Nombre y Apellidos: Núm.

Seguimiento 13 marzo de 2018

1

(a) Se considera el sólido cuyos puntos son exteriores al cono $z=\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$ e interiores a la esfera $x^2+y^2+z^2=3$ y que se encuentran en el primer octante. Este sólido tiene una densidad variable, igual a la distancia de cada punto al plano $z=0$. Plantear la expresión que permitiría calcular la densidad media del sólido.

(a) Escribir el código Octave/Matlab que aproxime a la temperatura de la placa

$$D=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 \;/\; -\sqrt{2}\le x\le 0,\quad -x\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$$

mediante una suma de Riemann siendo la función temperatura $T\left(x,y\right)=e^{xy^2}$.

Nota: Escribe la expresión de la suma utilizada.

2

1) Dado el campo $\mathbf{F}=\left(y,x^2\right)$

   a. Escribir el código Octave/Matlab para representar 10×16 vectores del campo $\mathbf{F}=\left(y,x^2\right)$ en puntos del rectángulo $[1,3]\times[2,5]$ junto con una muestra de 10 lineas de fuerza de ecuación $2x^3-3y^2=C$

   b. Demostrar a mano que las curvas $2x^3-3y^2=C$ son líneas de fuerza del campo.

2) Escribir el código Octave/Matlab para representar el arco $\left(\cos^3 t,\operatorname{sen}^3 t,t\right)$, para $t\in\left[0,\pi\right]$ y 8 vectores del campo $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(x^2+y,-x,2\right)$ sobre dicho arco.

Seguimiento 20 marzo de 2018

1

(a) Escribe el código Matlab para representar una porción T del plano tangente a la superficie $f\left(x,y\right)=9+0.1x^3+0.2y^3$ en el punto (1,2) sobre el rectángulo R siguiente $\left[1,4\right]\times\left[2,5\right]$.

(b) Calcula el área de T y el área de R.

Nombre y Apellidos: Núm.

Seguimiento 27 marzo de 2018

1

Dados los siguiente elementos:

- la superficie S definida por $z=\sqrt{x^2+y^2}$ con $z\le a$
- el sólido H encerrado por la superficie S y el plano $z=a$
- el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\mathbf{k}$
- la función temperatura $T(x,y,z)=x^2+y^2+az^2$

se pide plantear[1] las integrales que permitan calcular:

(a) La temperatura total de H.
(b) La temperatura total de S.
(c) El flujo saliente del campo a través de S.
(d) El flujo saliente del campo a través de la frontera de H.

Bloque 1

1

Se considera el sólido H limitado inferiormente por $z=1+2(x^2+y^2)$ y superiormente por $z=3+x^2+y^2$. Este sólido está sometido a una temperatura variable, proporcional a la distancia de cada punto al plano $z=0$, con constante de proporcionalidad $k=1.2$. Se pide

(a) calcular la temperatura media del sólido.
(b) Determinar los puntos de H que están a temperatura media

- Este ejercicio es similar a los propuestos números 18 a 22 del tema 1 realizados en clase.

Para plantear las integrales triples, definimos previamente el sólido en coordenadas cilíndricas. Sabemos que la variación de la coordenada z es:

$$1+2(x^2+y^2)\le z\le 3+x^2+y^2 \quad\rightarrow\quad 1+2r^2\le z\le 3+r^2$$

Para saber cuál es la variación de las coordenadas r y θ en el plano XOY, hacemos la intersección de los dos paraboloides,

[1] Escribir la integral que permita realizar el cálculo como integral simple, doble o triple.

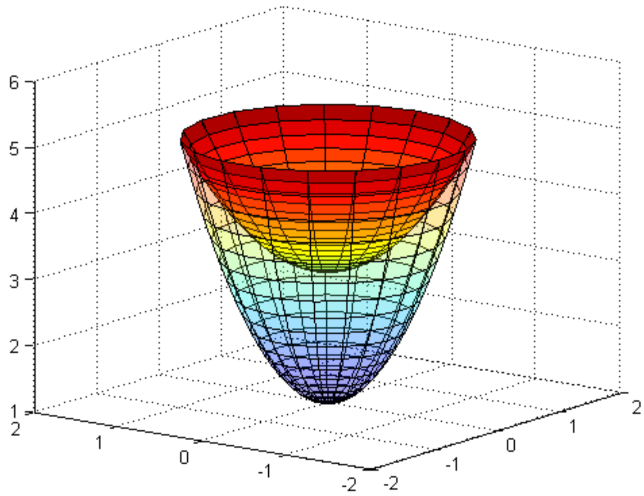
Nombre y Apellidos: Núm.

