TRANSFORMADA DE LAPLACE

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Derivación e integración de funciones de una variable.
- Dibujo de curvas y programación básica con Matlab.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A continuación se presentan los objetivos específicos del Tema 4, indicando en cada uno de ellos los ejercicios propuestos del tema y los ejercicios resueltos de la bibliografía que le corresponden. Las abreviaturas que encabezan cada línea hacen referencia a los siguientes libros, documentos o bloques de enunciados:

A) *Tomo 4 de la Colección FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS, de Álvarez, Herrero y Ruiz.*
G) *ADVANCED MODERN ENGINEERING MATHEMATICS, de Glyn James; editorial Addison-Wesley.*
C) *ENGINEERING MATHEMATICS: A MODERN FOUNDATION FOR ELECTRONIC, ELECTRICAL AND CONTROL ENGINEERS, de A. Croft; editorial Addison-Wesley.*
K) *MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA, de W. Kaplan; editorial Addison-Wesley Iberoamericana.*
W) *MATEMÁTICAS SUPERIORES PARA INGENIERÍA, de C. Ray Wylie; editorial McGraw-Hill.*
EP) *Enunciados de los ejercicios propuestos de este tema.*
ER) *Ejercicios resueltos de este tema.*
EG) *Ejercicios y actividades en la página del proyecto Giematic, cuya dirección es:*

http://www.giematic.unican.es/index.php/transformada-laplace/material-interactivo

Los objetivos específicos de este tema son:

1. Saber comprobar si una función verifica las condiciones suficientes para que exista su transformada de Laplace.

A	Cap. 4, Sección 4.2, ejemplos 4.1, 4.2 y 4.3
G	Cap. 2, Sección 2.2, ejemplos 2.5 y 2.6
W	Cap. 7, Sección 7.1
EP	1 y 3
ER	1
EG	Ejercicios inmediatos, 7, 8 y 9; Ejercicio 1.

2. Obtener la transformada de Laplace para funciones continuas a trozos y de orden exponencial, aplicando la definición.

A	Cap. 4, Sección 4.2, ejemplo 4.4
G	Cap. 2, Sección 2.2, ejemplos 2.1, 2.2 y 2.3
C	Cap. 20, Sección 20.2, ejemplo 20.1

K Cap. 4, Sección 4.2, ejemplos 1, 2 y 3

W Cap. 7, Secciones 7.3 y 7.4

EP 2, 3 y 4

ER 3

EG Ejercicios inmediatos, 14.

3. Calcular transformadas de Laplace utilizando propiedades y tablas.

A Cap. 4, Sección 4.3, ejemplo 4.5

G Cap. 2, Secciones 2.2 y 2.3; ejemplos 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13 y 2.22

C Cap. 20, Secciones 20.3 y 20.4, ejemplos 20.2, 20.3, 20.4, 20.5, 20.6, 20.7, 20.8, 20.9, 20.10 y 20.11

K Cap. 4, Sección 4.3, ejemplos 1, 2, 3, 4, 5 y 6

W Cap. 7, Sección 7.2

EP 5, 7 y 10

ER 4, 5 y 11

EG Ejercicios inmediatos, 10; Ejercicio 2.

4. Utilizar las funciones de Heaviside para definir analíticamente funciones continuas a trozos y hallar su transformada de Laplace.

G Cap. 2, Sección 2.5, ejemplos 2.32, 2.33, 2.34, 2.35, 2.36 y 2.37

W Cap. 7, Sección 7.4

EP 7, 8 y 9

ER 2

EG Ejercicios inmediatos, 6

5. Hallar la transformada de Laplace de funciones periódicas.

G Cap. 2, Sección 2.5, ejemplo 2.42

C Cap. 20, Sección 20.13.2, ejemplo 20.35

W Cap. 7, Sección 7.6

EP 11

EG Ejercicio 4

6. Calcular transformadas inversas de Laplace, utilizando la descomposición en fracciones simples y propiedades.

A Cap. 4, Sección 4.4, ejemplos 4.6 y 4.7

G Cap. 2, Sección 2.2, ejemplos 2.16, 2.17, 2.18, 2.19, 2.20 y 2.21

C Cap. 20, Secciones 20.6 y 20.7, ejemplos 20.12, 20.13, 20.14, 20.15 y 20.16

K Cap. 4, Secciones 4.6 y 4.7, ejemplos 1, 2, 3 y 4

EP 13, 14 15

ER 7

EG Ejercicios inmediatos, 12, 13, 15 y 17; Ejercicios 5, 6 y 7.

7. Resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales, de coeficientes constantes, utilizando la transformación de Laplace.

A Cap. 4, Sección 4.5, ejemplos 4.8, 4.9 y 4.10

G Cap. 2, Sección 2.3, ejemplos 2.23, 2.24, 2.25 y 2.26

C Cap. 20, Secciones 20.5 y 20.10, ejemplos 20.21, 20.22, 20.23, 20.24 y 20.25

K	Cap. 4, Sección 4.11, ejemplos 1, 2 y 3
W	Cap. 7, Sección 7.2
EP	16, 17, 18, 19, 20 y 23
ER	9, 10 y 12
EG	Ejercicios 8, 9,10, 11 y 12

TRANSFORMADA DE LAPLACE

1 Definición

La transformada de Laplace es una herramienta útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes con valores iniciales.

Se utiliza también en sistemas de control para obtener la función de transferencia y predecir o analizar el funcionamiento del sistema.

Definición (Transformada de Laplace).- Sea $f\left(t\right)$ una función definida para $t \geq 0$ y tal que $f\left(t\right) = 0$ para $t < 0$. Se llama transformada de Laplace de la función $f\left(t\right)$ a la función:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Siempre que la integral anterior sea convergente.

El proceso inverso de hallar $f\left(t\right)$ a partir de la transformada de Laplace $F(s)$, se denomina transformación inversa de Laplace. La integral que resuelve este problema es la siguiente:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s)e^{st}dt$$

La resolución de esta integral requiere la aplicación de técnicas de variable compleja por lo que en la práctica en el cálculo de transformadas inversas se utilizarán únicamente las propiedades y la tabla.

