Nombre y Apellidos: Núm.

Prueba 5 de abril 2019

1

Determinar si las siguientes afirmaciones son **verdaderas o falsas justificando** adecuadamente la respuesta.

(a) Se considera el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2},\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right)$$

Se cumplen las hipótesis para poder afirmar que

$$\int_C Mdx+Ndy=\iint_D\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy$$

donde C es la curva de ecuación $4x^2+y^2=1$ recorrida en sentido positivo y D es el conjunto acotado limitado por ella.

(b) Se considera el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

Se cumplen las hipótesis para poder aplicar el Teorema de la divergencia o de Gauss donde H es el conjunto acotado cuya frontera S se considera orientada según la normal exterior y está formada por las superficies $x^2+y^2=z+1$ y $z=4$.

(c) Define campo vectorial, línea de flujo y curvas equipotenciales.

(d) Calcula el jacobiano $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ del siguiente cambio de variable

$$u=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-1$$
$$v=\frac{-1}{3}x+\frac{1}{3}y$$

Solución

(a) Para que la igualdad que se propone sea cierta debe cumplirse las hipótesis del teorema de Green, D dominio simplemente conexo (es el interior de la elipse $\frac{x^2}{4}+y^2=11$, la curva frontera de D recorrida en sentido positivo y el campo debe

Nombre y Apellidos: Núm.

ser de clase C^1 en D. El único punto donde no está definido el campo es el punto (1,0) que no pertenece a D ya que $4\cdot 1^2+0^2>1$ así que es cierta la afirmación.

(b) El campo es de clase C^∞ en todo $\mathbb{R}^3$ menos en el punto (0,0,0). Como el origen está dentro del sólido limitado por el paraboloide y el plano z=4, entonces no se cumplen las hipótesis del teorema de a divergencia.

(c) Ver apuntes.

(d) $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right]^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}2/3 & 1/3\\ -1/3 & 1/3\end{vmatrix}}=3$$

Nota: Otra opción es escribir x, y en función de u, y

$$\left.\begin{array}{l} u=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}y-1\\ v=\dfrac{-1}{3}x+\dfrac{1}{3}y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3u+3=2x+y\\ 3v=-x+y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=u+v+1\\ y=u+4v+1\end{array}\right\}$$

2

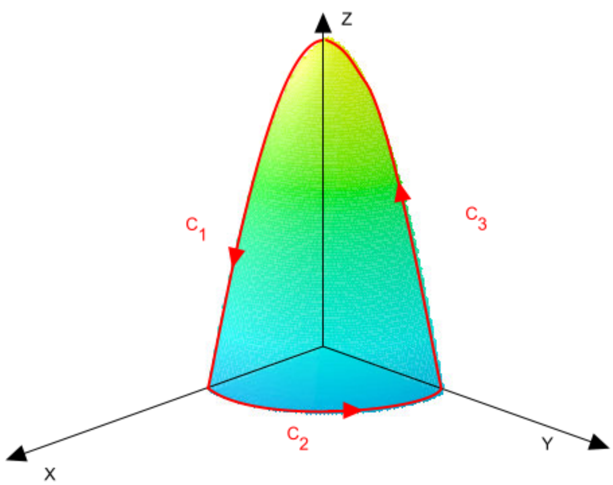
Verificar que se cumple el Teorema de Stokes considerando

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(2z,x,y^2)$$

y S la superficie $z=4-x^2-y^2$ del primer octante ($z\ge 0,\ x\ge 0,\ y\ge 0$)

Solución

La superficie S es una porción de paraboloide $z=4-x^2-y^2$



Se verifican las condiciones del Teorema de Stokes así que el flujo del rotacional del campo se puede calcular como una integral de línea sobre la frontera de la superficie

$$\iint_S rot\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_{\partial S}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$$

Cálculo de la integral de superficie

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=\left(2y,2,1\right)$$

Considerando el normal exterior y llamando D a la proyección de S sobre z=0 se tendrá:

$$\iint_S rot\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D \left(2y,2,1\right)\cdot\left(2x,2y,1\right)dA$$

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\left(4xy+4y+1\right)dydx = \int_0^2\int_0^{\pi/2}\left(4r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta+4r\operatorname{sen}\theta+1\right)rd\phi dr$$

$$\int_0^{\pi/2}\left(r^4\cos\theta\operatorname{sen}\theta+\frac{4r^3}{3}\operatorname{sen}\theta+\frac{r^2}{2}\right)_{r=0}^{r=2}d\theta=\int_0^{\pi/2}\left(16\cos\theta\operatorname{sen}\theta+\frac{32}{3}\operatorname{sen}\theta+2\right)d\theta=\pi+\frac{56}{3}$$

Calculo de la integral de línea

Como se puede comprobar la frontera de la superficie es una curva cerrada suave por partes que se puede escribir como

$$\int_{\partial S}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds=\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds+\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds+\int_{C_3}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds$$

siendo C_1 la frontera de la superficie en el plazo XZ, C_2 la frontera de la superficie en el plazo z=0 y C_3 la frontera de la superficie en el plazo YZ.

