Seguimiento 1 – 7 marzo

1

(a) Calcula el volumen del sólido debajo de la gráfica de la función $f(x,y) = xy+1$ y por encima de la región del dominio delimitado por $x = y^2 - 1,\ x = \sqrt{1-y^2}$.

Nota: Puedes utilizar Matlab para calcular las integrales. Escribe el código que utilizas y el valor que devuelve.

(b) Calcula un valor aproximado de $\iint_D \cos(x^2+3)\, dA$ siendo $D = [-2,1]\times[1,2]$ mediante una suma de Riemann regular con 70 subrectángulos tomando el punto que consideres en cada uno de ellos. Explica cómo has tomado la malla y la expresión de la suma de Riemann que has calculado.

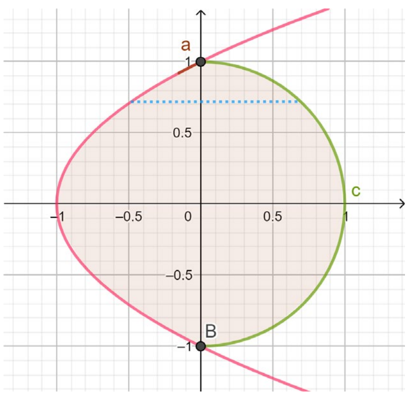
Nota: Justifica el proceso que sigues y escribe el código para realizar los cálculos y el resultado que devuelve Matlab

(c) Escribe el código Matlab para representar el sólido cuyo volumen esté dado por la integral siguiente en coordenadas cilíndricas

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_{r^4}^{r} r\ dz\ dr\, d\theta$$

SOLUCIÓN A)

El dominio D está formado por los puntos de la región delimitada por la parábola $x = y^2 - 1$ y por la semicircunferencia $x = \sqrt{1-y^2}$.



Barriendo este dominio por franjas horizontales, se tendrá que D se describe de la forma siguiente,

$$-1 \le y \le 1$$
$$-1 + y^2 \le x \le \sqrt{1-y^2}$$

Por lo tanto, el volumen del sólido es

$$vol(H) = \iint_D \left(\int_0^{xy+1} dz \right) dA = \iint_D (xy+1)\; dA = \int_{-1}^{1} \int_{y^2-1}^{\sqrt{1-y^2}} (xy+1)\, dx\, dy$$

Haciendo el cálculo con Matlab

```
syms x y
int(int(x*y+1,x,y^2-1,sqrt(1-y^2)),y,-1,1)
%Solución  pi/2 + 4/3
```

Solución B)

Para calcular una suma de Riemann con 70 subrectángulos consideramos por ejemplo m=7 y n=10 y el punto medio de cada subrectángulo. Entonces,

```
a=-2;b=1;c=1;d=2;m=7;n=10;incx=(b-a)/m;incy=(d-c)/n;
%Consideramos el punto medio en cada subintervalo
vx=a+incx/2:incx:b-incx/2;
vy=c+incy/2:incy:d-incy/2;
[X,Y]=meshgrid(vx,vy);
Z=cos(X.^2+3);
sum(Z(:))*incx*incy
% -1.502
```

Solución C)

El sólido que viene dado por la integral en coordenadas cilíndricas se define de la forma siguiente,

$$0 \le \theta \le \pi / 2$$
$$0 \le r \le 1$$
$$r^4 \le z \le r$$

El dominio D en el que se proyecta el sólido es el interior de la circunferencia de centro 0 y radio 1 en el primer cuadrante

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le \theta \le \pi / 2 \\ 0 \le r \le 1 \end{array}\right\} \quad \to \quad \left.\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \end{array}\right\}$$

y la coordenada z varía entre las superficies

$$f_1(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2} = f_2(x,y)$$

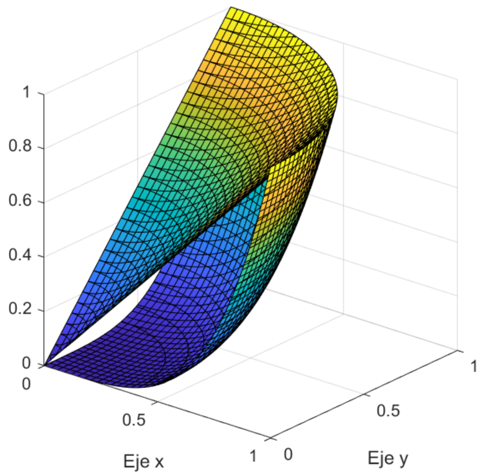
Representando estas dos superficies el sólido se encontrará entre ambas. Considerando la ecuación en implícitas de estas superficies,

$$z = \left(x^2 + y^2\right)^2 \rightarrow F_1\left(x,y,z\right) = \left(x^2 + y^2\right)^2 - z = 0$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow F_2\left(x,y,z\right) = \sqrt{x^2 + y^2} - z = 0$$

El código Matlab es

```
F1=@(x,y,z) (x.^2+y.^2).^2-z
F2=@(x,y,z) sqrt(x.^2+y.^2)-z
fimplicit3(F1,[0 1 0 1 0 1])
hold on
fimplicit3(F2,[0 1 0 1 0 1])
hold off
xlabel("Eje x")
ylabel("Eje y")
axis equal
```



Seguimiento 2 – 22 marzo

1

(a) Hallar la longitud de la curva que viene dada por las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$x\left(t\right) = 2\cos^2\left(t\right)$$
$$y\left(t\right) = 2\sin^2\left(t\right) \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(b) Dada la curva $r = 4 + 2\sec\left(\theta\right)$ con $\theta \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$, se pide calcular su longitud.

(c) Una partícula se mueve sobre un campo vectorial $\mathbf{F} = e^{xy}\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ siguiendo la trayectoria formada por el triángulo de vértices A(0,0), B(1,1) y C(2,0). Suponiendo que inicia en el punto (0,0), pasando por B y C y terminando en el (0,0), calcular el trabajo total que ejerce el campo sobre la partícula durante su desplazamiento.

(d) Se pide escribir el código Matlab para:

- Dada la función $f(x,y,z) = y^2x^2 + zy^4 + z$, representar una muestra del campo gradiente en 20 puntos de la superficie $z = x^2 + 2y^2$ definida en [1,2]x[1,3].
- Representar una vuelta de la hélice C de ecuaciones $(3\cos t, 3sent, 2t)$

  Obtener también el área de la valla que se apoya sobre la circunferencia de centro 0 y radio 3 y en cada punto su altura viene dada por la tercera componente de la hélice.

Apartado a)

La expresión para calcular la longitud es

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Para calcular la integral con Matlab se deberá escribir

```
syms t
dxt=diff(2*cos(t)^2)
dyt=diff(2*sin(t)^2)
longitud=int(sqrt(dxt^2+dyt^2),0,pi/2)
```

Apartado b)

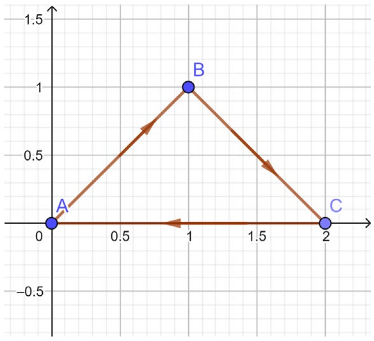
La expresión para calcular la longitud es

$$L = \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\, d\theta$$

Para calcular la integral con Matlab se deberá escribir

```
syms t
r=4+2*sec(t)
dr=diff(r)
longitud=double(int(sqrt(r^2+dr^2),2*pi/3,4*pi/3))
%Solución: 5.8128
```

Apartado c)