$$\left.\begin{array}{l} z = 1 + 2(x^2 + y^2) \\ z = 3 + (x^2 + y^2) \end{array}\right\} \rightarrow \ x^2 + y^2 = 2$$

Es decir, el sólido se proyecta en el círculo de centro $(0,0)$ y radio $r_0 = \sqrt{2}$

Por lo tanto, la definición de dicho sólido es:

$$H = \left\{ 1 + 2r^2 \le z \le 3 + r^2, \ 0 \le r \le \sqrt{2} \ , \quad 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$$



Aplicando estos límites, el volumen es:

$$Vol = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{1+2r^2}^{3+r^2} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r\left(2 - 2r^2\right) dr d\theta = 2\pi \left(r^2 - \frac{r^4}{4} \right)_{r=0}^{r=\sqrt{2}} = 2\pi$$

La función temperatura es

$$T(x,y,z) = 1.2z \quad \rightarrow \quad T(r,\theta,z) = 1.2z$$

Y la temperatura media es

$$Temp = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{1+2r^2}^{3+r^2} \left(1.2z\right) r dz dr d\theta = 1.2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \left(-\frac{3r^5}{2} + r^3 + 4r \right) dr d\theta =$$

$$= 1.2 \int_0^{2\pi} \left(-\frac{r^6}{4} + \frac{r^4}{4} + 2r^2 \right)_{r=0}^{r=\sqrt{2}} d\theta = 1.2 \int_0^{2\pi} \left(-2 + 1 + 4\right) d\theta = 1.2 \cdot 6\pi$$

$$\rightarrow \quad T_m = \frac{Temp}{Vol} = \frac{1.2 \cdot 6\pi}{2\pi} = 3.6$$

Los puntos del sólido que están a temperatura media son los que verifican

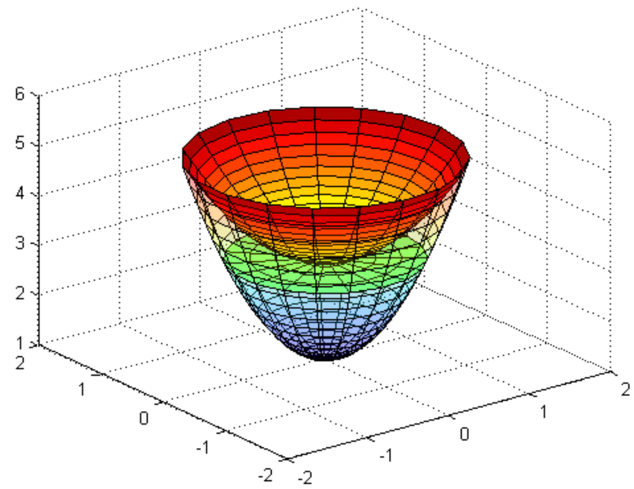
Nombre y Apellidos: Núm.

$$1.2\,z = 1.2\cdot 3 \Rightarrow z = 3$$

Con el paraboloide $z = 3 + x^2 + y^2$ solo corta en el punto (0,0,3). Con el otro paraboloide,

$$3 = 1 + 2(x^2 + y^2) \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + y^2 = 1$$

corta en los puntos de la circunferencia unidad. Por lo tanto los puntos a temperatura media están en un disco de radio 1, situad0 en el plano $z = 3$.



2

(a) Se considera $\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$. Se pide representar la región D e intercambiar los límites de integración.

