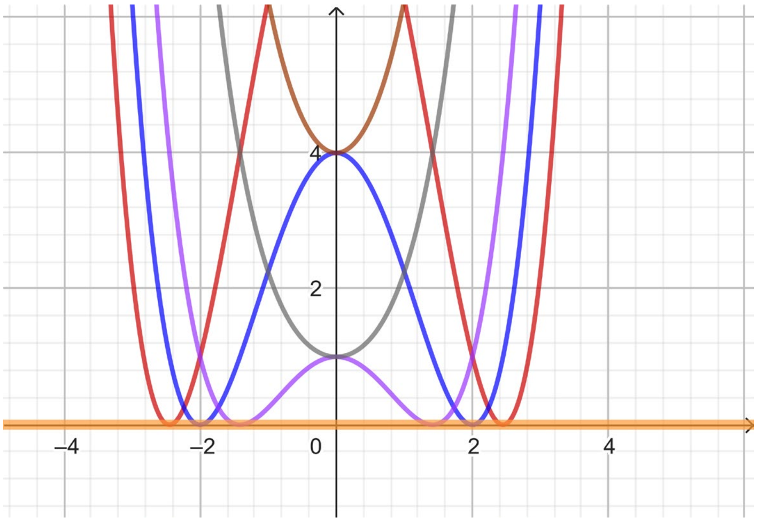
La ecuación es de variables separables, para resolver la ecuación $\frac{y'}{2} - x\sqrt{y} = 0$ se tiene

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = xdx \qquad y \neq 0$$

Por lo tanto, la solución general es

$$\sqrt{y}=\frac{x^2}{2}+C \qquad y\neq 0$$

Como y=0 es solución de la EDO, se trata de una solución singular. Como se puede ver en el gráfico esta solución es la envolvente de la familia de curvas general.



Apartado c)

Comprobamos que la función es homogénea de orden 2

$$f\left(tx,ty\right)=t^2x^2+\sqrt{t^4y^4-t^4x^2y^2}-\frac{t^3x^2y+t^3xy^2}{tx}+\frac{t^5x^5}{t^3y^3}=$$

$$=t^2x^2+t^2\sqrt{y^4-x^2y^2}-t^2\,\frac{x^2y+xy^2}{x}+t^2\,\frac{x^5}{y^3}=t^2f\left(x,y\right)$$

2

(a) Sabiendo que $x\left(x-1\right)y''+\left(1-2x\right)y'+2y=0$ admite una solucion que es un polinomio de grado 2, encontrar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial.

(b) Dado el PVI,

$$x\frac{dy}{dx}-y=x^2\cos\left(2x\right),\; y\left(x_o\right)=1$$

1. ¿Qué significa que exista una única solución de este problema? ¿Qué debería verificarse para asegurarlo?
2. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial $x\dfrac{dy}{dx}-y=x^2\cos\left(2x\right)$

Apartado a)

Como $y=Ax^2+Bx+C$ es solución de la ecuación diferencial, se tendrá que cumplir

$$x\left(x-1\right)2A+\left(1-2x\right)\left(2Ax+B\right)+2\left(Ax^2+Bx+C\right)=0$$

$$\left(x^2-x\right)2A+\left(2Ax+B-4Ax^2-2Bx\right)+2\left(Ax^2+Bx+C\right)=0$$

Se tendrá que cumplir

$$\begin{array}{ll} \text{Coef } x^2 & 4A-4A=0 \\ \text{Coef } x & -2A+2A-2B+2B=0 \\ \text{Ter. ind.} & B+2C=0\rightarrow C=-B/2 \end{array}$$

Se tendrá $y=Ax^2+Bx-\dfrac{B}{2}=Ax^2+B\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ es solución. Como $\left\{x^2,x-\dfrac{1}{2}\right\}$ es un sistema fundamental de soluciones (son soluciones y además son linealmente independientes), la expresión obtenida es la solución general de la ecuación diferencial.