2 Condiciones suficientes de existencia de la transformada de Laplace

El proceso inverso de hallar $f\left(t\right)$ a partir de la transformada de Laplace $F(s)$, se denomina transformación inversa de Laplace. La integral que resuelve este problema es la siguiente:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(s)e^{st}dt$$

La resolución de esta integral requiere la aplicación de técnicas de variable compleja por lo que en la práctica en el cálculo de transformadas inversas se utilizarán únicamente las propiedades y la tabla.

Las funciones más habituales, tales como los polinomios, las funciones racionales, las funciones trigonométricas, las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas, son todas ellas de orden exponencial.

TEOREMA (de existencia de la transformada de Laplace).- Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$ y tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$. Si $f(t)$ es continua a trozos y además $f(t)$ es de tipo exponencial, entonces existe la transformada de Laplace para valores de s tales que $\mathrm{Re}(s) > \alpha_0$, siendo α_0 la abscisa de convergencia de $f(t)$.

TEOREMA.- Si $f(t)$ verifica las condiciones del teorema de existencia anterior, entonces la función transformada $F(s)$ tiende a cero a medida que s tiende a infinito, es decir

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

TEOREMA DE UNICIDAD.- Si dos funciones continuas, $f(t)$ y $g(t)$, tienen una misma transformada de Laplace, $F(s)$, entonces estas funciones son idénticamente iguales, salvo quizá en puntos de discontinuidad.

Como consecuencia de este teorema, se deduce que si $f(t)$ es una función continua queda determinada de forma única mediante la transformada inversa de Laplace.

3 Propiedades

Propiedad 1 (Linealidad).- Sean $f(t)$ y $g(t)$ tales que $\mathfrak{L}[f(t)]$ existe para $s > \alpha_1$ y $\mathfrak{L}[g(t)]$ existe para $s > \alpha_2$, y sean α y β constantes reales cualesquiera, entonces

$$\mathfrak{L}\left[\lambda f(t) + \mu g(t)\right] = \lambda \mathfrak{L}\left[f(t)\right] + \mu \mathfrak{L}\left[g(t)\right], \quad \forall s > \alpha_0$$

siendo $\alpha_0 = \text{máx}\{\alpha_1, \alpha_2\}$

Propiedad 2 (Multiplicación por la exponencial).- Si a es un número real cualquiera,

$$\mathfrak{L}\left[e^{at} f(t)\right](s) = \mathfrak{L}\left[f(t)\right](s-a) = F(s-a), \quad \forall s > a + \alpha$$

siendo α la abscisa de convergencia de $f(t)$.

Propiedad 3 (Traslación en el tiempo).- Si c *es cualquier número real positivo, se verifica*

$$\mathfrak{L}\left[U\left(t-c\right)f(t-c)\right]=e^{-cs}\mathfrak{L}\left[f(t)\right]=e^{-cs}F\left(s\right),\quad \forall s>\alpha$$

siendo α *la abscisa de convergencia de* $f\left(t\right)$*.*

Propiedad 4 (Derivación de la transformada de Laplace).- Si $F\left(s\right)=\mathfrak{L}\left[f(t)\right]$ *entonces,*

$$\mathfrak{L}\left[t\,f(t)\right]=-F\,'\left(s\right)$$

y, en general,

$$\mathfrak{L}\left[t^{n}f(t)\right]=\left(-1\right)^{n}F^{(n}(s)$$

Propiedad 5 (Integración de la transformada de Laplace).- Si $F\left(s\right)=\mathfrak{L}\left[f(t)\right]$ *y existe* $\underset{t\to 0^+}{\text{lím}}\dfrac{f(t)}{t}$ *entonces,*

$$\mathfrak{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_{s}^{\infty}F(x)dx$$

siempre que esta integral sea convergente.

Propiedad 6 (Trasformada de la derivada).- Si la función $f\left(t\right)$ *y* $f'(t)$ *son continuas y de tipo exponencial para* $t\geq 0$*, entonces*

$$\mathfrak{L}\left[f\,'(t)\right]=sF\left(s\right)-f\left(0\right),\quad s>\alpha$$

Si f *no es continua, pero existe* $f(0^{+})=\lim\limits_{x\to 0^{+}}f(x)$ *se verifica*

$$\mathfrak{L}\left[f\,'(t)\right]=sF\left(s\right)-f\left(0^{+}\right),\quad s>\alpha$$

Propiedad 7 (Trasformada de la integral).- Si existe $\mathfrak{L}\left[f(t)\right]$ *para* $s>\alpha\geq 0$ *, entonces*

$$\mathfrak{L}\left[\int_{0}^{t}f(x)dx\right]=\frac{1}{s}F\left(s\right),\quad s>\alpha$$

Propiedad 8 (Escala).- Si $F(s)=\mathfrak{L}\left[f(t)\right]$ *para* $s>\alpha$*, entonces para cualquier constante real* $a>0$*, se verifica*

$$\mathfrak{L}\left[f(at)\right]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \forall s>\alpha$$

Propiedad 9 (Transformada de funciones periódicas).- Si $f(t)$ *tiene período T, se cumple*

$$\mathfrak{L}\left[f(t)\right]=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt\,, \quad \forall s>\alpha$$

Definición (Convolución).- Se define la convolución de las funciones $f(x)$ *y* $g(x)$*, como la función* $(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,g(t-u)\,du$.

Propiedad 10 (Convolución).- La convolución de dos funciones verifica

$$\mathfrak{L}[f*g]=\mathfrak{L}[f(t)]\cdot\mathfrak{L}[g(t)]=F(s)\cdot G(s)$$

4 Teoremas

A continuación se enuncian dos teoremas que, junto con las propiedades anteriores, son de uso frecuente en el cálculo de transformadas de Laplace.

TEOREMA DEL VALOR INICIAL.- Si $f(t)$ *y* $f'(t)$*, admiten transformada de Laplace, entonces se podrá obtener el valor de* $f(t)$ *en el origen a partir de* $F(s)$ *como,*

$$\underset{t\to 0^+}{\text{lím}}\ f(t)=f(0^+)=\underset{s\to\infty}{\text{lím}}\ sF(s)$$

siempre que exista $\underset{s\to\infty}{\text{lím}}\ sF(s)$.