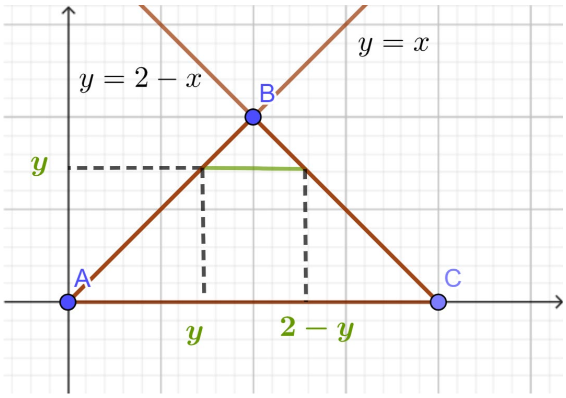


El campo plano $\mathbf{F} = e^{xy}\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$, no es conservativo ya que si $M\left(x,y\right) = e^{xy}$, $N\left(x,y\right) = 2xy$ se tiene que $N'_x\left(x,y\right) = 2y \neq M'_y\left(x,y\right) = xe^{xy}$

Dado que la curva C es cerrada, simple y suave a trozos, el campo es de clase C[1] y el dominio D encerrado por la curva C es simplemente conexo, se puede utilizar el Teorema de Green. La curva se recorre en sentido antihorario, por lo tanto,

$$\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = -\iint_D \left(N'_y - M'_x\right) dA$$

Teniendo en cuenta que el dominio D se puede describir mediante franjas horizontales



la integral para calcular el trabajo total:

$$\oint_C F\bullet dr = -\iint_D \left(N'_y - M'_x\right) dA = -\iint_D \left(2y - xe^{xy}\right) dA = -\int_0^1 \int_y^{2-y} \left(2y - xe^{xy}\right) dx dy$$

El código Matlab es

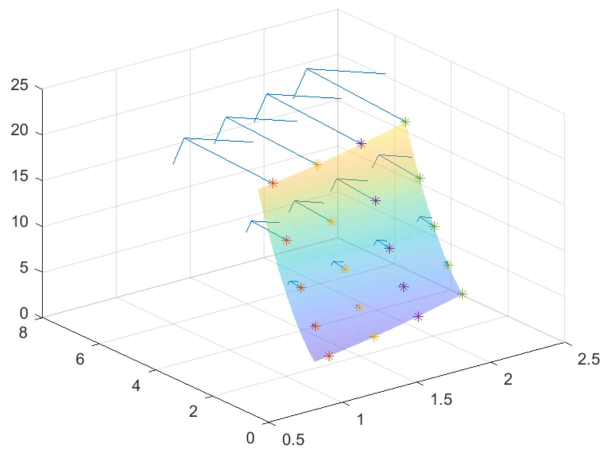
```
syms x y
I1=int(2*y-x*exp(x*y),x,y,2-y);
I2=int(I1,y,0,1);
trabajo=-double(I2)
%Solución:  0.8261
```

Nota: También es posible calcular el trabajo utilizando la definición parametrizando los tres segmentos que componen C.

Apartado d)

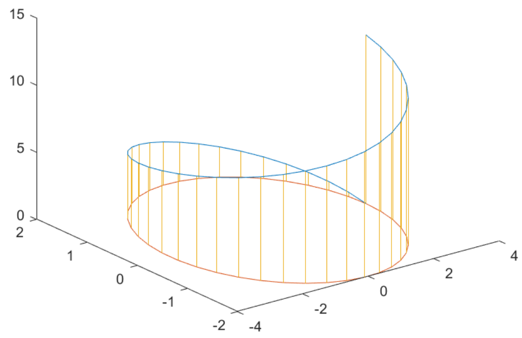
El código Matlab para dibujar el campo es

```
%Puntos donde dibujar el campo
[X,Y]=meshgrid(1.1:0.3:2,1:0.5:3);
Z=X.^2+2*Y.^2;
%Campo gradiente
u=2*X.*Y.^2;
v=2*Y.*X.^2+4*Z.*Y.^3;
w=Y.^4+1;
%Representación del campo
quiver3(X,Y,Z,u,v,w,'r')
hold on
%Representación de la superficie
f=@(x,y,z) z-x.^2-2*y.^2;
fimplicit3(f,[0 1 1 3 0 25])
hold off
```



Para representar la valla, el código a utilizar es

```
%Puntos donde dibujar el campo
t=linspace(0,2*pi,40);
plot3(3*cos(t),2*sin(t),2*t)
hold on
%Si se quiere representar las líneas
plot(3*cos(t),2*sin(t))
stem3(3*cos(t),2*sin(t),2*t,'marker','none')
hold off
```



El área de la valla se calcula con la siguiente integral de línea

$$\acute{a}rea=\int_0^{2\pi} z(t)\,ds=\int_0^{2\pi} z(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$$

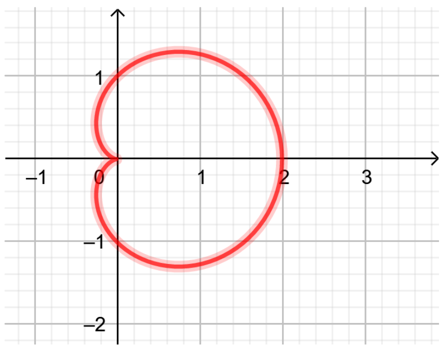
El código Matlab es

```
syms t
z=2*t;
dx=-3*sin(t);dy=3*cos(t);dz=2;
area=int(2*t*sqrt(dx^2+dy^2+dz^2),t,0,2*pi)
```

EXAMEN BLOQUE 1

1

(a) Calcula el área interior a la circunferencia $r=3\cos\theta$ y exterior al cardioide $r=1+\cos\theta$ que se muestra en la figura.

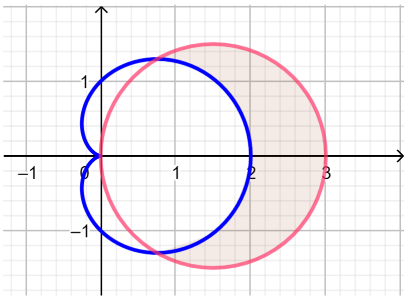


(b) Calcula el jacobiano $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t,u)}$, donde $x=3s+t+4u$, $y=2s-t+u$, $z=3s+t-5u$.

(c) Encuentra el campo vectorial conservativo para la función potencial $f(x,y)=5x^2+3xy+10y^2$

SOLUCIÓN A)

Ejercicio hecho en clase



Los puntos de corte entre las dos curvas son

$$\left.\begin{array}{l} r = 3\cos\theta \\ r = 1+\cos\theta \end{array}\right\} \to 3\cos\theta = 1+\cos\theta \to \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \pm\dfrac{\pi}{3} \\ r = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto, el área, utilizando coordenadas polares, se puede calcular de la forma siguiente:

$$\acute{a}rea = 2\int_0^{\pi/3}\int_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta} r\ dr\ d\theta = 2\int_0^{\pi/3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=1+\cos\theta}^{r=3\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/3}\left[9\cos^2\theta - \left(1+\cos\theta\right)^2\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3}\left[8\cos^2\theta - 1 - 2\cos\theta\right] d\theta = \int_0^{\pi/3}\left[8\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} - 1 - 2\cos\theta\right] d\theta = \pi$$

SOLUCIÓN B)

Se tiene que

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t,u)} = \begin{vmatrix} x'_s & x'_t & x'_u \\ y'_s & y'_t & y'_u \\ z'_s & z'_t & z'_u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 15+8+3+12-3+10 = 45$$

SOLUCIÓN C)

El campo es el gradiente de f, es decir, $F = \nabla f\left(x,y\right) = \left(10x+3y\right)\mathbf{i} + \left(3x+20y\right)\mathbf{j}$

2

(a) Calcula la temperatura media $T\left(x,y,z\right) = x^2+y^2+z^2$ sobre la porción del cono $z^2 = x^2+y^2$ que se encuentra entre los planos $z=2$ y $z=3$.