Apartado b)

La ecuación es lineal. Para encontrar la solución general buscamos la solución general de la ecuación homogénea asociada y la solución particular.

- Solución general de la homogénea: $x\dfrac{dy}{dx}-y=0$

$$x\frac{dy}{dx}-y=0 \quad\rightarrow\quad \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \quad\rightarrow\quad \log|y|=\log|x|+C\rightarrow |y|=|x|e^C \rightarrow y=xC \quad C\in\mathbb{R}$$

- Solución particular de la completa $x\dfrac{dy}{dx}-y=x^2\cos(2x)$

Consideramos $y_p=xC(x)$ $\quad y_p'=C(x)+xC'(x)$. Se debe cumplir $xy_p'-y_p=x^2\cos 2x$

Por lo tanto, se cumple

$$x\left(C(x)+xC'(x)\right)-xC(x)=x^2\cos 2x$$

$$x^2C'(x)=x^2\cos 2x \quad\rightarrow\quad C'(x)=\cos 2x \quad\rightarrow\quad C(x)=\frac{\operatorname{sen}2x}{2}$$

La solución particular es $y_p=\dfrac{x\,sen(2x)}{2}$

La solución general de la ecuación es: $y_G=Cx+\dfrac{x\,sen(2x)}{2}$.

3

(a) Dada la ecuación diferencial $y''+2y'+y=R(x)$, escribir cómo sería la expresión de la solución particular en los siguientes casos (no se pide calcularla):

1. $R(x)=e^{-x}(x+1)$
2. $R(x)=3e^{-x}\cos x$
3. $R(x)=x^{-1}e^{x}$
4. $R(x)=3e^{-x}+e^{x}$

(b) Dada la ecuación diferencial $y''-y=e^{x}$, encontrar una solución particular por el método de variación de parámetros. Justificar por qué el método utilizado permite encontrar la solución.

Apartado b)

Esta ecuación es de orden 2 de coeficientes constantes. Para calcular la solución de la ecuación homogénea asociada hay que considerar el polinomio característico

$r^2-1=0 \rightarrow r=\pm 1$

La solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_{GH}=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$$

La solución particular, utilizando el método de variación de parámetros es

$$y_p=C_1(x)e^{x}+C_2(x)e^{-x}$$

Sustituyendo yp en la ecuación diferencial se obtendrá

$$C'_1(x)e^{x}+C'_2(x)e^{-x}=e^{x}$$

Para poder encontrar la solución, se considera la siguiente condición adicional

$$C'_1(x)e^{x}-C'_2(x)e^{-x}=0$$

Se tiene entonces el siguiente sistema

$$\begin{cases} C'_1(x)e^{x}-C'_2(x)e^{-x}=0 \\ C'_1(x)e^{x}+C'_2(x)e^{-x}=e^{x} \end{cases}$$

Resolviendo,

$$C'_1(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -e^{-x} \\ e^{x} & e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & -e^{-x} \\ e^{x} & e^{-x} \end{vmatrix}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow C_1(x)=\frac{x}{2}$$

$$C'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{e^{2x}}{1+1} = \frac{e^{2x}}{2} \quad \Rightarrow C_2(x) = \frac{e^{2x}}{4}$$

Se tendrá entonces que

$$y_p = \frac{xe^x}{2} + \frac{e^{2x}}{4}e^{-x} = \frac{xe^x}{2} + \frac{e^x}{4}$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y_G = y_{GH} + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{xe^x}{2}$$

4

Dada la función $f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 2 \\ 4 & 2 < t < 4 \\ 0 & en\ \ otro\ \ caso \end{cases}$.