TEOREMA DEL VALOR FINAL.- Si $f(t)$ y $f'(t)$, admiten transformada de Laplace es posible obtener el valor de $f(t)$ en el infinito a partir de $F(s)$, como

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

siempre que exista $\lim_{t\to\infty} f(t)$.

5 Aplicación: Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

Las ecuaciones diferenciales ordinarias que vamos a resolver mediante transformadas de Laplace son ecuaciones lineales con coeficientes constantes y con condiciones iniciales (*problemas de valor inicial*). Es decir, que, en general, se tendrá una ecuación diferencial del tipo

$$a_n \frac{d^n y}{d t^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d t^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{d t^{n-2}} + \ldots + a_1 \frac{d y}{d t} + a_0 y = f(t)\,, \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

y se buscará la solución $y(t)$ de la ecuación para $t \geq 0$, que satisfaga las "n" condiciones iniciales

$$y(0) = c_0\,, \quad y'(0) = c_1\,, \quad y''(0) = c_2\,, \ldots\ldots, \quad y^{(n-1}(0) = c_{n-1}$$

La importancia de la transformada de Laplace en la resolución de este tipo de ecuaciones se basa en que, mediante su aplicación, una ecuación diferencial se transforma en una ecuación algebraica.

La generalización de la propiedad 6, enunciada anteriormente, marca el camino para esta transformación.

Propiedad 6 generalizada.- Si $y(t)$ y sus n primeras derivadas son continuas y de tipo exponencial para $t \geq 0$, entonces

$$\mathfrak{L}\left[y^{(n}\right] = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - s^{n-3} y''(0) - \ldots - s\, y^{(n-2}(0) - y^{(n-1}(0)$$

Donde se ha utilizado la notación, $Y(s) = \mathfrak{L}\left[y(t)\right]$

El método consiste en:

- Aplicar la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación diferencial.
- Utilizar la propiedad 6 generalizada.
- Despejar la transformada $Y(s)$.
- Finalmente calcular la transformada inversa de $Y(s)$, para obtener la función solución $y(t)$.

Este mismo método se puede aplicar a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Al aplicar transformada de Laplace, estos sistemas quedan convertidos en sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, cuya resolución proporciona las transformadas de Laplace de las funciones incógnitas.

6 Aplicación: Resolución de ecuaciones integrales

Una ecuación integral es aquella en la que la función incógnita $f(t)$ se halla bajo el signo integral. Consideraremos, entre otras, ecuaciones integrales de la forma siguiente

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(u) N(t-u)\, du$$

donde $f(t)$ es la función buscada, mientras que $g(t)$ y $N(t)$ son funciones conocidas.

El método de resolución consiste en aplicar transformadas de Laplace a ambos lados de la igualdad anterior y utilizar la propiedad de la convolución. De esta forma se despeja la transformada de la solución, para finalmente obtener $f(t)$, aplicando la transformada inversa de Laplace.

TRANSFORMADA DE LAPLACE DE FUNCIONES GENERALIZADAS

7 Función delta de Dirac

Definición (Función Delta de Dirac).- La función impulso unidad o delta de Dirac $\delta(t-c)$ *se define como aquella que verifica las dos propiedades siguientes:*

a) $$\delta(t-c) = \begin{cases} 0 & si \;\; t \neq c \\ \infty & si \;\; t = c \end{cases}$$

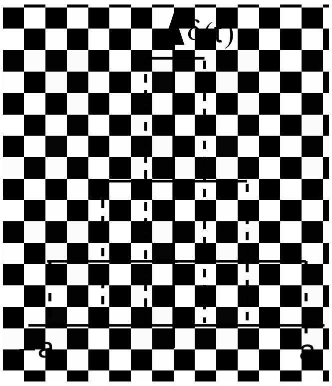
b) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-c)\, dt = 1$$

Modelización de la función Delta de Dirac:

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} f(t,a)$$

donde

$$f(t,a) = \begin{cases} 1/2a & si \;\; |t| < a \\ 0 & si \;\; |t| \geq a \end{cases}$$



PROPIEDAD 1.- Si se denota por $U(t-c)$ *a la función escalón unidad se tiene*

$$\delta(t-c) = U'(t-c)$$

PROPIEDAD 2.- Las funciones generalizadas (en particular la función delta de Dirac y sus derivadas) pueden sumarse, restarse y multiplicarse por constantes.
También es posible el producto de una función ordinaria por una generalizada:

$$\delta(t-c)f(t) = f(t)\delta(t-c) = f(c)\delta(t-c)$$

siempre que f *sea continua en* $t = c$.

PROPIEDAD 2 generalizada.- El producto de una función ordinaria por la derivada de orden n de la función delta, es de la forma

$$f(t)\delta^{(n}(t-c) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f^{(k}(c)\delta^{(n-k}(t-c) \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

siempre que $f,\ f',\ f'',\ldots,f^{(n}$ *sean continuas en* $t = c$.

PROPIEDAD 3.-

i) Si $a < b$, $a \neq c$ y $b \neq c$, entonces

$$\int_a^b \delta(t-c)dt = \begin{cases} 1 & si\ \ a < c < b \\ 0 & si\ \ no \end{cases} \qquad \int_a^b \delta^{(n}(t-c)dt = 0 \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

ii) Si $a < c < b$ y $f^{(n}(t)$ es continua en $t = c$, entonces

$$\int_a^b f(t)\delta^{(n}(t-c)dt = (-1)^n f^{(n}(c) \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

PROPIEDAD 4 (Filtro).- Si f es continua en un intervalo que contiene a $t = c$, *entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-c)dt = f(c)$$

PROPIEDAD 5 (Convolución).- Si f *es una función ordinaria,*

$$\delta^{(n}(t-c) * f(t) = f(t) * \delta^{(n}(t-c) = f^{(n}(t-c) \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Además

$$\delta^{(n_1}(t-c_1) * \delta^{(n_2}(t-c_2) = \delta^{(n_1+n_2}(t-c_1-c_2) \qquad n_1,\ n_2 = 0,1,2,\ldots$$

PROPIEDAD 6.- Si $a \neq 0$, $\delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t)$

7 Transformada de Laplace de funciones generalizadas

Resulta interesante conocer la transformada de Laplace de las funciones generalizadas para aplicar los resultados al método de resolución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias.