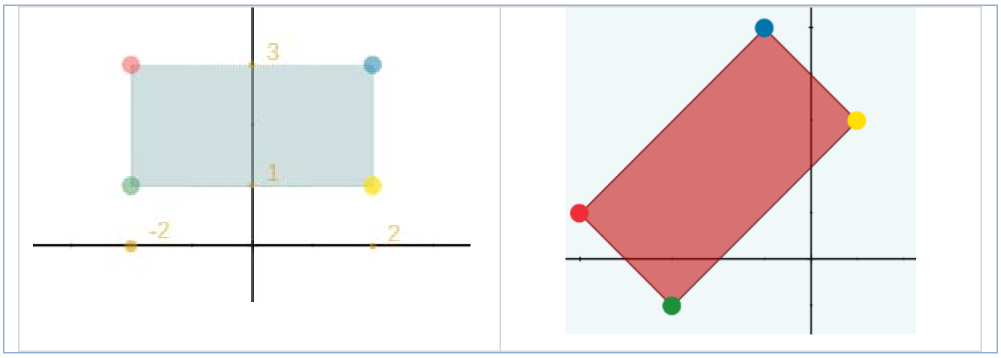
(b) Determinar si el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+1)\mathbf{i} + (z-2xy)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ es conservativo en el rectángulo $[-1,1]\times[-1,1]$. Si es posible determinar las curvas equipotenciales.

(c) Calcula la relación que existe entre las áreas de R y S que se muestran a continuación sabiendo que S es la transformación de R mediante

$$u = x - y$$
$$v = x + y$$

Región R (plano XY)	Región S (plano UV)

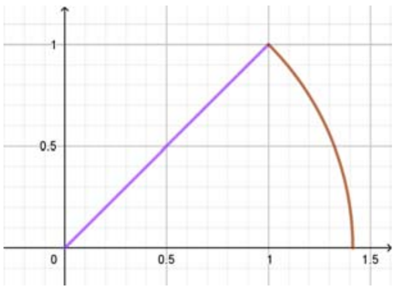
Nombre y Apellidos: Núm.



- El apartado a) es similar al 3 del tema 1 realizado en clase.
- El apartado c) está hecho en clase.

Apartado a)

El dominio D es



La integral quedará

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dydx + \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dydx$$

Apartado b)

El $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+1)\,\mathbf{i} + (z-2xy)\,\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ es de clase C^∞ en el rectángulo

Como

$$\operatorname{rot}\ \mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2+1 & z-2xy & y \end{vmatrix} = -2y\,\mathbf{k}$$

el campo no es conservativo en el rectángulo.

Nombre y Apellidos: Núm.

Apartado c)

La proporción entre las áreas es el jacobiano de la transformación

$$\acute{a}rea(S) = \acute{a}rea(R)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \acute{a}rea(R)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\ \acute{a}rea(R)$$

3

Hallar el valor de la integral $\oint_C -y^2dx + zdy + xdz$, siendo C el triángulo situado en el plano $2x + 2y + z = 6$ intersecado por los planos coordenados .

- Este ejercicio es el propuesto 18 número del tema 3. Realizado en clase el día 28 de marzo de 2018.

Aplicando el Teorema de Stokes y llamando

- S al triángulo encerrado por C
- $\mathbf{F}(x,y,z) = -y^2\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

se tiene que:

$$\oint_C -y^2dx + zdy + xdz = \iint_S rot\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

Como

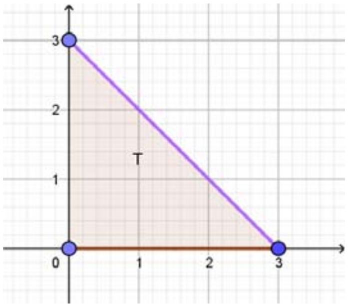
$$\text{rot }\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{j}$$

$$\mathbf{N} = (2,2,1)$$

se tiene

$$I = \oint_C -y^2dx + zdy + xdz = \iint_S rot\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_T (-4 + 2y)\,dA$$

Nombre y Apellidos: Núm.



$$I = \int_0^3 \int_0^{3-x} \left(-4+2y\right) dy dx = \int_0^3 \left[-4y + y^2\right]_{y=0}^{y=3-x} dx = \int_0^3 \left[y\left(-4+y\right)\right]_{y=0}^{y=3-x} dx =$$

$$= \int_0^3 \left(-3-2x+x^2\right) dx = \left(-3x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right)_{x=0}^{x=3} = -9$$

4

Dados los siguientes elementos:

- la superficie S definida por $z = \sqrt{x^2+y^2}$ con $z \leq 3$
- el sólido H encerrado por la superficie S y el plano $z = 3$
- el campo vectorial $\mathbf{F}\left(x,y,z\right) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
- la función temperatura $T\left(x,y,z\right) = x^2 + y^2 + 3z^2$
- la curva C definida por $x^2 + y^2 = 2$ que se encuentra en el plano z=0

se pide calcular:

a) La temperatura total de S.
b) El flujo saliente del campo a través de S.
c) El flujo saliente del campo a través de la frontera de H
d) El área de la cortina vertical que se apoya sobre la curva C y cuya altura es la función escalar T en cada punto de C.

