Prácticas Cálculo II

Práctica 6 (27- III-2018)

Objetivos

- Profundizar en la comprensión de la integral de superficie de un campo vectorial mediante la aplicación al cálculo del flujo.
- Utilizar representaciones gráficas como apoyo para la comprensión de conceptos.

Integral de flujo: La integral del campo vectorial $\mathbf{F} = (M, N, P)$ sobre la superficie S definida como $z = f(x, y)$ en D como la integral de superficie del campo escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D (-Mf_x' - Nf_y' + P) dA$$

en el caso en el que $\mathbf{n}$ sea el vector normal unitario que apunta en la dirección del eje OZ positivo.

Ejercicio 1

Integral de superficie de un campo vectorial (integral de flujo)

Se considera la superficie S correspondiente a la porción del paraboloide $z = a^2 - x^2 - y^2$ para x, y, z positivos; a es un número real no nulo. Un campo vectorial $\mathbf{V}$ depende de a de la siguiente forma:

$$\mathbf{V}\left(x, y, z\right) = ax\mathbf{i} - \frac{2}{a} y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Se pide:

(a) Representa con Octave/Matlab la superficie para el valor de $a = 1$

(b) Representa con Octave/Matlab una muestra del campo y de vectores normales a la superficie.

(c) Calcula a mano el flujo de V hacia el exterior de S.

(d) Analiza el comportamiento del flujo en función del parámetro a. ¿Es creciente el flujo con el valor de a?. ¿Existe un valor mínimo para el flujo? Representa la función flujo en función de a en el intervalo $a \in \left[-2, 1\right]$.

Solución

Este ejercicio es el propuesto número 12 del tema 3

(c) $Flujo = \dfrac{\pi a^3}{8}\left(a^2 + a - 2\right)$

Apartados a) y b)

Para dibujar la superficie y una muestra de vectores velocidad y vectores normales sobre ella, utilizamos estas ecuaciones paramétricas:

$$x = r\cos t, \quad y = r\,\mathrm{sen}\, t, \quad z = 1 - r^2, \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Código en Matlab para la representación gráfica,

```
%dibujo de la superficie
r=linspace(0,1,30);
t=linspace(0,2*pi,40);
[R,T]=meshgrid(r,t);
X=R.*cos(T);
Y=R.*sin(T);
Z=1-R.^2;
surf(X,Y,Z)
shading interp
%dibujo de una muestra del campo sobre la superficie
r1=linspace(0,1,10);
t1=linspace(0,2*pi,17);
[R1,T1]=meshgrid(r1,t1);
X=R1.*cos(T1);
Y=R1.*sin(T1);
Z=1-R1.^2;
hold on
quiver3(X,Y,Z,X,-2*Y,Z)
%Dibujo de una muestra de vectores normales
quiver3(X,Y,Z,2*X,2*Y,ones(size(X)))
axis equal
hold off
```

Apartado c)

$$Flujo = \iint_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

Tomando x e y como variables independientes, se tiene:

Campo actuando sobre la superficie: $\mathbf{V} = (ax,\ -\frac{2}{a}y,\ a^2 - x^2 - y^2)$

$$\mathbf{n}\, dS = \frac{\mathbf{N}}{\left|\mathbf{N}\right|}\left|\mathbf{N}\right| dA = \mathbf{N}\, dA, \quad (\, dA = dxdy\,)$$

Siendo el vector normal exterior,

$$\mathbf{N} = \left(-z'_x, -z'_y, 1\right) = \left(2x, 2y, 1\right)$$

Efectuando el producto escalar $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$, agrupando términos y sustituyendo en la integral de flujo se obtiene esta integral doble:

$$Flujo = \iint_{D_{xy}} \left((2a-1)x^2 - \left(\frac{4}{a}+1\right) y^2 + a^2 \right) dA$$

siendo D_{xy} el cuadrante de círculo de radio $\left|a\right|$ situado en el primer cuadrante del plano XY.