(b) Calcula la integral de flujo saliente del campo vectorial $\mathbf{F}\left(x,y,z\right) = \left(y^3+3x\right)\mathbf{i} + \left(xz+y\right)\mathbf{j} + \left(z+x^4\cos\left(x^2y\right)\right)\mathbf{k}$ a través de la superficie que delimita el sólido $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 1$

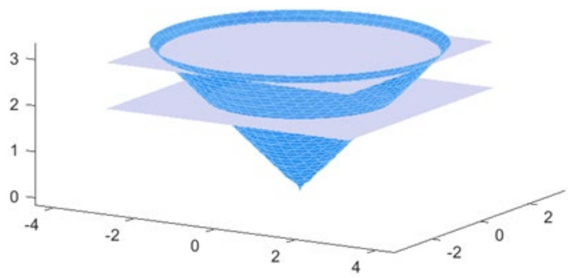
SOLUCIÓN A)

Ejercicio hecho en clase

Para calcular la temperatura media se tendrá en cuenta que

$$T_m = \frac{\iint_S T(x,y,z)\,dS}{área(S)} = \frac{\iint_S T(x,y,z)\,dS}{\iint_S dS}$$

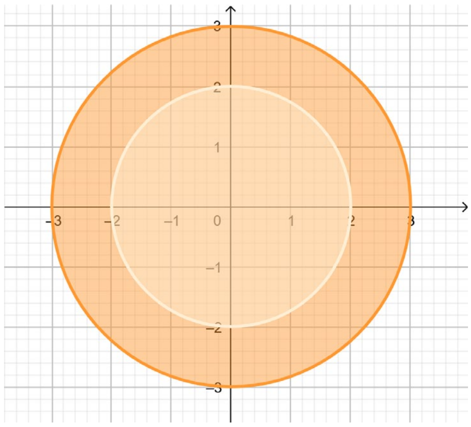
En este caso la superficie S es la parte del cono $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ entre los planos $z=2$ y $z=3$.



El diferencial de superficie es

$$dS = \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{(x^2+y^2)}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)}} = \sqrt{2}$$

El dominio D, proyección de esta superficie S sobre el plano z=0, es la corona circular determinada por las circunferencias de radios 2 y 3.



Se tiene entonces que el área de la superficie es

$$\iint_S dS = \sqrt{2}\iint_D dxdy = \sqrt{2}\left(3^2\pi - 2^2\pi\right) = 5\sqrt{2}\pi$$

La temperatura total sobre S es

$$\iint_S T(x,y,z)\,dS = \iint_D T\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{2}\;dA = \iint_D 2\left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}\;dA$$

Pasando a coordenadas polares

$$\iint_S T(x,y,z)\,dS = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_2^3 r^2\cdot r\,dr d\theta = 4\sqrt{2}\pi\left.\frac{r^4}{4}\right|_{r=2}^{r=3} = \sqrt{2}\pi\left(81-16\right) = 65\sqrt{2}\pi$$

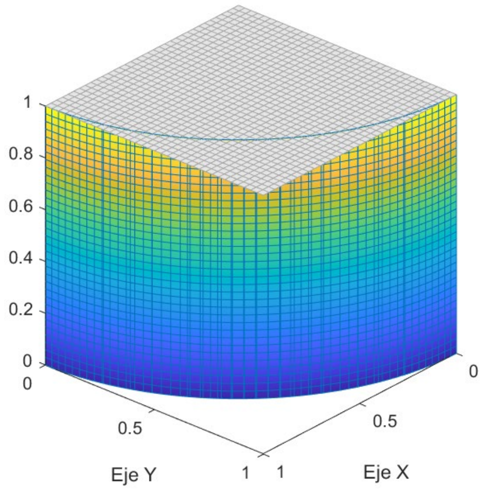
Por lo tanto, la temperatura media es

$$T_m = \frac{\iint_S T(x,y,z)\,dS}{área(S)} = \frac{65\sqrt{2}\pi}{5\sqrt{2}\pi} = 13^{\circ}$$

SOLUCIÓN B)

Ejercicio Hecho en clase

En nuestro caso, $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(y^3+3x\right)\mathbf{i} + \left(xz+y\right)\mathbf{j} + \left(z+x^4\cos\left(x^2y\right)\right)\mathbf{k}$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$ y es la frontera de un sólido H que es simplemente conexo (se trata de la cuarta parte del cilindro de base la circunferencia unidad y altura 1).



Por tanto, podemos aplicar el teorema de la divergencia o teorema de Gauss:

$$\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dS = \iiint_H \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV =$$

Se tiene que: $\operatorname{div}\mathbf{F} = \dfrac{\partial(y^3+3x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(xz+y)}{\partial y} + \dfrac{\partial\left(z+x^4\cos\left(x^2y\right)\right)}{\partial z} = 3+1+1=5$

El flujo saliente total a través de la superficie cerrada S, será entonces

$$\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dS = \iiint_H 5\,dV = 5\;vol\left(H\right) = \frac{5\pi}{4}$$

3

(a) Encuentra $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}(x,y)=\left(ye^{xy}+\cos x\right)\mathbf{i}+\left(xe^{xy}+\dfrac{1}{y^2+1}\right)\mathbf{j}$

y C es la porción de la curva $y=\operatorname{sen}x$ desde $x=0$ hasta $x=\dfrac{\pi}{2}$.

(b) Calcula el flujo saliente del rotacional del campo $\mathbf{F}(x,y,z)=(x\,z,\;y\,z,x\,y)$ a través de la superficie formada por la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ dentro del cilindro $x^2+y^2=1$ para $z\geq 0$.

Solución a)

Si consideramos

$$M(x,y)=ye^{xy}+\cos x \qquad N(x,y)=xe^{xy}+\frac{1}{y^2+1}$$

se cumple que $M'_y(x,y)=N'_x(x,y)$ ya que

$$M'_y(x,y)=e^{xy}+xye^{xy} \qquad N'_x(x,y)=e^{xy}+xye^{xy}$$

Por lo tanto, el campo **F** es conservativo. Aplicando el teorema Fundamental de integrales de línea se tendrá

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=f\left(\frac{\pi}{2},sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-f(0,0)$$

donde f es la función potencial de **F**. Calculando la función potencial

$$f'_x(x,y)=ye^{xy}+\cos x \;\rightarrow\; \boxed{f(x,y)=e^{xy}+senx+h(y) \quad (1)}$$

$$f'_y(x,y)=xe^{xy}+\frac{1}{y^2+1}\underset{(1)}{=}xe^{xy}+h'(y)\rightarrow h'(y)=\frac{1}{y^2+1}\rightarrow \boxed{h(y)=arctg(y)+C}$$

Por lo tanto, una función potencial es

$$\boxed{f(x,y)=e^{xy}+senx+arctg(y)}$$

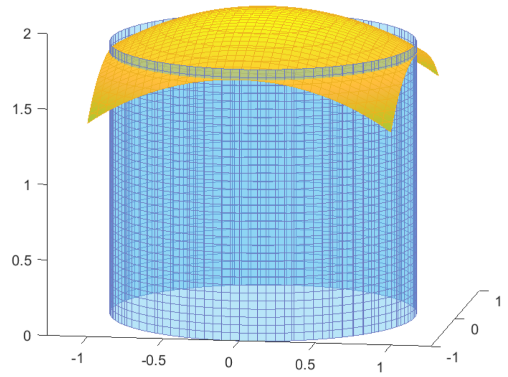
y el valor de la integral pedida es

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=f\left(\frac{\pi}{2},1\right)-f(0,0)=e^{\pi/2}+1+\operatorname{ar}ctg(1)-1-0-arctg(0)=e^{\pi/2}+\frac{\pi}{4}$$

Solución b)

Ejercicio hecho en clase

Se trata de calcular el flujo del rotacional del campo **F** a través de la superficie S formada por la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2+y^2=1$.



Se aplicará el teorema de Stokes, donde la curva C frontera de S es la intersección de la esfera y el cilindro. La curva es

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z^2=3 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} x=\cos t & \\ y=sen\, t & t\in[0,2\pi] \\ z=\sqrt{3} & \end{array}\right\}$$

$$\mathbf{r}(t)=\left(\cos t, sen\, t, \sqrt{3}\right) \qquad t\in[0,2\pi]$$

Como se pide el flujo saliente, la curva C se debe recorrer en sentido antihorario. Se tiene entonces,

$$flujo=\iint_S (\operatorname{rot}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS=\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$$

Como

$$\mathbf{r'}(t)=\left(-sent, \cos t, \sqrt{3}\right)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))=\left(\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}sen\ t, 0\right)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r'}(t)=\left(\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}sen\ t, 0\right)\cdot\left(-sen\, t, \cos t, 0\right)=0$$

Por lo tanto, el flujo es 0.