- Este ejercicio es idéntico al realizado en la prueba de seguimiento del día 27 de marzo y resuelto en clase de tutorías.

(a) Temperatura total de S

$$T\_total = \iint_S T\left(x,y,z\right) dS = \iint_D T\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dA =$$

Nombre y Apellidos: Núm.

$$= \iint_D 4\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dA = \iint_D 4\left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}\,dA =$$

$$= \int_0^3\int_0^{2\pi} 4\sqrt{2}\,r^3 d\phi\,dr = 8\sqrt{2}\pi\int_0^3 r^3 dr = 3^4\cdot 2\sqrt{2}\pi$$

(b) Flujo saliente

$$Flujo = \iint_S \mathbf{F}\left(x,y,z\right)\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D \mathbf{F}\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\mathbf{N}dA =$$

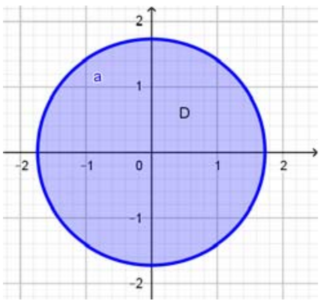
$$= \iint_D \left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)dA =$$

$$= \iint_D 0\,dA = 0$$

(c) El flujo saliente del campo a través de la frontera de H

Teniendo en cuanta que H se puede expresar como

$$\left(x,y\right)\in D,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 3$$



$$flujo = \iiint_H div\mathrm{F}\,dV = 3\cdot Volumen\left(cono\right) = 3\,\frac{\pi\cdot 3^2\cdot 3}{3} = 27\pi$$

Calculando la integral triple

$$flujo = \iiint_H div\mathrm{F}\,dV = \int_{-3}^{3}\int_{\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3+x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} 3\,dz\,dy\,dx$$

Nombre y Apellidos: Núm.

$$= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_r^3 3r\, dz\, d\phi\, dr = \int_0^3 \int_0^{2\pi} 3r\left(3-r\right)\, d\phi\, dr = 2\pi\left(\frac{9r^2}{2} - r^3\right]_{r=0}^{r=3} = 27\pi$$

(d) Área

El área es la de un cilindro de base una circunferencia de centro (0,0) y radio $\sqrt{2}$ y altura $T\left(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}sent, 0\right) = 2$. Es decir $2\pi\sqrt{2}\cdot 2 = 4\sqrt{2}\pi$.

Otra forma sería calculando el área mediante una integral de línea:

$$\left.\begin{array}{l} x\left(t\right) = \sqrt{2}\cos t \\ y\left(t\right) = \sqrt{2}\, sen\, t \\ t \in \left[0, 2\pi\right] \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} x'\left(t\right) = -\sqrt{2}sent \\ y'\left(t\right) = \sqrt{2}\cos t \\ ds = \sqrt{x'\left(t\right)^2 + y'\left(t\right)^2}\, dt = \sqrt{2} \end{array}\right\}$$

$$T\left(x, y\right)_C = 2$$

se tiene

$$Área = \int_C T\left(x, y, 0\right) ds = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2} dt$$

Bloque 2

Transformadas de Laplace

$$\mathfrak{L}\left(U\left(t\right)\right) = \frac{1}{s}\ \left(s > 0\right) \qquad \mathfrak{L}\left(e^{at}\right) = \frac{1}{s-a}\ \left(s > a\right)$$

$$\mathfrak{L}\left(sen\left(at\right)\right) = \frac{a}{s^2 + a^2}\ \left(s > 0\right) \qquad \mathfrak{L}\left(\cos\left(at\right)\right) = \frac{s}{s^2 + a^2}\ \left(s > 0\right)$$

1

(a) Dada la ecuación diferencial $y' = \cos x - y$. Se pide

- Encontrar la solución general
- Justifica si se verifica el teorema de existencia
- Representar la isoclina de pendiente cero.

Nombre y Apellidos: Núm.

(b) Calcula la transformada inversa de Laplace de $F(s)=\dfrac{1}{(s-1)^2+4}$ demostrando la propiedad utilizada.