- Curva frontera C_1 (plano XZ)

$$\mathbf{r}\left(t\right)=\left(t,0,4-t^2\right)\quad t\in\left[0,2\right]\qquad \mathbf{r'}\left(t\right)=\left(1,0,-2t\right)$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}=\left(8-2t^2,\mathrm{t},0\right)\cdot\left(1,0,2t\right)=8-2t^2$$

$$\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds=\int_0^2\left(8-2t^2\right)dt=\frac{32}{3}$$

- Curva frontera C_2 (plano z=0)

Nombre y Apellidos: Núm.

$$\mathbf{r}(t) = \left(2\cos(\mathrm{t}), 2\,\mathrm{sen}(\mathrm{t}), 0\right) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \mathbf{r'}(t) = \left(-2\,\mathrm{sen}(\mathrm{t}), 2\cos(\mathrm{t}), 0\right)$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{r} = \left(0, 2\cos(\mathrm{t}), 4\,\mathrm{sen}^2(\mathrm{t})\right)\cdot\left(-2\,\mathrm{sen}(t), 2\cos(t), 0\right) = 4\cos^2(t)$$

$$\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \pi$$

- Curva frontera C_3 (plano YZ)

$$\mathbf{r}(t) = \left(0, \mathrm{t}, 4-\mathrm{t}^2\right) \quad t \in [0, 2] \qquad \mathbf{r'}(t) = \left(0, 1, -2\,\mathrm{t}\right)$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{r} = \left(8-2\,\mathrm{t}^2, 0, t^2\right)\cdot\left(0, 1, -2\,\mathrm{t}\right) = -2t^3$$

$$\int_{C_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = -\int_0^2 -2t^3\,dt = 8$$

Luego,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \frac{32}{3} + \frac{\pi}{4} + 8 = \frac{56}{3} + \pi$$

3

(a) Calcula la densidad media de la placa D definida por los puntos del plano interior a $x^2 + y^2 + 2y = 0$ y exterior a $x^2 + y^2 = 2$ siendo la función de densidad $\delta(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

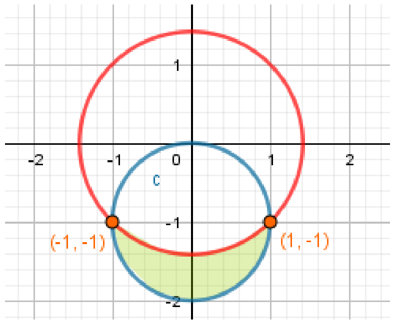
(b) Describe en esféricas el sólido determinado por los puntos del espacio del primer octante que son exteriores a $z = \sqrt{3\left(x^2 + y^2\right)}$ e interiores a las superficies $z = \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)}$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Solución

Se trata de calcular

$$densidad\ \ media = \frac{\iint_D \delta(x, y)\,dA}{area(\mathrm{D})}$$

donde D es la región comprendida entre las dos circunferencias siguientes: $x^2+(y+1)^2=1$, $x^2+y^2=2$.



Los puntos de corte son (1, -1) y (-1,-1) ya que $\left.\begin{matrix} x^2+y^2+2y=0 \\ x^2+y^2=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2+2y=0 \Rightarrow y=-1$

Calculamos las dos integralres en polares teniendo en cuenta que

$$\left.\begin{matrix} x^2+y^2+2y=0 \\ x^2+y^2=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r^2+2rsen\theta=0 \\ r^2=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r=-2sen\theta \\ r=\sqrt{2} \end{matrix}\right\}$$