Resolvemos la integral a mano, utilizando coordenadas polares:

$$Flujo = \iint_{D_{xy}} \left((2a-1)x^2 - \left(\frac{4}{a} + 1 \right) y^2 + a^2 \right) dA =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{|a|} \left((2a-1) r^2 \cos^2\theta - \left(\frac{4}{a} + 1 \right) r^2 \operatorname{sen}^2\theta + a^2 \right) r dr d\theta =$$

$$= \frac{(2a-1)|a|^4}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta - \frac{(4+a)|a|^4}{4a} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta d\theta + \frac{a^2 |a|^2}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\frac{(2a-1)a^4 - (4+a)a^3}{4} + a^4 \right) = \frac{\pi}{16} \left(2a^5 + 2a^4 - 4a^3 \right) = \frac{\pi a^3}{8} \left(a^2 + a - 2 \right)$$

Una vez simplificado obtenemos el mismo valor anterior,

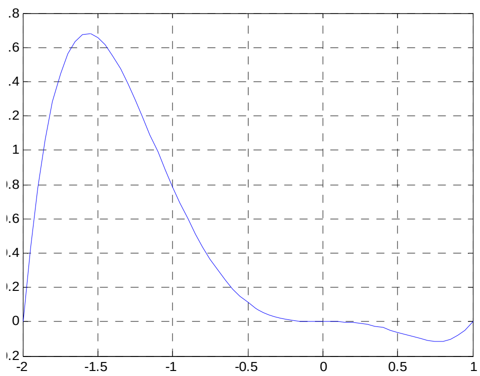
$$F(a) = \frac{\pi a^3}{8} \left(a^2 + a - 2 \right)$$

Apartado d)

Representa el flujo en función del parámetro a, para valores de a en el intervalo $[-2,1]$

```
%gráfica del flujo
figure(2)
av=linspace(-2,1,50);
F=pi*av.^3.*(av.^2+av-2)/8;
plot(av,F)
grid on
```

Se obtiene esta gráfica



Puede observarse que tiene un mínimo.

Para realizar en casa:

Cálculo del Flujo con Octave[1]/Matlab

```
syms a r t
flujo=int(int(((2*a-1)*r^2*cos(t)^2-(4/a+1)*r^2*sin(t)^2+a^2)*r,
r,0,abs(a)),t,0,pi/2)
```

Cálculo de los puntos críticos con Octave/Matlab

Utilizaremos los comandos diff y solve.

```
diff(función, variable)
```

Ejemplo:

```
>> syms x
>> diff(x^2+3,x)
```

```
solve(ecuación,variable)
```

Ejemplo:

```
>> syms x
>> a=solve('x^4 - 5*x^2 + 6*x = 2', x)
```

Utilizando cálculo simbólico se puede obtener los puntos críticos y confirmar si se trata de máximo o mínimo mediante el criterio de la segunda derivada.

```
%Localización de los puntos críticos. Derivamos la función de
flujo obtenida en el primer apartado.
syms a
flujo=pi*a^3/8*(a^2+a-2);
der=diff(flujo,a);
puntos=double(solve(der,a))
%se obtienen los valores: 0  0  0.7662  -1.5662
%Análisis de los puntos críticos mediante la derivada segunda
der2=diff(der,a);
res=subs(der2,a,puntos); %se obtienen estos valores de la derivada
segunda: 0 0 2.6885 -11.2336
%por lo tanto hay un mínimo en 0.7662 y un máximo en -1.5662
%para comprobar el tipo de punto crítico existente en a=0,
calculamos %la derivada tercera
der3=diff(der2,a);
res2=subs(der3,a,puntos(1)); %se obtiene res2=-4.7124, distinto de
cero, por lo tanto hay un punto de inflexión en a=0.
```

[1] Recuerda (ver práctica anterior) que para utilizar cálculo simbólico en Octave debes cargar el paquete symbolic-win-py-bundle-2.2.2 y cargarlo tecleando
>> pkg load symbolic

Ejercicio 2

Interpretación integrales

Dados los siguiente elementos:

- la superficie S definida por $z=\sqrt{x^2+y^2}$ con $z \le a$
- el sólido H encerrado por la superficie S y el plano $z=a$
- el campo vectorial $\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\mathbf{k}$
- la función temperatura $T\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+az^2$

se pide plantear[2] las integrales que permitan calcular:

(a) La temperatura total de H.
(b) La temperatura total de S.
(c) El flujo saliente del campo a través de S.
(d) El flujo saliente del campo a través de la frontera de H.

[2] Escribir la integral que permita realizar el cálculo como integral simple, doble o triple.