(c) Hallar la ecuación diferencial de segundo orden cuya solución general es la familia de curvas $y=C_1e^{2x}\cos 3x+C_2e^{2x}sen3x$

Observaciones
(a.3) Ver práctica 7.
(b) Ejemplo hecho en clase.
(c) Ver ejercicio resuelto de la página 3 del cuaderno de actividades del tema de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Apartado a.1)

Es una ecuación lineal. La solución general del homogeneo es

$$y'+\mathrm{y}=0\rightarrow\frac{dy}{y}=-dx\rightarrow\log|y|=-x\rightarrow y_H=ce^{-x}$$

Para encontrar la solución particular de la completa se considera $y_p=C(x)e^{-x}$. Como se tiene que cumplir

$$C'(x)e^{-x}-C(x)e^{-x}=\cos(x)-C(x)e^{-x}\rightarrow C'(x)e^{-x}=\cos(x)\rightarrow$$

$$C(x)=\int \mathrm{e}^{x}\cos(x)\,dx=\frac{e^x}{2}\left(\cos(x)+sen(x)\right)$$

Por lo tanto, $y_p=C(x)e^{-x}=\dfrac{\cos x+senx}{2}$. La solución general es

$$y=y_H+y_p=ce^{-x}+\frac{\cos x+senx}{2}$$

Nota: Al ser una ecuación lineal $y'+p(x)y=q(x)$ también se puede resolver como exacta utilizando el factor integrante $\mu(x)=e^{-\int p(x)dx}=e^{-x}$

Nombre y Apellidos: Núm.

Apartado a.2)

Como tanto $f(x,y)=\cos x - y$ como $f_y'(x,y)=-1$ son funciones continuas en todo el plano, existe solución única de la ecuación cumpliendo $y(x_o)=0$ para cualquier x_o. Es decir, para cada punto del plano pasa una solución y sólo una.

Apartado a.3)

La isoclina de pendiente 0 es $y'=h(x,y)=0 \to \cos x - y = 0$

Apartado b)

Se tiene que

$$\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2+4}\right)=\frac{1}{2}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right)=\frac{1}{2}\mathfrak{L}^{-1}\left(F(s-1)\right)=\frac{1}{2}e^t sen(2t)$$

La propiedad utilizada es

$$\mathfrak{L}\left(e^{at}f(t)\right)=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt=F(s-a) \qquad F(s)=\mathfrak{L}\left(f(t)\right)$$

Apartado c)

$\left\{e^{2x}\cos 3x, e^{2x}\operatorname{sen} 3x\right\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial de coeficientes constantes cuyo polinomio característico es

$$\left(r-(2+3i)\right)\left(r-(2-3i)\right)=(r-2)^2+3^2=r^2-4r+13$$

La ecuación diferencial es

$$y''-4y'+13=0$$

2

(a) Encuentra la solución general y las soluciones singulares de la ecuación diferencial $\left(3x^2-y^2\right)y'=2xy$

(b) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial $x^2y''+2xy'-2y=0$ sabiendo que $y_1(x)=x$ es solución.

Nombre y Apellidos: Núm.

Observaciones:

(a) Este ejercicio es el 11b) propuesto del tema de ecuaciones diferenciales de orden 1. Hecho en clase.

(b) Este ejercicio es el 9b) propuesto del tema de ecuaciones diferenciales de orden 2. Hecho en clase.

Apartado a)

Es homogénea, consideramos el cambio $y = zx \to y' = z'x + z$, se tendrá

$$\left(3 - z^2\right)\left(z'x + z\right) = 2z \to \left(3 - z^2\right)z' = 2z - z\left(3 - z^2\right) \to$$

$$\to \left(3 - z^2\right)z' = -z + z^3 \to \frac{\left(3 - z^2\right)}{z\left(z^2 - 1\right)}dz = dx \quad si\ z \neq 0, \pm 1$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\left(3 - z^2\right)}{z\left(z^2 - 1\right)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 1} + \frac{C}{z + 1} \to \begin{cases} A\left(z - 1\right)\left(z + 1\right) + Bz\left(z + 1\right) + Cz\left(z - 1\right) = 3 - z^2 \\ A = -3, \;\; B = 1, \; \mathrm{C} = -1 \end{cases}$$

Integrando la expresión

$$\int \frac{\left(3 - z^2\right)}{z\left(z^2 - 1\right)}dz = \int dx$$

$$\int \frac{-3}{z}dz + \int \frac{1}{z - 1}dz + \int \frac{1}{z + 1}dz = \int dx$$

se obtiene como solución general

$$\log\left|z^2 - 1\right| - 3\log\left|z\right| = \log\left|x\right|$$

$$\frac{z^2 - 1}{z^3} = Cx \to \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = C\frac{y^3}{x^2} \to y^3 = C\left(y^2 - x^2\right)$$

Las soluciones singulares son $y = x,\ y = -x$, que se obtienen de considerar las soluciones de la ecuación diferencial no incluidas en la solución general a partir de $z = 0, z = 1,\ z = -1$.