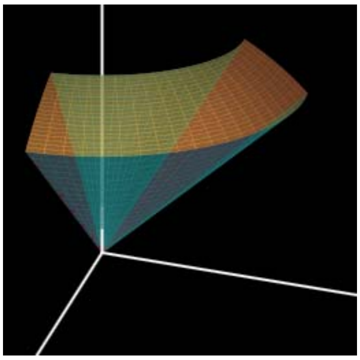
Calculando las integrales

$$\iint_D \delta(x,y)\,dA = \int_{5\pi/4}^{7\pi/4}\int_{\sqrt{2}}^{-2\operatorname{sen}\theta} dr d\theta = -\int_{5\pi/4}^{7\pi/4}\left(2\operatorname{sen}\theta+\sqrt{2}\right)d\theta = -\frac{\sqrt{2}\left(\pi-4\right)}{2}$$

$$área(D) = \iint_D dA = \int_{5\pi/4}^{7\pi/4}\int_{\sqrt{2}}^{-2\operatorname{sen}\theta} r\ dr d\theta = \int_{5\pi/4}^{7\pi/4}\left(2\operatorname{sen}^2(\theta)-2\right)d\theta = 1$$

Luego la densidad media es $d_m = -\dfrac{\sqrt{2}\left(\pi-4\right)}{2}$

Apartado b) Hecho en clase.



$$0 \le \rho \le 4, \qquad \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Nombre y Apellidos: Núm.

Prueba 30 de abril 2019 (opción A-B)

1

(a) Determinar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y^2 = Ce^{-x}$ representando seis curvas de ambas familias en el intervalo [0,2]. Toma los valores de las constantes entre O y 4.

(b) Representar el campo de direcciones de la ecuación diferencial $y' = x - 4xy$ en el cuadrado [-2,2]x[-2,2] con paso 0.25 en ambos ejes. Resolver la ecuación y representar en la misma figura 10 soluciones para valores de la constante entre -5 y 5.

(c) Supongamos que la rapidez de decrecimiento es directamente proporcional a la cantidad presente de sustancia radiactiva. Si la vida media de una sustancia es de 1800 años. ¿Qué porcentaje estará presente al final de 100 años? ¿En cuántos años quedará el 10% de la sustancia?

Apartado a)

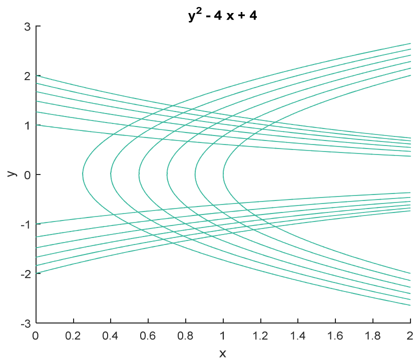
La ecuación diferencial de la familia de curvas dada es

$$\left.\begin{array}{l} 2y \cdot y' = -Ce^{-x} \\ y^2 = Ce^{-x} \end{array}\right\} \Rightarrow 2y \cdot y' = -y^2$$

La ecuación diferencial cuya solución es la familia dada es $y' = -\dfrac{y}{2}$

La ecuación diferencial cuya solución es la familia de curvas ortogonales es $y' = \dfrac{2}{y}$, cuya solución es $y^2 = 4x + C$

```
syms x y C
hold on
for C=linspace(2,6,6)
   ezplot(y^2-C*exp(-x),[0,2,-3,3])
   ezplot(y^2-4*x+C,[0,2,-3,3])
end
hold off
```

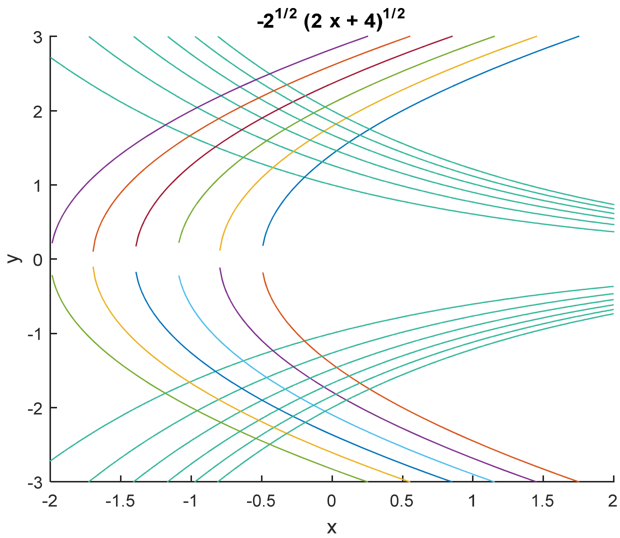


Nombre y Apellidos: Núm.