En el apartado anterior se han visto la definición y propiedades de la función delta de Dirac. Aplicando la propiedad de filtro y suponiendo que $c > 0$, se deduce

$$\mathfrak{L}\left(\delta\left(t-c\right)\right) = \int_0^\infty \delta\left(t-c\right)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-sc}\delta\left(t-c\right)dt = e^{-sc}$$

Si $c = 0$, se obtiene

$$\mathfrak{L}\left(\delta\left(t\right)\right) = \int_0^\infty \delta\left(t\right)e^{-st}dt = e^{-s0} = 1$$

y, en general

$$\mathfrak{L}\left(\delta^{(n}(t-c)\right) = \int_0^\infty \delta^{(n}(t-c)e^{-st}dt = (-1)^n(-s)^n e^{-sc} = s^n e^{-sc}, \quad c \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Cabe señalar que en el contexto de las transformadas de Laplace, las funciones se toman definidas para $t \geq 0$, por lo cual la constante de traslación c debe ser no negativa, como hemos indicado arriba. Con frecuencia consideraremos las funciones definidas en toda la recta real, multiplicándolas por la función escalón unitario $U(t)$ para que se anulen en $t < 0$.

Contando con estas nuevas transformadas y utilizando las propiedades de la transformada de Laplace podremos encontrar transformadas inversas de polinomios y de polinomios multiplicados por el factor e^{-sc}, como puede verse en la tabla de transformadas.

8 Función de transferencia de un sistema

Supongamos que la siguiente ecuación diferencial sirve de modelo de funcionamiento de un sistema de ingeniería sencillo

$$\frac{d\,y(t)}{dt} + y(t) = f(t) \quad , \quad y(0) = y_0$$

en esta ecuación diferencial $f\left(t\right)$ representa la señal de entrada del sistema e $y\left(t\right)$ es la señal de salida, o respuesta del sistema. Por razones de mayor simplicidad vamos a considerar que las condiciones iniciales asociadas con la ecuación diferencial son nulas, es decir que $y\left(0\right) = 0$. Tomando transformadas de Laplace en la ecuación anterior obtenemos

$$sY(s) - y_0 + Y(s) = F(s) \quad \Rightarrow \quad (1+s)Y(s) = F(s) \;\; \text{con} \;\; y\left(0\right) = 0$$

luego

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{1+s}$$

Definición (Función de transferencia de un sistema).- La función $G(s)$ se denomina función de transferencia del sistema. Se trata de la transformada de Laplace de la señal de salida dividida por la transformada de Laplace de la señal de entrada

Ejercicios propuestos

1 Estudiar si las siguientes funciones $f(t)$ verifican las condiciones suficientes de existencia de la transformada de Laplace. Obtener, siempre que sea posible, la abscisa de convergencia de $f(t)$.

a) $f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t<0 \\ 1 & si \quad t \geq 0 \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t<0 \\ sen\,(at) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t<0 \\ t^2 e^{-3t} & si \quad t > 0 \end{cases}$

d) $f(t) = \left\{ \begin{matrix} 0 & si \quad t<0 \\ t^m & si \quad t \geq 0 \end{matrix} \right\}, \quad m \in Z^+$

Solución
En los cuatro casos, las funciones verifican las condiciones suficientes de existencia de la transformada de Laplace. La abscisa de convergencia toma los valores siguientes:
a) $\alpha = 0$ b) $\alpha = 0$ c) $\alpha = -3$
d) $\alpha = 0$

2 Calcular las transformadas de Laplace de las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}^+$ y comprobar los resultados con Matlab:

a) $f(x) = 1$ b) $f(x) = U(x-a)$

c) $f(x) = e^{ax}$ d) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = \cos ax$ f) $f(x) = \operatorname{sen} ax$

Comandos de Octave/Matlab para el cálculo de transformadas y transformadas inversas de Laplace:
Ejemplo de cálculo de transformada de Laplace

```
f=sym('x^3'); F=laplace(f)
```

o también

```
syms x; F=laplace(x^3)
```

Ejemplo de cálculo de transformada inversa:

```
syms s; f=ilaplace(1/(s^2+1)/(s+1))
```

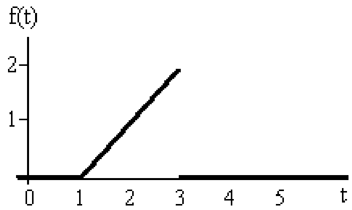
Solución:

a) $F(s) = \dfrac{1}{s}$ b) $F(s) = \dfrac{e^{-as}}{s}$

c) $F(s) = \dfrac{1}{s-a}$ d) $F(s) = \dfrac{2}{s^3}$;

e) $F(s) = \dfrac{s}{s^2+a^2}$ f) $F(s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}$

3 Sea $f(t)$ la función cuya gráfica muestra la figura. Definir dicha función utilizando las funciones salto o funciones de Heaviside $U(t-c)$. Hallar la transformada de Laplace de $f(t)$ aplicando la definición de transformada. Comprobar el resultado con Matlab.



Solución

$$f(t) = (t-1) \cdot U(t-1) + (1-t) \cdot U(t-3)$$

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} - e^{-3s} \cdot \left(\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} \right)$$

4 Aplicando las propiedades de las transformadas de Laplace junto con la tabla de transformadas, hallar la transformada de Laplace de las siguientes funciones $f(t)$:

a) $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$ b) $Sh\,(3t) = \dfrac{e^{3t} - e^{-3t}}{2}$

c) $Ch\,(5t)$ d) $e^{-t} \cdot sen\,(2t)$

e) $sen\left(\dfrac{2t}{3}\right)$ f) $\dfrac{\cos(7t)}{e^{5t}}$

Solución:

a) $F(s)=\dfrac{4s}{4s^2+1}$ b) $F(s)=\dfrac{3}{s^2-9}$

c) $F(s)=\dfrac{s}{s^2-25}$ d) $F(s)=\dfrac{2}{(s+1)^2+4}$

e) $F(s)=\dfrac{6}{9s^2+4}$ f) $F(s)=\dfrac{s+5}{(s+5)^2+49}$

5 Calcular las transformadas inversas de Laplace de las siguientes funciones $F(s)$ y comprobar los resultados con Matlab:

a) $\dfrac{s+3}{(s-2)(s+1)}$ b) $\dfrac{1}{s^2-2s+9}$

c) $\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$ d) $\dfrac{e^{-3s}}{s^2}$ e) $\dfrac{10}{(s+2)^4}$

f) $\dfrac{2s+3}{s^2+6s+13}$ g) $\dfrac{3}{s(s^2+4)}$

h) $\dfrac{(s+3)}{s(s^2+1)}$ i) $\dfrac{(s+3)e^{-s\pi}}{s(s^2+1)}$

j) $\dfrac{(s+3)e^{-2s}}{s(s^2+1)}$

Solución

a) $f(t)=-\dfrac{2}{3}e^{-t}+\dfrac{5}{3}e^{2t}$

b) $f(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}e^{t}sen\left(2\sqrt{2}\,t\right)$ c) $f(t)=t\cdot\operatorname{sen}t$

d) $f(t)=(t-3)\cdot U(t-3)$

e) $f(t)=\dfrac{5}{3}t^3e^{-2t}$

f) $f(t)=e^{-3t}\left(2\cos 2t-\dfrac{3}{2}\operatorname{sen}2t\right)$

g) $f(t)=\dfrac{3}{4}(1-\cos 2t)$

h) $f(t)=(3-3\cos t+\operatorname{sen}t)$

i) $f(t)=U(t-\pi)(3+3\cos t-\operatorname{sen}t)$

j) $f(t)=U(t-2)\left(3-3\cos(t-2)+\operatorname{sen}(t-2)\right)$

6 Resolver las siguientes ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales:

a) $x''+2x'+5x=1$, siendo las condiciones iniciales $x(0)=x'(0)=0$

b) $x'''-2x''+3x'-6x=4t$, con las condiciones iniciales $x(0)=x'(0)=0\,;\quad x''(0)=1/6$

c) $x''+4x=f(t)$, con las condiciones iniciales $x(0)=x'(0)=0$ siendo

$$f(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<5\\ \dfrac{t-5}{5} & 5\le t<10\\ 1 & t\ge 10\end{cases}$$

d) $x''+x=f(t)$, con las condiciones iniciales $x(0)=0,\ x'(0)=1$ siendo

$$f(t)=\begin{cases}t/2 & 0\le t<6\\ 2 & t\ge 6\end{cases}$$

e) $\begin{cases}x'(t)=2x-5y\\ y'(t)=x-2y\end{cases}$, con las condiciones iniciales $x(0)=1\,;\quad y(0)=0$

Solución

a) $x(t)=\dfrac{1}{5}\left\{1-e^{-t}\left(\cos 2t+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}2t\right)\right\};$

b) $x(t)=\dfrac{1}{6}e^{2t}+\dfrac{1}{6}\cos\sqrt{3}t+$
$+\dfrac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{sen}\sqrt{3}t-\dfrac{2}{3}t-\dfrac{1}{3};$

c)
$$x(t)=\frac{1}{40}\left[2(t-5)-sen\left(2(t-5)\right)\right]U(t-5)-$$
$$-\frac{1}{40}\left[2(t-10)-sen\left(2(t-10)\right)\right]U(t-10)-$$

d) $x(t)=\dfrac{1}{2}\left[t+sent-\right.$
$\left.-\left(t-6-sen(t-6)\right)U(t-6)\right]$

e) $x(t)=\cos t+2\operatorname{sen}t\quad;\quad y(t)=\operatorname{sen}t$

7 Una masa que pesa 32 g. se encuentra sujeta al extremo de un resorte ligero que se estira 1 m. cuando se le aplica una fuerza de 4 kg. Si la masa se encuentra en reposo en su posición de equilibrio cuando t=0 y si, en ese instante, se aplica una fuerza de excitación $f(t)=\cos t$ que cesa abruptamente en $t=2\pi$ s, determinar la función de posición de la masa en cualquier

instante, si se permite a la masa continuar su movimiento sin impedimentos.
Teniendo en cuenta la ley de Hooke, la ecuación que modela la posición de la masa m es

$$x''+4x=\begin{cases}\cos t & 0\le t\le 2\pi\\ 0 & t>2\pi\end{cases}$$

Solución:

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\operatorname{sen}2t & 0\le t<2\pi\\ \dfrac{1}{4}t\operatorname{sen}t-\dfrac{1}{16}\operatorname{sen}2t+ & \\ +\dfrac{1}{16}t\cos 2t-\dfrac{3\pi}{8}\cos 2t & t\ge 2\pi\end{cases}$$

8 Un circuito RLC, con $R=110\Omega$, L=1H y C=0.002F tiene conectada una batería de 90V. Supongamos que en t=0 no hay corriente en el circuito ni carga en el condesador y que, en el mismo instante, se cierra el interruptor por 1 seg. Si al tiempo t=1 se abre el interruptor, y así se conserva, encontrar la corriente resultante en el circuito.
Nota: Aplicando las leyes de Kirchhoff, la ecuación que modela el circuito es

$$I'+110I+\frac{1}{0.001}\int_o^t Idt=E \text{ siendo}$$

$$E=90\left(u(t)-u(t-1)\right)$$

Solución:

$$I(t)=\begin{cases}e^{-10t}-e^{-100t} & 0\le t<1\\ \left(1-e^{10}\right)e^{-10t}-\left(1-e^{100}\right)e^{-100t} & t\ge 1\end{cases}$$

9 Una droga entra y sale de un órgano de volumen $v_o\ cm^3$ a una tasa de $\alpha\ cm^3/seg$, donde v_o y α son constantes. Supongamos que, en el tiempo t=0, la concentración de la droga es 0 y tras administrarla, dicha concentración aumenta linealmente hasta un máximo de K en el tiempo $t=t_o$ en el cual el proceso se detiene. Determinar la concentración de la droga en el órgano en todo instante y su máximo valor.
Solución: Para $t<t_o$ se tendrá

$$x(t)=\frac{kt}{t_o}-\frac{v_ok}{\alpha t_o}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{v_o}t}\right).$$ Si $t>t_o$,

$$x(t)=\frac{v_ok}{\alpha t_o}e^{-\frac{\alpha}{v_o}t}+\left(k-\frac{v_ok}{\alpha t_o}\right)e^{-\frac{\alpha}{v_o}(t-t_o)}$$

Test de autoevaluación

1 Estudiar si la función $f(t)=U(t)e^{3t}$ verifica las condiciones suficientes para que exista su transformada de Laplace y, si existe, elegir la abscisa de convergencia correcta para $f(t)$:

A) La abscisa de convergencia de $f(t)$ es $\alpha=-3$.
B) La abscisa de convergencia de $f(t)$ es $\alpha=0$.
C) La abscisa de convergencia de $f(t)$ es $\alpha=3$.
D) Ninguna de las anteriores.