Apartado b)

Se trata de una ecuación diferencial lineal de orden 2. Conocida $y_1(x) = x$, se considera $y_2(x) = C(x)x$. Se cumplirá que

$$y'_2(x) = C'(x)x + C(x)$$
$$y''_2(x) = C''(x)x + 2C'(x)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$x^2 y_2'' + 2xy_2' - 2y_2 = 0 \to x^2\left(C''(x)x + 2C'(x)\right) + 2x\left(C'(x)x + C(x)\right) - 2xC(x) = 0$$

$$x^3C''(x) + C'(x)\left(2x^2 + 2x^2\right) = 0 \to \frac{C''(x)}{C'(x)} = \frac{-4}{x}$$

$$\log C'(x) = -4\log x \to C'(x) = \frac{1}{x^4} \to C(x) = \frac{1}{x^3}$$

Por lo tanto, $y_2 = C(x)x = \frac{1}{x^3}x = \frac{1}{x^2}$, la solución general es $y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1x + \frac{C_2}{x^2}$.

3

Al suspender una masa cuyo peso es 29.4 N de cierto resorte se alarga 0.6125 metros desde su longitud natural. A partir del reposo, en el momento t=0, la masa se pone en movimiento aplicándole una fuerza externa $f(t) = 2$, pero en el instante $t = 4$ esa fuerza cesa súbitamente, permitiendo que la masa continúe su movimiento. Si se desprecia la fricción, determinar la función de posición resultante para la masa.

La ecuación diferencial que rige el movimiento de la masa es

$$3y'' + 48y = \begin{cases} 2 & 0 < t < 4 \\ 0 & 4 \le t \end{cases} \qquad y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$$

Durante la última semana de clase, tanto en las clases de aula como en la práctica 9 realizada en el aula de ordenador, hemos resuelto ejercicios similares.

Nombre y Apellidos: Núm.

La posición $y(t)$ de la masa en el tiempo t se rige por la ecuación diferencial

$my''(t)+cy'+ky=f(t)$

Donde m es la masa del objeto, c es la constante de fricción y k es la constante de fuerza del resorte y $F(t)$ la fuerza externa aplicada. En este caso la masa es

$m=\dfrac{29,4}{9,8}=3kg$

y la constante es $k=\dfrac{F}{\Delta l}=\dfrac{29,4}{0.6125}=48N/m$. Como no hay fricción $c=0$.

Así, la ecuación diferencial que rige el movimiento de la masa es

$$3y''+48y=\begin{cases}2 & 0<t<4\\ 0 & 4\le t\end{cases}$$

Aplicando transformadas de Laplace

$$3\mathfrak{L}(y'')+48\mathfrak{L}(y)=\mathfrak{L}\left(2\left(U(t)-U(t-4)\right)\right)$$

$$3s^2\mathfrak{L}(y)+48\mathfrak{L}(y)=2\frac{1-e^{-4s}}{s}$$

$$\mathfrak{L}(y)=\frac{2\left(1-e^{-4s}\right)}{3s\left(s^2+16\right)}$$

Como

$$\frac{2}{3s\left(s^2+16\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+16}\to A=\frac{1}{24},B=-\frac{1}{24},C=0$$

se tiene que

$$y(t)=\frac{1}{24}\mathfrak{L}^{-1}\left(\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+16}\right)-e^{-4s}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+16}\right)\right)=$$

$$y(t)=\frac{1}{24}\left(U(t)-\cos(4t)+U(t-4)-U(t-4)\cos\left(4(t-4)\right)\right)$$