Si se resuelve con Matlab la ecuación diferencial sería

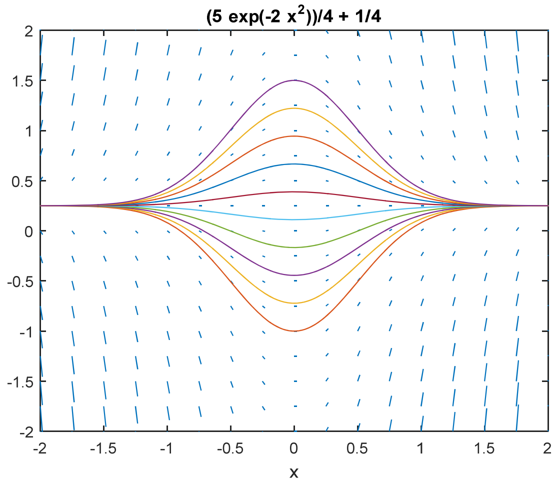
```
syms x y C
solu=dsolve('Dy=2/y','x')
%la solución es un vector de compenentes
%solu(1)= 2^(1/2)*(C6 + 2*x)^(1/2)
%solu(2)= -2^(1/2)*(C6 + 2*x)^(1/2)
hold on
for C=linspace(1,4,6)
    ezplot(y^2-C*exp(-x),[-2,2,-3,3])
    ezplot(2^(1/2)*(C + 2*x)^(1/2),[-2,2,-3,3])
    ezplot(-2^(1/2)*(C + 2*x)^(1/2),[-2,2,-3,3])
end
hold off
```

Nota: Se modifica el dominio para que se vea mejor la gráfica.



Apartado b)

```
[x,y]=meshgrid(-2:0.25:2);
[n,m]=size(x);
f=inline('x-4*x.*y','x','y');
dx=ones(n,m);dy=f(x,y);
q=quiver(x,y,dx,dy)
%para quitar la flecha del vector
set(q,'ShowArrowHead','off'))
solu=dsolve('Dy=x-4*x*y','x')
hold on
for k=linspace(-5,5,10)
    ezplot(subs(solu,'C5',k),[-2,2,-2,2])
end
hold off
```



Apartado c)

```
syms k M
sol=dsolve('DQ=k*Q','Q(0)=M')
valork=solve(subs(sol,'t',1800)-M/2)
solucion=subs(sol,k,valork)
porcentaje100=double(subs(solucion,'t',100)/M)*100
tiempo10=double(solve(solucion-0.1*M))
```

Los valores que se obtiene son

a. 96.22% b. 5980 años

Prueba 30 de abril 2019 (opción C)

1

(a) Determinar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y^3 = Ce^{-x}$ representando seis curvas de ambas familias. Toma los valores de las constantes entre -2 y 2.

(b) Representar el campo de direcciones de la ecuación diferencial $y' = x^2 - y$, en el cuadrado [-2,2]x[-2,2] con paso 0.5 en ambos ejes. Resolver la ecuación y representar en la misma figura 10 soluciones para el valor de las constantes entre -3 y 3.

(c) Supongamos que la rapidez de decrecimiento es directamente proporcional a la cantidad presente de sustancia radiactiva. Un año después de la producción de cierta sustancia se tenía 100 gramos de esta y dos años después 75 gramos, ¿cuánto se produjo inicialmente? ¿cuál es la vida media de la sustancia?

Apartado a)

La ecuación diferencial cuya solución es la familia dada es

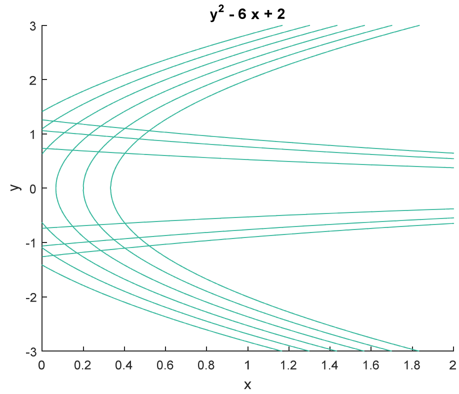
$$\left.\begin{array}{l} 3y^2y' = -Ce^{-x} \\ y^3 = Ce^{-x} \end{array}\right\} \Rightarrow 3y^2y' = -y^3 \Rightarrow y' = \frac{-y}{3}$$

Nombre y Apellidos: Núm.