4

PUNTOS EXTRA

Plantea la integral para calcular el volumen del sólido debajo de la gráfica de la función $f(x,y) = xy + 1$ y por encima de la región del dominio delimitado por $x = -y^2 + 1$, $x = -\sqrt{1 - y^2}$.

Nota: Debes integrar hasta dejar solo sin calcular la integral en una variable.

Solución

Este ejercicio coincide con el ejercicio 1a del seguimiento 1.

Seguimiento 2 Bloque 2 – 10 mayo

1

Dada la ecuación diferencial $x^2 y'' - xy' + y = 0$, se pide:

(a) Comprobar con Matlab que $y_1 = x\log(x)$ es solución de la ecuación diferencial.

(b) Determinar a mano la solución general de la ecuación diferencial. Puedes utilizar Matlab para realizar las integrales.

(c) Calcular con Matlab la solución general y representar la solución que verifica $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$.

Nota: Escribe el código Matlab que utilices para realizar los cálculos.

Solución a)

El código Matlab para ver que es solución puede ser el siguiente que comprueba que cumple la ecuación diferencial

```
syms y(x)
y=x*cos(log(x));
dy=diff(y,x);dy2=diff(dy,x);
simplify(x^2*dy2-x*dy+2*y)
```

Solución b)

Como la ecuación diferencial es lineal homogénea utilizaremos el método de reducción de orden. Dada $y_1 = x\log(x)$ buscamos $y_2(x) = y_1(x)v(x)$ linealmente independiente con ella. Se tendrá que

$$y_2'(x) = y_1'(x)v(x) + y_1(x)v'(x)$$

$$y_2''(x) = y_1''(x)v(x) + 2y_1'(x)v'(x) + y_1(x)v''(x)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial $x^2y_2'' - xy_2' + 2y_2 = 0$, es decir,

$$x^2\left[y_1''(x)v(x) + 2y_1'(x)v'(x) + y_1(x)v''(x)\right] - x\left[y_1'(x)v(x) + y_1(x)v'(x)\right] + 2y_1(x)v(x) = 0$$

Simplificando, utilizando que y1 es solución

$$x^2\left[2y_1'(x)v'(x) + y_1(x)v''(x)\right] - x\left[y_1(x)v'(x)\right] = 0$$

$$v''(x)x^2y_1(x) + v'(x)\left[2x^2y_1'(x) - xy_1(x)\right] = 0$$

$$\frac{v''(x)}{v'(x)} = -\frac{2x^2y_1'(x) - xy_1(x)}{x^2y_1(x)} = -\frac{2xy_1'(x) - y_1(x)}{x\,y_1(x)}$$

Utilizando Matlab

$$\frac{v''(x)}{v'(x)} = -\frac{\cos(\log(x)) - 2\sin(\log(x))}{x\cos(\log(x))}$$

Integrando con Matlab

$$\log v'(x) = -2\log(\cos(\log x)) - \log(x) = \log\left(\frac{1}{x\cos^2(\log x)}\right)$$

$$v'(x) = \frac{1}{x\cos^2(\log x)}$$

Esta integral es inmediata, teniendo en cuenta que $\int \frac{u'}{\cos^2(u)}du = tg(u)$, luego

$$v(x) = tg(\cos(\log(x)))$$

Por lo tanto,

$$y_2(x) = x\cos(\log(x))\,tg(\cos(\log(x))) = x\,sen(\log(x))$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y_G(x) = C_1\,x\cos(\log(x)) + C_2x\,sen(\log(x)) \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Código Matlab

```
syms y(x)
y1=x*cos(log(x));
dy=diff(y1,x);dy2=diff(dy,x);
aux=simplify(-(2*x*dy-y1)/(x*y1))
aux1=int(aux)
v1=simplify(exp(aux1))
```

```
%Comprobación
y2=x*sin(log(x))
simplify(x^2*diff(y2,x,2)-x*diff(y2,1)+2*y2)
```

SOLUCIÓN C)

El código para calcular la solución con Matlab es

```
syms y(x)
dy=diff(y,x);dy2=diff(dy,x);
eqn=x^2*dy2-x*dy+2*y==0
dsolve(eqn)
```

Para encontrar la solución al problema de valor inicial dado se añadirá al código anterior

```
cond=[y(1)==1,dy(1)==2];
solu=dsolve(eqn,cond)
```

Para representar la solución anterior, teniendo en cuenta que la solución está definida para x>0, se considera un intervalo dentro de este dominio

```
fplot(solu,[0.2,4])
```

Seguimiento 3 Bloque 2 – 24 mayo

1

(a) Calcular la transformada de Laplace de la función

$$E(t)=\begin{cases}2-t & si \quad 0\le t<3\\ t^2 & si \quad 3\le t<4\\ 1 & si \quad t\ge 4\end{cases}$$

(b) Calcular, utilizando la definición, la transformada de la función $U(t-1)$ indicando su convergencia.

SOLUCIÓN A)

En primer lugar, escribimos la función mediante la función escalón

$$E(t)=(2-t)\left[U(t)-U(t-3)\right]+t^2\left[U(t-3)-U(t-4)\right]+U(t-4)$$

es decir,

$$E(t)=(2-t)U(t)+\left[t^2+t-2\right]U(t-3)-\left[t^2-1\right]U(t-4)$$

Aplicando transformadas

$$\mathcal{L}(E)=2\mathcal{L}(U(t))-\mathcal{L}(tU(t))+\mathcal{L}\left(\underbrace{\left[(t-3)^2+7(t-3)+10\right]}_{f(t-3)}U(t-3)\right)-$$

$$-\mathcal{L}\left(\underbrace{\left[(t-4)^2+8(t-4)+15\right]}_{g(t-4)}U(t-4)\right)$$

$$= 2\mathcal{L}\left(U\left(t\right)\right) - \mathcal{L}\left(tU\left(t\right)\right) + \mathcal{L}\left(\left(t-3\right)^2 U\left(t-3\right)\right) + 7\mathcal{L}\left(\left(t-3\right)U\left(t-3\right)\right) + 10\mathcal{L}\left(U\left(t-3\right)\right) +$$
$$-\mathcal{L}\left(\left(t-4\right)^2 U\left(t-4\right)\right) - 8\mathcal{L}\left(\left(t-4\right)U\left(t-4\right)\right) - 15\mathcal{L}\left(U\left(t-4\right)\right)$$
$$= \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{2!e^{-3s}}{s^3} + \frac{7e^{-3s}}{s^2} + \frac{10e^{-3s}}{s} - \frac{2!e^{-4s}}{s^3} - \frac{8e^{-4s}}{s^2} - \frac{15e^{-4s}}{s}$$

SOLUCIÓN B)

Por definición,

$$\mathcal{L}\left(U\left(t-1\right)\right) = \int_0^\infty U\left(t-1\right)e^{-st}dt = \int_1^\infty e^{-st}dt = \lim_{b\to\hbar} \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{s=1}^{s=b} = \frac{e^{-s}}{s} \qquad s > 0$$

se ha utilizado que $U\left(t-1\right) = \begin{cases} 0 & si\ t < 1 \\ 1 & si\ t \geq 1 \end{cases}$

Bloque 2 – 26 mayo

1

(a) Resolver el siguiente problema de valor inicial $xy' - 4y = x^6 e^x \quad , \quad y\left(1\right) = 2$

(b) Encontrar la solución de la ecuación diferencial $x^2 y' + y = 1$ que verifica $y\left(-1\right) = 1$.

(c) Determinar un factor integrante de la forma $\mu = x^m y^n$ para la ecuación diferencial $\left(-3y + 2x^3y^3\right)dx + \left(4x - 3x^4y^2\right)dy = 0$

Solución a)

Se trata de una ecuación diferencial de primer orden lineal. $y' + p(x)y = q(x)$

$$y' - \frac{4}{x}y = x^5 e^x \qquad\qquad p\left(x\right) = -\frac{4}{x},\ q\left(x\right) = x^5 e^x$$

Consideramos como factor integrante: $\mu\left(x\right) = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\log x} = \dfrac{1}{x^4}$.