2 Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t)=\left\{\begin{matrix}2 & si & 0\le t\le 5\\ 6 & si & t>5\end{matrix}\right\}$, utilizando las funciones de Heaviside para definir $f(t)$ y, posteriormente, la tabla de transformadas:

A) $F(s)=\dfrac{2}{s}+\dfrac{6e^{-5s}}{s}$
B) $F(s)=\dfrac{2}{s}+\dfrac{4e^{5s}}{s}$
C) $F(s)=\dfrac{2}{s}+\dfrac{4e^{-5s}}{s}$
D) Ninguna de las anteriores.

3 Elegir la respuesta correcta para definir el carácter convergente o divergente de cada una de las siguientes integrales:

$$I=\int_0^\infty e^t\operatorname{sen}2tdt\quad;\quad J=\int_0^\infty te^{-t}\cos 3tdt$$

A) Las dos integrales divergen.

B) I es divergente y J converge a $\frac{-8}{100}$

C) I es divergente y J converge a $\frac{-1}{100}$

D) Ninguna de las anteriores.

4 Sabiendo que la transformada de Laplace de la función $f(t)$ es $F(s) = \frac{5}{s^2+4} + \frac{20s}{s^2+9}$, hallar la función $f(t)$:

A) $f(t) = 5\cos 2t + 20 \operatorname{sen} 3t$

B) $f(t) = 5 \operatorname{sen} 2t + 20\cos 3t$

C) $f(t) = \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2t + 20\cos 3t$

D) Ninguna de las anteriores

5 Sabiendo que la transformada de Laplace de la función $f(t)$ es $F(s) = \frac{2}{(s+1)^3}$, señalar cuál de las siguientes funciones es la transformada de Laplace de la función $U(t-2)f(t-2)$:

A) $G(s) = F(s-2) = \frac{2}{(s-1)^3}$

B) $G(s) = \frac{2}{(s+1)^3} e^{-2s}$

C) $G(s) = \frac{2}{(s+1)^3} e^{2s}$

D) Ninguna de las anteriores.

6 La transformada de Laplace de la función $\int_0^t (x^3 + \operatorname{sen} 2x)dx$ es:

A) $F(s) = \frac{6}{s^5} + \frac{2}{s(s^2+4)}, \quad s > 0$

B) $F(s) = \frac{6}{s^4} + \frac{2}{s^2+4}, \quad s > 0$

C) $F(s) = \frac{3}{s^5} + \frac{2}{s(s^2+4)}, \quad s > 0$

D) Ninguna de las anteriores.

7 Sin calcular $f(t)$, determinar $f(0^+)$ y $f(\infty)$, sabiendo que la transformada de Laplace de dicha función es

$$F(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 5}{s(s^3 + 3s^2 + 4s + 2)}:$$

A) $f(0)^+ = \frac{5}{2}$ y $f(\infty) = 1$

B) $f(0)^+ = 1$ y $f(\infty) = 1$

C) $f(0)^+ = 1$ y $f(\infty) = \frac{5}{2}$

D) Ninguna de las anteriores

8 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, aplicando transformadas de Laplace, para las condiciones iniciales $x(0) = 0, \; y(0) = 1$:

$$\begin{Bmatrix} y' = -x \\ x' = y + 2x \end{Bmatrix}$$

A) $x(t) = te^t$; $y(t) = (1-t)e^t$

B) $x(t) = -\operatorname{sen} t + 2\cos t$; $y(t) = \cos t$

C) $x(t) = -te^t$; $y(t) = (1-t)e^t$

D) Ninguna de las anteriores.

9 Utilizar la convolución para hallar la transformada inversa de Laplace $\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s-2}\right]$, sabiendo que $\mathfrak{L}\left[e^t\right] = \frac{1}{s-1}$; $\mathfrak{L}\left[e^{2t}\right] = \frac{1}{s-2}$:

A) $f(t) = e^{2t} - e^t$

B) $f(t) = e^{-2t} - e^{-t}$

C) $f(t) = -e^{2t} + e^t$

D) Ninguna de las anteriores.

10 La función de transferencia de un circuito eléctrico dado es $G(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s+2}$, donde $V_i(s)$ y $V_o(s)$ son las transformadas de Laplace de los voltajes de entrada y salida, respectivamente.

Hallar $v_o(t)$, aplicando convolución, sabiendo que $v_i(t) = \left\{ e^{-t} \; , \; t \geq 0 \; ; \; 0 \; , \; t < 0 \right\}$

A) $v_o(t) = e^{-2t} + e^{-t}$

B) $v_o(t) = -e^{-2t} - e^{-t}$

C) $v_o(t) = -e^{-2t} + e^{t}$

D) Ninguna de las anteriores.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	B	C	B	A	C	A	A	D

Ejercicios resueltos

1

Expresar en términos de la función salto unidad la función $f(t)$, calculando posteriormente su transformada de Laplace: $f(t) = \begin{Bmatrix} 0 \; , & t < 0 \\ 2t^2 , & 0 \leq t < 3 \\ 9 \; , & t \geq 3 \end{Bmatrix}$

Datos: $\mathfrak{L}\left[t^n\right] = \dfrac{n!}{s^{\,n+1}}$; $\mathfrak{L}\left[U\left(t-c\right)\right] = \dfrac{e^{-sc}}{s}$

Solución

Expresión de $f(t)$ utilizando la función escalón:

$$f\left(t\right) = 2t^2 U\left(t\right) + \left(9 - 2t^2\right) U\left(t-3\right)$$