Se pide

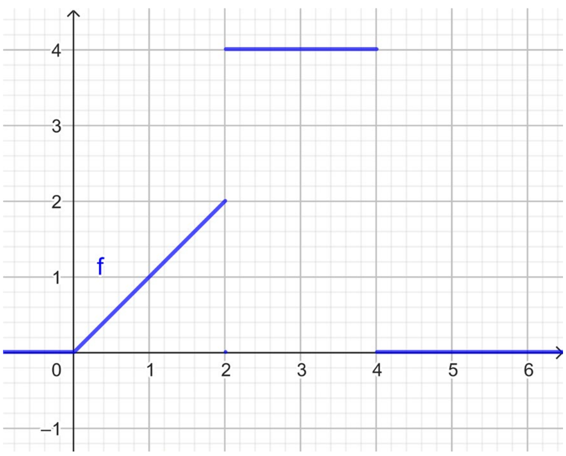
(a) Representar la función.

(b) Determinar si la función cumple las condiciones necesarias para que exista su transformada de Laplace.

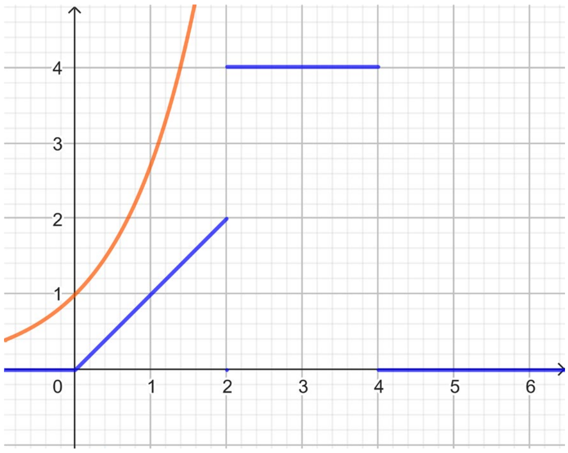
(c) Calcular la transformada de Laplace utilizando la definición y también utilizando propiedades y transformadas de funciones elementales.

Apartado a)

La gráfica de la función es



La función cumple las condiciones necesarias al ser una función continua con dos discontinuidades de salto finito, en el punto 2 y en el punto 4. Por lo tanto, es seccionalmente continua para t>0. Además, es de tipo exponencial ya que



$$\left|f\left(t\right)\right| \le e^{t} \quad para \;\; t \ge 0$$

Apartado b)

$$\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right] = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f\left(t\right)dt = \underbrace{\int_{0}^{2} e^{-st}tdt}_{\text{integral por partes}} + \int_{2}^{4} 4e^{-st}dt = \left[-\frac{e^{-st}\left(st+1\right)}{s^2}\right]_{t=0}^{t=2} + \left[\frac{4e^{-st}}{-s}\right]_{t=2}^{t=4} =$$

$$= \left[-\frac{e^{-2s}\left(2s+1\right)}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right] + \left[-\frac{4e^{-4s}}{s} + \frac{4e^{-2s}}{s}\right] = \frac{1}{s^2} + e^{-2s}\frac{-2s-1+4s}{s^2} + \frac{4e^{-4s}}{s} =$$

$$= \frac{1}{s^2} + e^{-2s}\frac{2s-1}{s^2} + \frac{4e^{-4s}}{s}$$

Apartado c)

Se escribe la función a partir de la función de Heaviside

$$f\left(t\right) = t\left(U\left(t\right) - U\left(t-2\right)\right) + 4\left(U\left(t-2\right) - U\left(t-4\right)\right) = tU\left(t\right) + \left(-t+4\right)U\left(t-2\right) - 4U\left(t-4\right)$$

$$= \mathcal{L}\left[tU\left(t\right)\right] - \mathcal{L}\left[\underbrace{\left(t-4\right)}_{t-2-2}U\left(t-2\right)\right] - \mathcal{L}\left[4U\left(t-4\right)\right] =$$

$$= \mathcal{L}\left[tU\left(t\right)\right] - \mathcal{L}\left[\left(t-2\right)U\left(t-2\right)\right] + 2\mathcal{L}\left[U\left(t-2\right)\right] - 4\mathcal{L}\left[U\left(t-4\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2} + 2\frac{e^{-2s}}{s} - 4\frac{e^{-4s}}{s} = \frac{1}{s^2} + e^{-2s}\frac{2s-1}{s^2} - 4e^{-4s}\frac{1}{s}$$