La ecuación diferencial cuya solución es la familia ortogonal es: $y' = \frac{3}{y}$. Su solución es

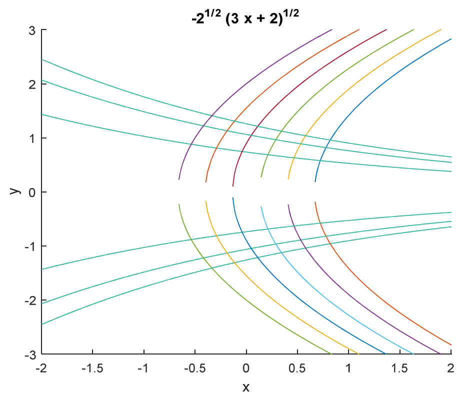
$y^2 = 6x + C$

```
syms x y C
hold on
for C=linspace(-2,2,6)
   ezplot(y^3-C*exp(-x),[0,2,-3,3])
   ezplot(y^2-6*x+C,[0,2,-3,3])
end
hold off
```



Resolviendo la ecuación diferencial de la familia ortogonal

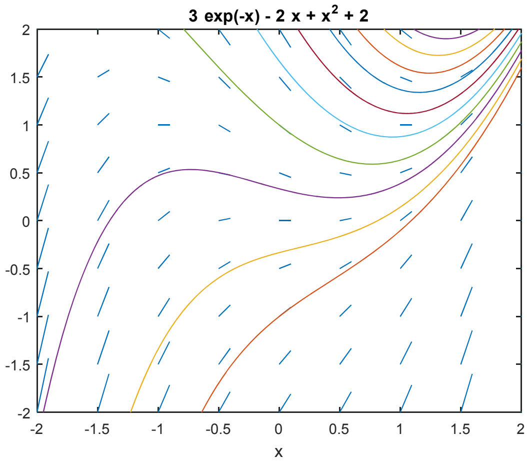
```
syms x y C
solu=dsolve('Dy=3/y','x')
%la solución es un vector de compenentes
%solu(1)= 2^(1/2)*(C6 + 3*x)^(1/2)
%solu(2)= -2^(1/2)*(C6 + 3*x)^(1/2)
hold on
for C=linspace(-2,2,6)
    ezplot(y^3-C*exp(-x),[-2,2,-3,3])
    ezplot(2^(1/2)*(C + 3*x)^(1/2),[-2,2,-3,3])
    ezplot(-2^(1/2)*(C + 3*x)^(1/2),[-2,2,-3,3])
end
hold off
```



Nombre y Apellidos: Núm.

Apartado b)

```
[x,y]=meshgrid(-2:0.5:2);
[n,m]=size(x);
f=inline('x.^2-y','x','y');
dx=ones(n,m);dy=f(x,y);
q=quiver(x,y,dx,dy)
%para quitar la flecha del vector
set(q,'ShowArrowHead','off')
solu=dsolve('Dy=x^2-y','x')
%Devuelve C5 + (x^2*(2*x - 3))/6
hold on
for k=linspace(-3,3,10)
    ezplot(subs(solu,'C5',k),[-2,2,-2,2])
end
hold off
```



Apartado c)

```
syms k M t
solu=dsolve('DQ=k*Q','Q(1)=100')
solu2=subs(solu,t,2)
valork=solve(solu2-75)
solucion=subs(solu,k,valork)
cantidadInicial=subs(solucion,t,0)
double(cantidadInicial)
vidamedia=double(solve(solucion-cantidadInicial/2))
```

a. 133.3 gramos   b. 2.4 años (2 años, 150 días)

Prueba 14 de mayo

1

Encuentra los valores de p y q reales para que la solución general de la ecuación lineal homogénea siguiente

$$y'' + py' + qy = 0$$

sea la familia indicada.

1) $y(x) = Ae^{-2x} + Be^{x}$
2) $y(x) = Ax + B$
3) $y(x) = A\cos x + B$
4) $y(x) = e^{-2x}(Ax + B)$
5) $y(x) = e^{-2x}(A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x)$

Prueba 24 de mayo

Transformadas de Laplace

$$\mathfrak{L}\left(1\right) = \frac{1}{s}\ \left(s > 0\right) \qquad \mathfrak{L}\left(e^{at}\right) = \frac{1}{s-a}\ \left(s > a\right) \qquad \mathfrak{L}\left(t\right) = \frac{1}{s^2}\ \left(s > 0\right)$$

$$\mathfrak{L}\left(sen\left(at\right)\right) = \frac{a}{s^2 + a^2}\ \left(s > 0\right) \qquad \mathfrak{L}\left(\cos\left(at\right)\right) = \frac{s}{s^2 + a^2}\ \left(s > 0\right)$$

1

1) ¿Qué es una isoclina? Pon un ejemplo
2) Obtén la pendiente de la recta tangente a la curva solución de la EDO $y' = \dfrac{y^2 + \cos\left(x\right)}{3x^2 + y}$ en el punto $\left(0,3\right)$
3) Determina la ecuación diferencial lineal homogenea de coeficientes constantes cuya solución general es $y = Ae^{2x}\cos\left(x\right) + Be^{2x}sen\left(x\right)$.
4) Indica cómo buscarías una solucion particular de una ecuación diferencial con coeficientes constantes $y'' + py' + qy = R\left(t\right)$ de la que se conoce que la solución general de la homogénea es $y_H = Ae^{-t} + Bte^{-t}$, para cada uno de los casos siguientes:

   a) $R\left(t\right) = 2e^{-t}t^2$ b) $R\left(t\right) = \dfrac{1}{t}$

   Nota: No hay que resolver la ecuación

Puntuación: 8=2+1+2+3

Apartado 1)

Nombre y Apellidos: Núm.