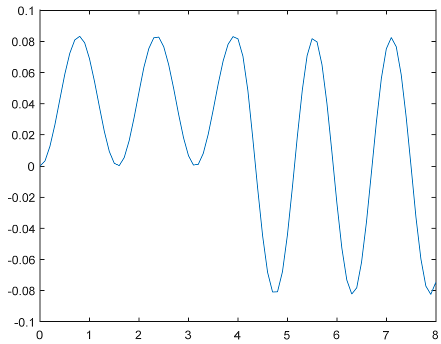
Aunque el ejercicio no lo pide, el cálculo con Matlab que permite representar la solución de la ecuación diferencial

Nombre y Apellidos: Núm.

```
t=0:0.1:8;
y=1/24*heaviside(t).*(1-cos(4*t))-1/24*heaviside(t-4).*(1-cos(4*(t-4)))
plot(t,y)
```

Para calcular la solución de forma simbólica el código sería

```
solu=dsolve('3*D2y+48*y==2*(heaviside(t)-heaviside(t-4))','y(0)=0','Dy(0)=0','t')
```



Bloque 1 – 13 de Junio

1

Se considera el sólido H cuyos puntos son exteriores al cono $z=\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}$ e interiores a la esfera $x^2+y^2+z^2=16$ con $z\geq 0$. Este sólido tiene una densidad variable, igual a la distancia de cada punto al plano $z=0$. Se pide:

(a) Calcula la densidad media del sólido.

(b) Obtener los puntos del sólido que tienen densidad media.

(c) Escribir el código Matlab para representar el sólido H.

(d) Representar los puntos que se encuentran a densidad media.

2

Calcula la integral $\oint_C 2y\,dx+3x\,dy-z^2dz$, siendo C la circunferencia intersección de la semiesfera superior S de ecuación implícita $x^2+y^2+z^2=9$ con el plano $z=0$

Nombre y Apellidos: Núm.

3

(a) Invierte el orden de integración de la siguiente integral: $\int_0^{27}\int_{y/12}^{\sqrt{y/3}} f(x,y)\,dxdy$ dibujando el dominio de integración.

(b) Calcular el valor de la integral $\oint_C (x+y)^2 dx-(y^2-x^2)dy$, siendo *C* el triángulo de vértices $(0,-1)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

(c) ¿Para qué valor del parámetro *a* el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=(a\,x\,y-z^3)\mathbf{i}+(a-2)x^2\mathbf{j}+(1-a)\,x\,z^2\,\mathbf{k}$ es el gradiente de una función potencial?

(d) Plantea la integral que permite calcular la superficie de ecuación $z=16-x^2-y^2$, situada en el primer octante sobre el interior de la curva $x^2+y^2-2x=0$

Bloque 2 – 13 de Junio

Transformadas de Laplace

$$\mathfrak{L}(U(t))=\frac{1}{s}\ (s>0) \qquad \mathfrak{L}(e^{at})=\frac{1}{s-a}\ (s>a) \qquad \mathfrak{L}(t)=\frac{1}{s^2}\ (s>0)$$

$$\mathfrak{L}(sen(at))=\frac{a}{s^2+a^2}\ (s>0) \qquad \mathfrak{L}(\cos(at))=\frac{s}{s^2+a^2}\ (s>0)$$

4

(a) Dada la función $f(t)=\begin{cases} t & si\quad 0\le t<2 \\ 2t-6 & si\quad 2\le t<3 \\ 0 & si\quad t\ge 3\end{cases}$, se pide:

- Demostrar que cumple las condiciones suficientes para que exista su transformada de Laplace.
- Calcular la transformada de Laplace utilizando la definición y obteniendo la abscisa de convergencia.

(b) Encontrar **todas** las soluciones de las siguiente ecuación diferencial $2x^2y\,dy=(1+x^2)\,dx$

Nombre y Apellidos: Núm.

5

Resolver la siguiente ecuación diferencial $y''+4y=f(t)$ con

$y(0)=y'(0)=0$ siendo $f(t)=\left\{\begin{array}{ccc} 0 & si & 0\leq t<3 \\ t & si & 3\leq t \end{array}\right\}$

Nombre y Apellidos: Núm.

6

(a) Determinar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas

$2x^2 + y^2 = 4Cx$

(b) Prueba que $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^3$ son solución del siguiente problema de valor inicial:

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

¿Se contradice en este ejemplo el teorema de existencia y unicidad? ¿Por qué?

(c) Resolver la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = 10e^{-2t}\cos t$

10+5+10