Para hallar la transformada de Laplace utilizando la propiedad de traslación en el tiempo, es necesario expresar el polinomio $\left(9-2t^2\right)$ en potencias de $\left(t-3\right)$. Para ello efectuamos un cambio de variable

$$\left(t-3\right) = z \quad \rightarrow \quad t = z+3 \quad \rightarrow \quad 9 - 2t^2 = 9 - 2\left(z+3\right)^2 = -9 - 12z - 2z^2$$

Deshaciendo ahora el cambio de variable, queda la expresión buscada del polinomio

$$9 - 2t^2 = -9 - 12z - 2z^2 = -9 - 12\left(t-3\right) - 2\left(t-3\right)^2,$$

sustituimos y calculamos la transformada de Laplace,

$$\mathfrak{L}\left[f\left(t\right)\right] = \mathfrak{L}\left[2t^2 U\left(t\right)\right] + \mathfrak{L}\left[\left(-9 - 12\left(t-3\right) - 2\left(t-3\right)^2\right) U\left(t-3\right)\right],$$

aplicando también la propiedad de linealidad, queda

$$\mathfrak{L}\left[f\left(t\right)\right] = 2\mathfrak{L}\left[t^2 U\left(t\right)\right] - 9\mathfrak{L}\left[U\left(t-3\right)\right] - 12\mathfrak{L}\left[\left(t-3\right) U\left(t-3\right)\right] - 2\mathfrak{L}\left[\left(t-3\right)^2 U\left(t-3\right)\right]$$

$$\mathfrak{L}\left[f\left(t\right)\right] = \frac{4}{s^3} - e^{-3s}\left\{\frac{9}{s} + \frac{12}{s^2} + \frac{4}{s^3}\right\}$$

2 Estudiar el carácter convergente o divergente de cada una de las siguientes integrales, utilizando únicamente la definición de transformada de Laplace y la tabla de transformadas. En el caso de que la integral sea convergente, hallar su valor:

$$I = \int_0^\infty e^t \cos 2t dt \quad ; \qquad J = \int_0^\infty te^{-t} \operatorname{sen} 3t dt$$

Solución

$$I = \int_0^\infty e^t \cos 2t dt = J = \mathfrak{L}\left[\cos 2t\right]_{s=-1}$$

esta integral es divergente porque la transformada de la función $\cos 2t$ solo converge para valores de $s > 0$.

$$J = \int_0^\infty te^{-t} \operatorname{sen} 3t dt = \mathfrak{L}\left[t \operatorname{sen} 3t\right]_{s=1}$$

esta integral es convergente porque la transformada de la función $t \operatorname{sen} 3t$ es la función $F(s) = \dfrac{6s}{\left(s^2 + 3^2\right)^2}$, que converge para $s > 0$. Sustituyendo en $s = 1$, queda $J = F(1) = \dfrac{6}{100} = \dfrac{3}{50}$.

3 Hallar la transformada de las siguientes funciones, utilizando la tabla y las propiedades de las transformadas de Laplace:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} \qquad \text{b)} \int_0^x \frac{e^t - \cos 2t}{t} dt$$

Solución

Se aplica la propiedad: $\mathfrak{L}\left[\dfrac{f(x)}{x}\right] = \displaystyle\int_s^\infty \mathfrak{L}\left(f(x)\right)(u)du$ comprobando la condición de existencia del límite $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3$

$$\mathfrak{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right] \underset{propiedad}{=} \int_s^\infty \left[\mathfrak{L}\left(\operatorname{sen} 3x\right)\right](u)du \underset{\substack{tabla \\ (u>0)}}{=} \int_s^\infty \frac{3}{u^2 + 9} du \underset{(s>0)}{=} \lim_{R \to \infty} \int_s^R \frac{1/3}{\left(u/3\right)^2 + 1} du =$$

$$= \lim_{R \to \infty} \left[\operatorname{arctg} \frac{u}{3}\right]_s^R = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s}{3}, \quad s > 0$$

b) Aplicando la propiedad: $\mathfrak{L}\left[\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right] = \dfrac{1}{s} \mathfrak{L}\left(f(x)\right)$, se obtiene

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{e^t - \cos 2t}{t}\right]$$

Ahora se aplica la propiedad utilizada en el apartado a), comprobando previamente

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^t - \cos 2t}{t} = 1$$

$$\frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{e^t - \cos 2t}{t}\right] = \frac{1}{s}\int_s^\infty \left[\mathcal{L}(e^x - \cos 2x)\right] du \underset{\substack{tabla \\ (u>1)}}{=} \frac{1}{s}\int_s^\infty \left(\frac{1}{u-1} - \frac{u}{u^2+4}\right) du \underset{(s>1)}{=}$$

$$= \frac{1}{s}\lim_{R\to\infty}\left[\log\frac{u-1}{\sqrt{u^2+4}}\right]_s^R = -\frac{1}{s}\log\frac{s-1}{\sqrt{s^2+4}}, \qquad s>1$$

4 Hallar la transformada de las siguientes funciones, utilizando la tabla y las propiedades de las transformadas de Laplace:

a) $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s^2+2s+5)}$ b) $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s-3} + \dfrac{2e^{-4s}}{s+1}$

Solución

En primer lugar, se escriben los factores del denominador en función de $s+1$, para utilizar la propiedad de traslación en la variable "s"

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)\left[(s+1)^2 + 2^2\right]} \underset{propiedad}{=} \mathcal{L}\left[e^{-x}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+2^2)}\right)\right]$$

Además

$$\frac{1}{s(s^2+2^2)} = \frac{1}{2s}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) \underset{propiedad}{=} \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\int_0^x \operatorname{sen} 2t dt\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\right]$$

Con lo que,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right) = e^{-x}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+2^2)}\right) = \frac{1}{2}e^{-x}\operatorname{sen}^2 x$$

Haciendo uso de la propiedad de traslación en el tiempo, se tiene

$$\mathcal{L}\left[U(x-c)f(x-c)\right] = e^{-cs}\mathcal{L}\left(f(x)\right) \quad \overset{(c>0)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-cs}\mathcal{L}\left(f(x)\right)\right] = \begin{cases} 0, & si \quad x \le c \\ f(x-c), & si \quad x > c \end{cases}$$

Aplicando esto a cada sumando de la función, y debido a que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) = e^{3x} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-x}$$

Resulta

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s-3}\right]=\begin{cases}0, & si\quad x\le 1\\ e^{3(x-1)}, & si\quad x>1\end{cases}\qquad \text{y}\qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s+1}\right]=\begin{cases}0, & si\quad x\le 4\\ e^{-(x-4)}, & si\quad x>4\end{cases}$$

de donde

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)=\begin{cases}0, & si\quad x\le 1\\ e^{3(x-1)}, & si\ 1<x\le 4\\ e^{3(x-1)}+2e^{-(x-4)}, & si\quad x>4\end{cases}$$

5 Calcular la transformada inversa de Laplace de la función: $F(s)=\dfrac{1}{\left(s^2+1\right)^2}$

Solución

A modo ilustrativo, abordaremos este cálculo mediante dos procedimientos distintos.