Ver teoría vista en clase y práctica 6 del 1 de abril.

Apartado 2)

La pendiente es $m = \dfrac{10}{3}$

Apartado 2)

> Este ejercicio se preguntó en la prueba de evaluación continua de 14 de marzo y se resolvió en clase.

Como la solución de la ecuación diferencial es $y = Ae^{2x}\cos(x) + Be^{2x}sen(x)$, el polinomio característico

$$\left(r-(2-i)\right)\left(r-(2+i)\right) = (r-2)^2 + 1 = r^2 - 4r + 5$$

La ecuación diferencial es $y'' - 4y' + 5y = 0$

Apartado 3)

a) $y_p = \left(At^2 + Bt + C\right)e^{-t}t^2$. Se sustituye en la ecuación y se encuentran los coeficientes indeterminados.

b) $y_p = A(t)e^{-t} + B(t)te^{-t}$, donde $A(t)$ y $B(t)$ se obtienen como solución del sistema:

$$\begin{aligned} A'(t)e^{-t} + B'(t)te^{-t} &= 0 \\ -A'(t)e^{-t} + B'(t)\left(e^{-t} - te^{-t}\right) &= \frac{1}{t} \end{aligned}$$

2

1) Encuentra **todas** las soluciones de las ecuaciones diferenciales
   a) $(y+1)dx + e^x dy = 0$ b) $xdy + \left(y - x^2\right)dx = 0$

2) Para cada una de las siguientes afirmaciones, determina si es verdadera o falsa justificando la respuesta
   a. $y' = \dfrac{x^2+2}{senx + y}$ es una ecuación diferencial de variables separables
   b. $y' = x^2y^2 + senx$ es una ecuación diferencial lineal
   c. $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$ es una ecuación diferencial homogénea

Nombre y Apellidos: Núm.

Nota: La respuesta no se considerará correcta si no hay justificación.
Nota: No hay que resolver la ecuación

Apartado 1)

Al pedir todas, se piden también las soluciones singulares.

Se tiene que

$$(y+1)dx = -e^x dy \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{e^x} = -\dfrac{dy}{y+1} \Rightarrow \boxed{-e^{-x} = \log|y+1| + C} \\ \boxed{y=-1} \end{cases}$$

En el caso de la otra ecuación, al ser exacta se busca una función $u(x,y)$ de forma que

$$du(x,y) = xdy + (y-x^2)dx \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} u_x = y - x^2 \Rightarrow u(x,y) = yx - \dfrac{x^3}{3} + h(y) \\ u_y = x \end{cases}\right\} \Rightarrow x + h'(y) \Rightarrow h(y) = A$$

$$\Rightarrow \boxed{yx - \frac{x^3}{3} + C = 0}$$

Apartado 3)

a) No es de variables separadas.
b) No es lineal
c) No es homogénea

Ver teoría para la definición de cada uno de los tipos de ecuaciones diferenciales.

3

Dada la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ encontrar razonadamente la condición que debe cumplirse para que admita un factor integrante dependiente de y. Resolver la EDO

$$(y\log y + ye^x)dx + (x + y\cos y)dy = 0$$

Nota: La primera parte se ha justificado en clase y su desarrollo aparece tambien en la guía del tema 4.

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} dy}$$

Para resolver la ecuación diferencial consideramos el factor integrante

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\log y + 1 + e^x - 1}{y(\log y + e^x)} dy} = e^{-\int \frac{1}{y} dy} = e^{-\log y} = \frac{1}{y}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por este factor integrante quedará

$$\left(\log y + e^x\right) dx + \left(\frac{x}{y} + \cos y\right) dy = 0$$

Se busca una función $u(x, y)$ de forma que $du = \left(\log y + e^x\right) dx + \left(\frac{x}{y} + \cos y\right) dy = 0$

$$u_x = \log y + e^x \qquad (1)$$

$$u_y = \frac{x}{y} + \cos y \qquad (2)$$

De (1) se obtiene

$$u = x \log y + e^x + h(y)$$

Aplicando (2)

$$\cancel{\frac{x}{y}} + h'(y) = \cancel{\frac{x}{y}} + \cos(y) \Rightarrow h(y) = sen(y) + A$$