Por lo tanto

$$\frac{1}{x^4}y' - \frac{4}{x^5}y = xe^x$$

y se tiene

$$\mu(x)y = \int xe^x dx \qquad \frac{1}{x^4}y = xe^x - e^x + C$$

Luego la solución general es

$$y = x^5e^x - x^4e^x + Cx^4$$

para $y(1) = 2 \Rightarrow C = 2$. La solución particular es la curva $y = x^5e^x - x^4e^x + 2x^4$.

Solución b)

Resolviendo $x^2y' = 1 - y \Rightarrow \dfrac{y'}{1-y} = \dfrac{1}{x^2}$ $si\ y \neq 1,\ x \neq 0$. Antes de buscar la solución general veamos si $y = 1,\ x = 0$ son soluciones de la ecuación diferencial.

Como $y = 1$ es solución de la ecuación diferencial y cumple con la condición dada $y(-1) = 1$, se concluye que $y = 1$ es la solución buscada.

Observad que la solución es única aplicando el teorema de existencia y unicidad considerando $y' = f(x,y) = \dfrac{1-y}{x^2}$.

Solución c)

Al multiplicar la ecuación diferencial por el factor integrante se tendrá que la siguiente ecuación será exacta

$$x^m y^n\left(-3y + 2x^3y^3\right)dx + x^m y^n\left(4x - 3x^4y^2\right)dy = 0$$

$$\Big(\underbrace{-3x^m y^{n+1} + 2x^{m+3}y^{n+3}}_{M}\Big)dx + \Big(\underbrace{4x^{m+1}y^n - 3x^{m+4}y^{n+2}}_{N}\Big)dy = 0$$

Por lo tanto, se tiene que cumplir $M'_y = N'_x$, es decir,

$$-3x^m(n+1)y^n + 2x^{m+3}(n+3)y^{n+2} = 4(m+1)x^m y^n - 3(m+4)x^{m+3}y^{n+2}$$

$$-3(n+1)x^m y^n + 2(n+3)x^{m+3}y^{n+2} = 4(m+1)x^m y^n - 3(m+4)x^{m+3}y^{n+2}$$

$$\begin{array}{ll} -3(n+1) = 4(m+1) & \qquad 3n + 4m = -7 \\ 2(n+3) = -3(m+4) & \qquad 2n + 3m = -12 \end{array}$$

$$-6n - 8m = 14$$

$$6n + 9m = -36 \qquad \boxed{m = -22} \qquad 3n = -7 + 88 = 81 \Rightarrow \boxed{n = 27}$$

El factor integrante es $\mu\left(x,y\right)=x^{-22}y^{27}$.

2

(a) Resolver la siguiente ecuación diferencial $y''-9y=\dfrac{9x}{e^{3x}}$

(b) Sabiendo que $y_1(x)=e^x$ es solución de la siguiente ecuación

$$xy''-(x+1)y'+y=0$$

Encontrar su solución general.

Solución b)

La ecuación diferencial de coeficientes constantes $y''-9y=\dfrac{9x}{e^{3x}}$ tiene como polinomio característico

$$r^2-9=\left(r-3\right)\left(r+3\right)=0$$

La solución general es $y_{GH}=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$. Para encontrar la solución particular de la completa consideramos

$$y_p=x\left(Ax+B\right)e^{-3x} \qquad y_p=\left(Ax^2+Bx\right)e^{-3x}$$

y determinamos los coeficientes A y B sabiendo que es solución de la ecuación diferencial: $y_p''-9y_p=\dfrac{9x}{e^{3x}}=9xe^{-3x}$. Como se cumple

$$y_p'=\left(2Ax+B\right)e^{-3x}-3\left(Ax^2+Bx\right)e^{-3x}$$

$$y_p''=2Ae^{-3x}-6\left(2Ax+B\right)e^{-3x}+9\left(Ax^2+Bx\right)e^{-3x}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial

$$2Ae^{-3x}-6\left(2Ax+B\right)e^{-3x}+9\left(\cancel{Ax^2}+\cancel{Bx}\right)e^{-3x}-9\left(\cancel{Ax^2}+\cancel{Bx}\right)e^{-3x}=9xe^{-3x}$$

se tiene el siguiente sistema

$$-12A=9$$
$$2A-6B=0$$

cuya solución es $A=-3/4,\ b=-1/4$. Por lo tanto, la solución particular es

$$y_p=\left(-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}x\right)e^{-3x}$$

y la solución general es

$$y_G=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+\left(-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}x\right)e^{-3x}$$

Solución b)

Si $y_1 = e^x$, otra solución de la ecuación diferencial homogénea $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ que sea linealmente independiente con ella será de la forma $y_2 = v(x)e^x$. Deberá cumplir entonces

$$xy_2'' - (x+1)y_2' + y_2 = 0$$

$$y_2' = v'(x)e^x + v(x)e^x \qquad y_2'' = v''(x)e^x + 2v'(x)e^x + v(x)e^x$$

es decir,

$$x\left[v''(x)\cancel{e^x} + 2v'(x)\cancel{e^x} + v(x)\cancel{e^x}\right] - (x+1)\left[v'(x)\cancel{e^x} + v(x)\cancel{e^x}\right] + v(x)\cancel{e^x} = 0$$

Simplificando

$$xv''(x) + 2xv'(x) - (x+1)v'(x) = 0$$

$$xv''(x) + (x-1)v'(x) = 0$$

$$\frac{v''(x)}{v'(x)} = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1 \qquad \log v'(x) = \log x - x$$

$$v'(x) = xe^{-x} \qquad v(x) = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

Por lo tanto,

$$y_2 = \left(-xe^{-x} - e^{-x}\right)e^x = -x - 1$$

La solución general es

$$y_{GH} = C_1e^x + C_2(-x-1)$$

3

Resolver el problema $\begin{cases} y'' + y' = f(t) & , \ t > 0 \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 0 \end{cases}$ donde $f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ 0 & t \ge 1 \end{cases}$.

Llamamos $Y(s) = \mathcal{L}(y)$. Se tiene que

$$\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) = sY(s) \qquad \mathcal{L}(y'') = s\mathcal{L}(y') = s^2Y(s)$$

$$f(t) = t\left(U(t) - U(t-1)\right)$$
$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}\left(tU(t)\right) - \mathcal{L}\left(\left[(t-1)+1\right]U(t-1)\right) = \mathcal{L}\left(tU(t)\right) - \mathcal{L}\left((t-1)U(t-1)\right) - \mathcal{L}\left(U(t-1)\right)$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

Aplicando transformadas a la ecuación diferencial se tendrá

$$s^2Y(s) + sY(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$

Despejando

$$Y(s) = \frac{1}{s^3(s+1)} - e^{-s}\left(\frac{1+s}{s^2(s^2+s)}\right)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^3(s+1)} - \frac{e^{-2s}}{s^3} = \left(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) - \frac{e^{-s}}{s^3} \qquad \text{(ver nota)}$$

Calculando la transformada inversa

$$y(t) = A\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) + B\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + C\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + D\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s^3}\right) =$$

$$y(t) = \frac{t^2}{2} - t + 1 - e^{-t} - U(t-1)\frac{(t-1)^2}{2}$$

Nota: Para calcular la descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{s^3(s+1)} = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{D}{s+1} \Rightarrow 1 = A(s+1) + Bs(s+1) + Cs^2(s+1) + Ds^3$$

$$\begin{array}{ll} s=-1 & 1=-D \Rightarrow D=-1 \\ s=0 & 1=A \\ coef\ s^3 & 0=C+D \Rightarrow C=1 \\ coef\ s^2 & 0=B+C \Rightarrow B=-1 \end{array}$$

Luego

$$\frac{1}{s^3(s+1)} = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

4

Puntos extra

(a) Dada las funciones $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$, justificar si constituyen un sistema fundamental de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes. En caso afirmativo, encontrar dicha ecuación diferencial.