La solución de la ecuación diferencial es por tanto, $x \log y + e^x + seny = C$

4

Sabemos que un material radiactivo se desintegra proporcionalmente a la cantidad existente en cada momento. En una prueba realizada con 60 mg de este material se observó que después de 3 horas quedaba un 80% de esta masa. Hallar

1. La función que expresa la cantidad de masa restante cuando ha transcurrido un tiempo t
2. ¿Qué cantidad queda cuanto t=5 horas?
3. ¿En qué instante la cantidad de material es de ¼ de la cantidad inicial?

Nota: Ver práctica 8, ejercicio 2 y 4 hechos en clase.

Se denota por Q la cantidad de material en miligramos de la sustancia en el instante t. La ecuación diferencial que describe la desintegración es

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ \quad , \; Q(0) = 60$$

Resolviendo la ecuación diferencial quedará:

$$\log Q = -kt + A \;\Rightarrow\; Q(t) = Ce^{-kt}$$

Para obtener la constante C se considera la condicón inicial: $60 = Ce^{-k\cdot 0}$

Como $Q(3) = 60e^{-3k} \Rightarrow 48 = 60e^{-3k} \Rightarrow -3k = \log\left(\frac{48}{60}\right) \Rightarrow k = \frac{-1}{3}\log\left(\frac{4}{5}\right)$

La solución entonces es $Q(t) = 60e^{\frac{1}{3}\log\left(\frac{4}{5}\right)t}$.

Cuando t=5 se tendrá $Q(5) = 60e^{\frac{5}{3}\log\left(\frac{4}{5}\right)} \approx 41.36 \; mg$

El valor de t pedido será el que verifique

$$15 = 60e^{\frac{1}{3}\log\left(\frac{4}{5}\right)t} \Rightarrow \log\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{4}{5}\right)t \Rightarrow t = \frac{-3\log(4)}{\log(4) - \log(5)} \approx 18.6377\, horas$$

5

Resolver el problema $\begin{cases} y'' + y' = f(t) & , \; t > 0 \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 0 \end{cases}$ donde $f(t) = 1$ en $[\pi, 2\pi)$ y $f(t) = 0$ fuera de ese intervalo.

Nota: Ejercicio hecho en clase.

La ecuación diferencial puede escribirse de la forma siguiente:

Nombre y Apellidos: Núm.

$$\begin{cases} y''+y'=U(t-\pi)-U(t-2\pi) \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{cases}$$

Aplicando transformadas de laplace, llamando $Y(s)=\mathcal{L}(y)(s)$

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(y')(s)=sY(s)-0 \\ &\mathcal{L}(y'')(s)=s\mathcal{L}(y')-y'(0)=s^2Y(s) \end{aligned}$$

se tendrá

$$s^2Y(s)+sY(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s}-\frac{e^{-2\pi s}}{s}\Rightarrow Y(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s^2(s+1)}-\frac{e^{-2\pi s}}{s^2(s+1)}$$

Para resolver la ecuación diferencial se calcula la transformada inversa

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{s^2(s+1)}-\frac{e^{-2\pi s}}{s^2(s+1)}\right)=U(t-\pi)g(t-\pi)-U(t-2\pi)g(t-2\pi)$$

Siendo $g(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2(s+1)}\right)$

Teniedo en cuenta que

$$\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s+1}\Rightarrow A(s+1)+Bs(s+1)+Cs^2=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=1,\ C=1,\ B=-C=-1$$

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)=t-1+e^{-t}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} &y(t)=U(t-\pi)g(t-\pi)-U(t-2\pi)g(t-2\pi) \\ &=U(t-\pi)\left(t-\pi-1+e^{-(t-\pi)}\right)-U(t-2\pi)\left(t-2\pi-1+e^{-(t-2\pi)}\right) \end{aligned}$$

Bloque 1 – 12 de Junio de 2019

1

(a) Escribir en coordenadas esféricas las ecuaciones de las superficies:

$$S_1 \equiv z = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \quad S_2 \equiv z = \sqrt{2\left(x^2 + y^2\right)}\ , \quad S_3 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

(b) **Definir**, en coordenadas esféricas, el sólido H comprendido entre los conos S_1 y S_2 y dentro de la esfera S_3 de las superficies del aparado anterior.

(c) **Plantear** la integral para calcular el área de la superficie $z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ que se proyecta sobre el rectángulo [0,2]x[0,2].