(b) Determinar la familia de curvas ortogonal a la familia $x^2 - 3y^2 = C$.

Solución a)

Las dos funciones son linealmente independientes ya que

$$W\left(y_1, y_2\right) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x} + 2xe^{4x} - 2xe^{4x} = e^{4x} \neq 0$$

Además, estas dos funciones son solución de la ecuación diferencial de coeficientes constantes que tiene por polinomio característico

$$\left(r-2\right)^2 = r^2 - 4r + 4$$

que corresponde a la EDO de coeficientes constantes siguiente: $y'' - 4y' + 4y = 0$. La solución general de esta ecuación diferencial es $y_{GH} = C_1 e^{2x} + C_2 xe^{2x}$

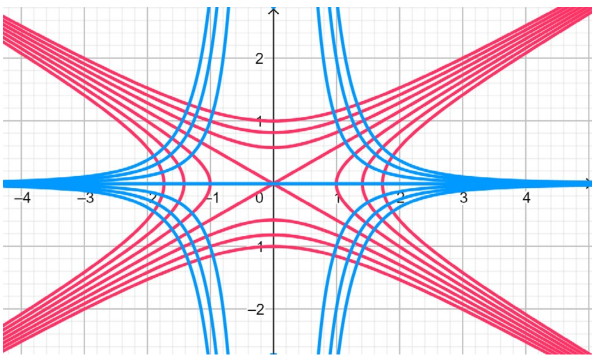
Solución b)

La ecuación diferencial que tiene por solución la familia dada es $2x - 6yy' = 0$, es decir,

$$y' = \frac{x}{3y}$$

Encontramos la ecuación diferencial de la familia ortogonal como solución general de la ecuación diferencial: $y' = -\dfrac{3y}{x}$. Resolviendo

$$\frac{dy}{y} = -\frac{3}{x}dx \;\Rightarrow\; \log|y| = \log|x|^{-3} + C \;\Rightarrow\; y = \frac{C}{x^3}$$



BLOQUE 1 CONVOCATORIA ORDINARIA

1

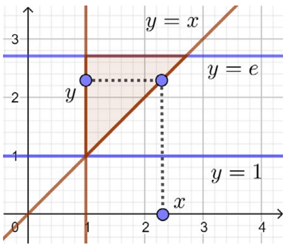
(a) Dada la integral $\int_1^e \int_1^y \frac{y}{x}\,dxdy$, se pide, plantearla cambiando el orden de integración y calcularla, dibujando el dominio de integración.

(b) Dado el punto $(\rho,\phi,\theta)=\left(4,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ en coordenadas esféricas, escribirlo en coordenadas cartesianas y coordenadas cilíndricas.

Solución a) Ejercicio hecho en clase.

En la figura se representa la región D de integración formada por los puntos (x,y) del plano cumpliendo

$$1 \le y \le e \qquad 1 \le x \le y$$



Cambiando el orden de integración se tendrá que el dominio D será

$$1 \le x \le e \qquad x \le y \le e$$

$$\int_1^e\int_x^e \frac{y}{x}\,dydx = \int_1^e \frac{1}{x}\left(\frac{y^2}{2}\right)_{y=x}^{y=e} dx = \int_1^e \frac{1}{x}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{e^2}{2}\int_1^e \frac{1}{x}\,dx - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx$$

$$= \frac{e^2}{2}\left(\log e - \log 1\right) - \left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}}$$

Solución b)

Considerando la expresión que relaciona las coordenadas cartesianas con las esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

se tiene sustituyendo $\left(\rho,\phi,\theta\right)=\left(4,\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ que $\left(x,y,z\right)=\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0\right)$.

Considerando estas coordenadas cartesianas y la relación con las coordenadas cilíndricas $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\operatorname{sen}\theta \\ z=z \end{cases}$ se tendrá $\left(r,\theta,z\right)=\left(4,\dfrac{\pi}{4},0\right)$.

2

Considera la función $f\left(x,y\right)=sen\left(x^2\right)\cos\left(y^2\right)$ donde

$$\left(x,y\right)\in R=\left[-1,1\right]\times\left[-2,0\right]$$

Escribe el **código Matlab** para

(a) calcular la suma de Riemann de una partición regular con n=10, m=20 considerando el punto medio para estimar la integral doble $I=\iint_R sen\left(x^2\right)\cos\left(y^2\right)dA$. Escribe la expresión de la suma de Riemann utilizada.

(b) Calcular el valor promedio de $f\left(x,y\right)$ sobre R.

SOLUCIÓN

Este ejercicio se hizo en la práctica número 1.

3

(a) Calcular el área de una valla que se proyecta sobre la circunferencia centrada en el origen de radio 2 desde el punto $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ hasta el punto $\left(0,2\right)$ siendo la altura en cada punto $f\left(x,y\right)=3x+y$.

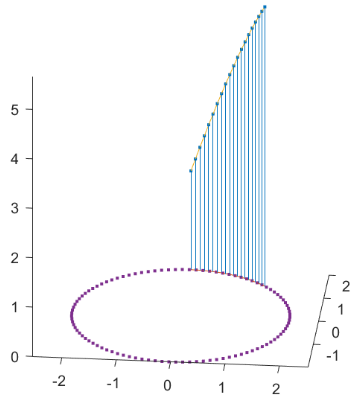
(b) Utilizando integrales, calcular la longitud de la curva $r=3\cos\theta$ con $\theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ y el área interior a $r=3$ y exterior a $r=3\cos\theta$.

SOLUCIÓN A) EJERCICIO HECHO EN CLASE

Sobre cada punto del arco de la circunferencia de centro 0 y radio 2 para los valores de t entre $\dfrac{\pi}{4}$ y $\dfrac{\pi}{2}$ se considera la valla que tiene en cada punto el valor de la función $f\left(x,y\right)=3x+y$.

La curva sobre la que se apoya la valla es la siguiente

$$C_1:\vec{r}\left(t\right)=\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)=\left(2\cos\left(t\right),2\sin\left(t\right)\right)\qquad \frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{2}$$



El área de la valla se calcula mediante la siguiente integral de línea

$$\int_{C_1} f(x,y)\,ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

$$\int_{C_1} (3x+y)\,ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[3\cdot 2\cos(t) + 2sen(t)\right]\sqrt{\left(-2\sin(t)\right)^2 + \left(2\cos(t)\right)^2}\,dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[6\cos(t) + 2sen(t)\right]\sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)}\,dt =$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(6\cos(t) + 2sen(t)\right)dt = 2\left(6sen(t) - 2\cos(t)\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{12 - 4\sqrt{2}}$$

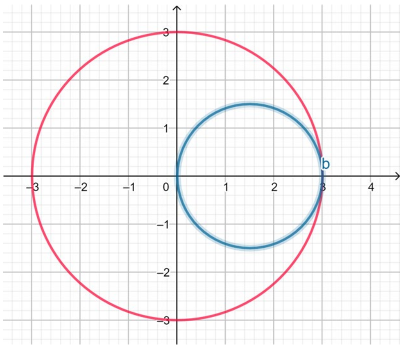
SOLUCIÓN B) EJERCICIO HECHO EN CLASE

La longitud

$$L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{9\cos^2\theta + 9sen^2\theta}\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\ d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

Las dos curvas que se deben considerar son las circunferencias de radio 3 y la circunferencia

$$r = 3\cos\theta \qquad \to r^2 = 3r\cos\theta \qquad \to x^2 + y^2 = 3x \qquad \to \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$



El área se puede calcular mediante las siguientes integrales dobles

$$A = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^3 r dr\, d\theta + 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_3^{3\cos\theta} r\, d\theta = \frac{9\pi}{4} + 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{9\cos^2\theta}{2} - \frac{9}{2} \right) d\theta = \frac{9\pi}{4} + \frac{9\pi}{2} = \frac{27\pi}{4}$$

Nota: Observar que el área pedida sería la del círculo rojo menos el área del círculo azul: $9\pi - \frac{9\pi}{4} = \frac{27\pi}{4}$.

4

Aplicar el Teorema de Gauss para obtener el flujo del campo vectorial:

$\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z\sqrt{x^2+y^2}\mathbf{k}$ a través de la superficie frontera del sólido

$$H = \left\{ z \geq 0 \quad , \qquad 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \right\}.$$

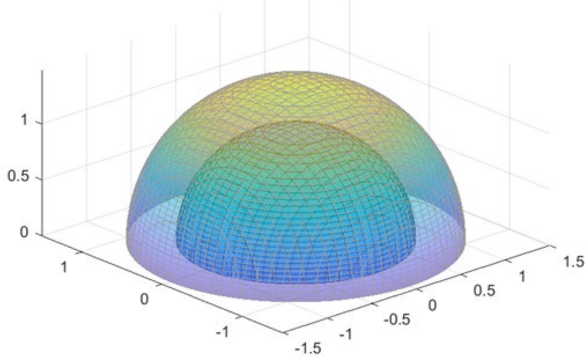
Solución

Utilizando el teorema de Gauss se tendrá que

$$flujo = \iint_{\partial H} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_H divF\, dV = \iiint_H \sqrt{x^2+y^2}\, dV$$

ya que $divF = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 2 - 2 + \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

El sólido H está delimitado por las esferas $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x^2+y^2+z^2 = 2$ y el plazo $z = 0$.



Pasando a coordenadas esféricas

$$flujo = \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \underbrace{\rho\, sen\phi}_{\sqrt{x^2+y^2}} \; \rho^2 sen\phi \;\, d\theta\, d\phi d\rho = \left(\frac{\rho^4}{4} \right)_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{2}} \left(\theta \right)_{\theta=1}^{\theta=2\pi} \int_0^{\pi/2} sen^2\phi \, d\phi =$$

$$= \left(\frac{4-1}{4} \right) 2\pi \int_0^{\pi/2} sen^2\phi \, d\phi = \frac{3}{4} 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\phi}{2} d\phi =$$

$$= \frac{3\pi}{2} \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{3\pi^2}{8}}$$

5

Se considera la porción de superficie $z = 2 - 3y + x^2$ que está por encima del triángulo T que se encuentra en el plano XY y tiene por vértices los puntos (0,0), (2,0) y (2,-4). Sobre cada punto de la superficie se define la función temperatura $T\left(x, y, z\right) = z + 3y - x^2$ y el campo $\mathbf{F}\left(x, y, z\right) = 3x\,\mathbf{i} + 2z\,\mathbf{j} + \left(1 - y^2\right)\mathbf{k}$.

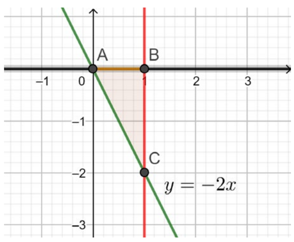
- Calcular la temperatura total y la temperatura media.
- El flujo hacia abajo del campo a través de esta superficie.

SOLUCIÓN a)

Se pide calcular la temperatura de la superficie $z = 2 - 3y + x^2$ sabiendo que en cada punto de la superficie su valor es: $T\left(x, y, z\right) = z + 3y - x^2$

$$\iint_S \left(z + 3y - x^2 \right) dS$$

La superficie S se proyecta en el plano XY en el dominio D que se representa en la figura



$$\iint_S \left(z + 3y - x^2 \right) dS \;\; = \iint_D \left[\left(2 - 3y + x^2 \right) + 3y - x^2 \right] \sqrt{\left(2x\right)^2 + \left(-3\right)^2 + 1} \, dA \;\; =$$

$$= \iint_D 2\sqrt{4x^2 + 10}\, dA = \int_0^2 \int_{-2x}^0 2\sqrt{4x^2+10}\, dy\, dx = \int_0^2 \left(2y\sqrt{4x^2+10} \right) \Big|_{-2x}^{0} \; dx =$$

$$= \int_0^2 4x\sqrt{4x^2+10}\,dx = \frac{1}{3}\left(4x^2+10\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\left(26^{\frac{3}{2}} - 10^{\frac{3}{2}}\right) \simeq 33.6506$$

El área de la superficie es

$$\acute{a}rea(S) = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{(2x)^2+(-3)^2+1}\,dA = \iint_D \sqrt{4x^2+10}\,dA$$

La densidad media es 2.

Solución b)

Se tiene que

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\;dS = \iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\;dA = \iint_D \left(y^2+18y-13\right)dA$$

ya que

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = \left(x,y,2-3y+x^2\right)\cdot\mathbf{N} = \left(3x,2\left(2-3y+x^2\right),1-y^2\right)\cdot\left(2x,-3,-1\right) =$$

$$= \left(6x^2 - 6\left(2-3y+x^2\right) - \left(1-y^2\right)\right) = y^2+18y-13$$

Calculando la integral doble

$$\int_0^2\int_{-2x}^0 \left(y^2+18y-13\right)dy\,dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{3}y^3+9y^2-13y\right)\Big|_{-2x}^0 dx =$$

$$\int_0^2\left(\frac{8}{3}x^3-36x^2-26x\right)dx = \left(\frac{2}{3}x^4-12x^3-13x^2\right)\Big|_0^2 = \boxed{-\frac{412}{3}}$$

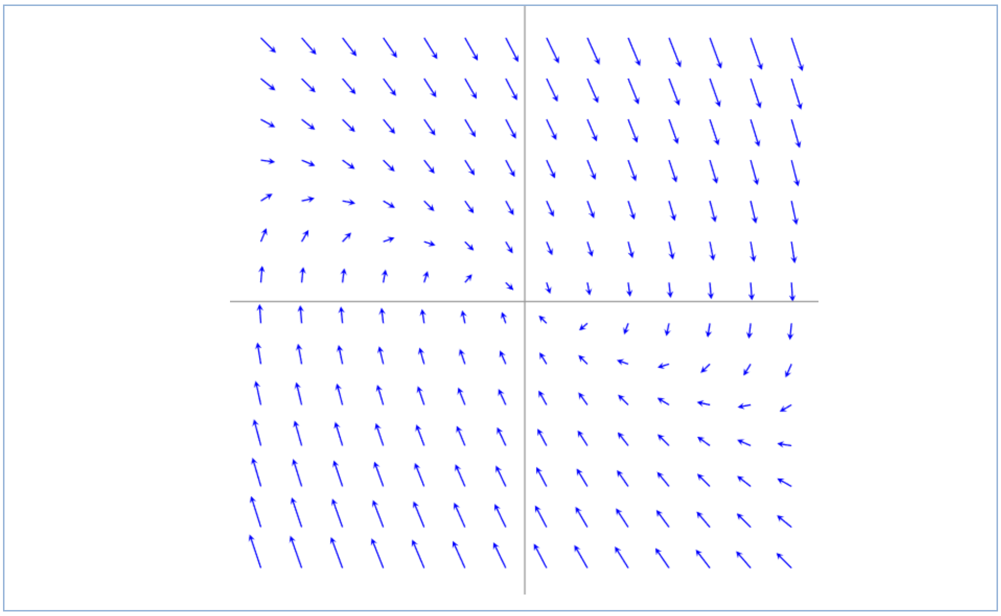
BLOQUE 2 CONVOCATORIA ORDINARIA

1

(a) Encontrar la ecuación diferencial cuaya solución general es $y\left(Cx-x^2\right)=1$.

(b) Encontrar **todas** las soluciones de la ecuación diferencial $y' = x\sqrt{y}$.

(c) Sin resolver la ecuación diferencial $y' = e^{x^2}$, ¿puede ser la siguiente figura el campo de direcciones de la edo dada? Justifica la respuesta



SOLUCIÓN a)

Derivando la ecuación diferencial se tendrá: $y'\left(Cx - x^2\right) + y\left(C - 2x\right) = 0$.