(d) Escribe el código Matlab para calcular la integral planteada en el apartado (c) mediante la suma de Riemann de punto medio para una partición 5x5.

2

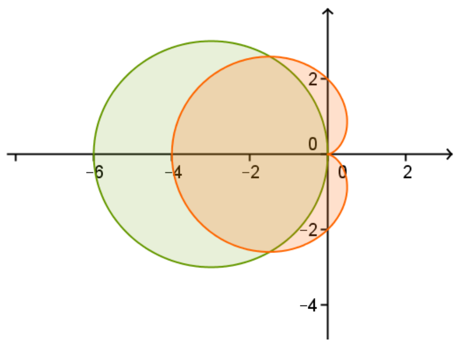
(a) Se considera el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (-x,y)$ en $\mathbb{R}^2$ **justifica** si las siguientes familias de curvas son líneas de flujo o líneas equipotenciales del campo: $xy = k$, $x^2 + y^2 = C$.

(b) Escribe el **código Matlab** para calcular el trabajo que ejerce el campo $\mathrm{F}(x,y) = (2x + 2y, xy)$ sobre una partícula durante el desplazamiento del punto (0,2) al punto (2,0) siguiendo una trayectoria de centro el origen y radio 2.

3

(a) Calcular el área de la región común D limitada por las dos curvas siguientes:

$$r = 2 - 2\cos\theta\ , \ (x-3)^3 + y^2 = 9$$



(b) La región común D indicada en el apartado (a), ¿es un dominio simplemente conexo? Justifica la respuesta.

(c) ¿Se podría aplicar el Teorema de Green al dominio D, su frontera y el campo $\mathbf{F}(x,y) = \left(-\dfrac{1}{x-1}, y\right)$? Justifica la respuesta

Nombre y Apellidos: Núm.

Nombre y Apellidos: Núm.

4

Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = 2x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ hacia el exterior de la esfera unitaria, directamente y aplicando el Teorema de Gauss.

Bloque 2 – 12 de Junio de 2019

1

(a) Resolver la ecuación diferencial: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x - \sqrt{xy}}$.

(b) Sin resolver el problema de valor inicial: $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^5 e^x,\ y(1) = 0$.

¿Podrías saber si el problema tiene solución única? Justifica la respuesta. En caso afirmativo encuentra la solución.

2

Escribir, utilizando el método de coeficientes indeterminados, una solución particular y_p de la ecuación $y'' + 2y' - 3y = g(x)$ para los siguientes valores de $g(x)$:

a) $7\cos 3x$ b) $5e^{-3x}$ c) $x^2 \cos \pi x$ d) $2xe^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x$

Resolver para el caso b) utilizando el método de variación de constantes y de coeficientes indeterminados.

3

a) Calcular, utilizando la definición, la transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{at}$, t>0, indicando su abscisa de convergencia.

b) Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{5}{s}\left(1 - e^{-3s}\right)$$

c) Justificar si existe la transformada de Laplace sin calcularla de la función

$$f(t) = \begin{cases} 3 & 0 < t < 1 \\ t^3 & t \geq 1 \end{cases}$$

Nombre y Apellidos: Núm.

Nota: No se pide calcular su transformada en caso de existir

4

(a) Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones de la ecuación no homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

Explica razonadamente si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

- la suma $y_1 + y_2$ es solución de esta misma ecuación, por ser combinación lineal de soluciones.
- La diferencia $y_1 - y_2$ es solución de la ecuación homogénea asociada.

(b) ¿Es homogénea la función $f(x,y) = x\sqrt{xy}\,(y+2x)$? Si lo es determina el orden.

5

La ley de Newton de calentamiento y enfriamiento establece que la razón de cambio de la temperatura de un cuerpo en contacto con otro es proporcional a la diferencia de la temperatura entre ambos. Si se denota por $T(t)$ la temperatura de del cuerpo en estudio y $T_e(t)$ la temperatura de otro cuerpo en contacto con él (en muchos casos la temperatura ambiente que rodea al cuerpo) entonces la ley de Newton queda establecida por medio de la ecuación diferencial siguiente $\frac{dT(t)}{dt} = k\left(T_e(t) - T(t)\right)$ siendo k la constante de proporcionalidad.

Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de 20ºC se deja caer en un recipiente de agua hirviendo. Se pide escribir el **código Matlab** para:

- Calcular el tiempo que dicha barra tardará en alcanzar los 90ºC si su temperatura aumenta en 2º en el primer segundo.
- ¿Cuál será la temperatura de la barra al cabo de 45 segundos?
- ¿Cuánto tardará la barra en alcanzar los 98ºC?

- Ver ejercicio práctica X