Eliminando la constante, $C = \dfrac{1 + yx^2}{yx}$, se tiene que

$$y'\frac{1}{y} + y\left(\frac{1 + yx^2}{yx} - 2x\right) = 0$$

Operando

$$y'\frac{1}{y} + \left(\frac{1 + yx^2 - 2yx^2}{x}\right) = 0 \qquad \boxed{y' = \frac{y^2x^2 - y}{x}}$$

SOLUCIÓN b)

La ecuación $y' = x\sqrt{y}$ es de variables separables. Dividiendo por y, en el caso de que $y \neq 0$, se tiene que

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = x \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = xdx \Rightarrow \boxed{2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + C}$$

Además, como $\boxed{y = 0}$ es solución se tiene que será una solución singular.

SOLUCIÓN c)

No puede ser porque la pendiente de la solución en cada punto es positiva y, según el gráfico que muestra el campo de direcciones, hay puntos del plano en los que la pendiente es negativa.

2

(a) De la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se sabe que admite un factor integrante que depende solo de y. Deducir la expresión de dicho factor integrante. Aplicarlo a la siguiente ecuación diferencial $xdx + (x^2y + 4y)dy = 0$ y calcular la solución cumpliendo $y(4) = 0$.

(b) Encontrar la solución de la ecuación diferencial $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2 senx$.

Solución a)

Si la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, admite un factor integrante dependiente de y se tendrá que la siguiente ecuación es exacta

$$\underbrace{\mu(y)M(x,y)}_{=M_1(x,y)}dx + \underbrace{\mu(y)N(x,y)}_{=N_1(x,y)}dy = 0$$

Por lo tanto, se cumplirá

$$\frac{\partial M_1(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N_1(x,y)}{\partial x}$$

es decir,

$$\mu'(y)M(x,y) + \mu(y)M_y'(x,y) = \mu(x)N_x'(x,y)$$

Se cumplirá que

$$\mu'(y)M(x,y) = -\mu(y)\left[M_y'(x,y) - N_x'(x,y)\right]$$

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = -\frac{M_y'(x,y) - N_x'(x,y)}{M(x,y)}$$

Integrando

$$\log \mu(y) = \int \frac{N_x'(x,y) - M_y'(x,y)}{M(x,y)}dy$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x'(x,y) - M_y'(x,y)}{M(x,y)}dy}$$

En el caso de la ecuación diferencial dada, será

$$\mu(y) = e^{\int \frac{2xy}{x}dy} = e^{\int 2y dy} = e^{y^2}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por este factor integrante se tendrá,

$$e^{y^2}x\ dx + e^{y^2}(x^2y + 4y)dy = 0$$

Buscamos f de forma que $df = e^{y^2} x\ dx + e^{y^2}\left(x^2 y + 4y\right) dy = 0$. Para ello se tendrá que cumplir

$$f'_x = e^{y^2} x \rightarrow f(x,y) = e^{y^2}\frac{x^2}{2} + h(y)$$

$$f'_y = e^{y^2}\left(x^2 y + 4y\right) \rightarrow e^{y^2}\left(x^2 y + 4y\right) = e^{y^2} 2y\frac{x^2}{2} + h'(y) \rightarrow h'(y) = 4ye^{y^2} \rightarrow h(y) = 2e^{y^2}$$

La función es, por lo tanto, $f(x,y) = e^{y^2}\frac{x^2}{2} + 2e^{y^2}$. La solución de la ecuación diferencial será

$$\boxed{e^{y^2}\left(x^2 + 4\right) = C}$$

Para hallar la curva solución para $y(4) = 0$, se calcula el valor de C que cumple $e^0\left(16+4\right) = C \Rightarrow C = 20$. La curva solución que pasa por el punto (4,0) es $\boxed{e^{y^2}\left(x^2+4\right) = 20}$.

Solución b) Ejercicio hecho en clase

Es una ecuación diferencial lineal $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y = xsenx \qquad \rightarrow p(x) = -\frac{1}{x} \qquad q(x) = xsenx$

Consideramos el factor integrante

$$\mu(x) = e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\log x} = \frac{1}{x}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por este factor integrante, se tiene

$$\frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = senx \rightarrow \left(\frac{1}{x} y\right)' = senx$$

Integrando

$$\frac{1}{x} y = -\cos x + C \Rightarrow \boxed{y = -x\cos x + Cx}$$

3

(a) Escribe el código Matlab para resolver el siguiente problema:
Un cuerpo oscilando sobre su posición de equilibrio (x=0) se mueve de acuerdo a la ecuación diferencial $x''(t) + 16x(t) = 24\cos(4t)$. Si en el instante inicial se encuentra en su posición de equilibrio y con velocidad nula, ¿en qué posición se encontrará al cabo de 10 segundos?

(b) Escribir, utilizando el método de coeficientes indeterminados, la expresión que tendría una solución particular y_p de la ecuación

$$y'' + 2y' - 3y = g(x)$$

para los siguientes valores de $g(x)$:

a) $7\cos 3x$ b) $5e^{-3x}$ c) $x^2\cos \pi x$ d) $2xe^{x}$

Escribir la forma que tendría la solución particular (no se pide resolver).

SOLUCIÓN a)

Este ejercicio se resolvió en clase, en la práctica 9.

```
syms x(t)
eqn= diff(x,t,2)+16*x==24*cos(4*t);
Dx=diff(x,t);
cond=[x(0)==0,Dx(0)==0]
sol(t)=dsolve(eqn,cond)
%En el instante t=10
sol(10)
ezplot(sol(t),[0,10])
hold on
plot(0,0,'o')
plot(10,sol(10),'*')
hold off
```

SOLUCIÓN b)

Calculamos en primer lugar, la solución general de la ecuación homogénea asociada

$$r^2+2r-3=0$$

que tiene por raíces $r=1$, $r=-3$. La solución general es $y_{GH}=C_1e^{x}+C_2e^{-3x}$.

En función del término independiente de la ecuación diferencial, escribimos la solución particular

a) $7\cos 3x$ $\qquad y_p=A\cos 3x+Bsen3x$

b) $5e^{-3x}$ $\qquad y_p=Axe^{-3x}$

c) $x^2\cos \pi x$ $\qquad y_p=\left(Ax^2+Bx+C\right)\left(\cos \pi x+sen\pi x\right)$

d) $2xe^{x}$ $\qquad y_p=\left(Ax+B\right)xe^{x}$

4

(a) Calcular la transformada de Laplace de la función

$$E\left(t\right)=\begin{cases} 2-t & si & 0<t\le 3 \\ t^2 & si & 3<t \end{cases}$$

(b) Calcular la transformada inversa de Laplace de la función $F\left(s\right)=\dfrac{e^{-2s}}{s^2-s}$.

SOLUCIÓN A) EJERCICIO HECHO EN LA PRUEBA DE SEGUIMIENTO 3.

$$E(t)=(2-t)\big(U(t)-U(t-3)\big)+t^2U(t-3)=(2-t)U(t)+\left(t^2+t-2\right)U(t-3)$$

$$\mathcal{L}\big(E(t)\big)=2\mathcal{L}\big(U(t)\big)-\mathcal{L}\big(tU(t)\big)+\mathcal{L}\Big(\Big[(t-3)^2+7(t-3)+10\Big]U(t-3)\Big)$$

$$=2\mathcal{L}\big(U(t)\big)-\mathcal{L}\big(tU(t)\big)+\mathcal{L}\Big((t-3)^2U(t-3)\Big)+7\mathcal{L}\big((t-3)U(t-3)\big)+10\mathcal{L}\big(U(t-3)\big)$$

$$=\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{2e^{-3s}}{s^3}+\frac{7e^{-3s}}{s^2}+\frac{10e^{-3s}}{s}$$

SOLUCIÓN b)

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2-s}\right)=f(t-2)U(t-2) \qquad f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-s}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}\right)=1-e^t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big)=\left[1-e^{t-2}\right]U(t-2)$$

$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left[F(s)\right]$	$F(s)=\mathfrak{L}\left[f(t)\right]$
1	$\frac{1}{s}, \quad s>0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s>0, \quad n\geq 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s>a$
$\operatorname{sen} a t$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s>0$
$\cos a t$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s>0$