Método 1: Haciendo uso de la propiedad de convolución,

$$F(s)=\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}=\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}=\mathcal{L}\left(\operatorname{sen}x\right)\mathcal{L}\left(\operatorname{sen}x\right)\underset{convolución}{=}\mathcal{L}\left(\operatorname{sen}x*\operatorname{sen}x\right)$$

luego sólo resta calcular esa convolución

$$\operatorname{sen}x*\operatorname{sen}x=\int_0^x \operatorname{sen}u\operatorname{sen}(x-u)du=\frac{1}{2}\int_0^x\left[\cos(2u-x)-\cos x\right]du=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}x-x\cos x\right)$$

para saber que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}x-x\cos x\right)$$

Método 2: Para hacer uso de otras propiedades, comenzamos escribiendo la función como producto de dos funciones,

$$F(s)=\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}=\frac{1}{s}\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}=\frac{1}{s}G(s)$$

la segunda de las cuales, $G(s)$, es la derivada de una función cuya transformada inversa es conocida:

$$G(s)=\frac{d}{ds}\left(\frac{-1/2}{s^2+1}\right)\quad\underset{propiedad}{\Rightarrow}\quad G(s)=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left[x\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(x\operatorname{sen}x\right)$$

Ahora, debido a la propiedad $\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right]=\frac{1}{s}\mathcal{L}\left(f(x)\right)$

$$F(s)=\frac{1}{s}G(s)=\mathfrak{L}\left[\int_0^x \mathfrak{L}^{-1}\left(G(s)\right)dt\right]=\mathfrak{L}\left[\int_0^x \frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}\,t dt\right]=\frac{1}{2}\mathfrak{L}\left(\mathrm{sen}\,x-x\cos x\right)$$

de donde se deduce el mismo resultado que el alcanzado con el primer método.

6 Sin calcular $f(t)$, determinar $f(0)^+$ y $f(\infty)$, en los dos casos siguientes, sabiendo que la función $F(s)$ dada es la transformada de Laplace de $f(t)$, a saber:

a) $F(s)=\dfrac{2s+6}{s^2+8s+20}$ b) $F(s)=\dfrac{(2s+1)^2+4}{\left[(s+3)^2+16\right]\cdot(s+5)}$

Solución

En ambos casos vamos a aplicar los teoremas del valor inicial y del valor final. Según el Teorema del valor inicial, se verifica

$$f\left(0^+\right)=\lim_{s\to\infty}sF\left(s\right)$$

Además, el teorema del valor final permite conocer $f(\infty)$, a partir de su transformada $F(s)$, así $f\left(\infty\right)=\lim_{s\to 0}sF\left(s\right)$

a) $f\left(0^+\right)=\lim_{s\to\infty}\dfrac{2s^2+6s}{s^2+8s+20}=\lim_{s\to\infty}\dfrac{2s^2}{s^2}=2$ $f\left(\infty\right)=\lim_{s\to 0}\dfrac{2s^2+6s}{s^2+8s+20}=\lim_{s\to 0}\dfrac{6s}{20}=0$

b) $f\left(0^+\right)=\lim_{s\to\infty}\dfrac{\left[s\left(2s+1\right)^2+4s\right]}{\left[\left(s+3\right)^2+16\right]\left(s+5\right)}=\lim_{s\to\infty}\dfrac{4s^3}{s^3}=4\,;$

$$f\left(\infty\right)=\lim_{s\to 0}\frac{\left[s\left(2s+1\right)^2+4s\right]}{\left[\left(s+3\right)^2+16\right]\cdot(s+5)}=\lim_{s\to 0}\frac{4s^3+4s^2+5s}{s^3+11s^2+55s+125}=\lim_{s\to 0}\frac{5s}{125}=0$$

7 Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''+4y'+5y=U(t)-U(t-1)\\ y(0)=1,\quad y'(0)=0\end{cases}$$

Solución

En primer lugar aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación utilizando la propiedad:

$$\mathfrak{L}\left(y'\right)=s\mathfrak{L}\left(y\right)-y(0)\quad\Rightarrow\quad\mathfrak{L}\left(y''\right)=s\mathfrak{L}\left(y'\right)-y'(0)$$

$$\mathfrak{L}\left(y''+4y'+5y\right)=\left[s^2\mathfrak{L}\left(y\right)-sy(0)-y'(0)\right]+4\left[s\mathfrak{L}\left(y\right)-y(0)\right]+5\mathfrak{L}\left(y\right)$$

$$\mathfrak{L}\left[U(t)-U(t-1)\right]\underset{tabla}{=}\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}$$

Igualando y llamando

$$Y(s) = \mathcal{L}\left(y\right)$$

Resulta

$$Y(s)\left(s^2 + 4s + 5\right) - y(0)\left(s + 4\right) - y'(0) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

Despejamos ahora $Y(s)$ y sustituimos los valores iniciales,

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + s + 4}{s^2 + 4s + 5}$$

Sólo resta calcular la transformada inversa para obtener $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + s + 4}{s^2 + 4s + 5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s\left(s^2 + 4s + 5\right)}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s\left(s^2 + 4s + 5\right)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{s^2 + 4s + 5}\right) =$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left(F_1(s)\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(F_2(s)\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(F_3(s)\right)$$

Factorizamos el denominador de estas fracciones para descomponer en fracciones simples,

$$\frac{1}{s\left(s^2 + 4s + 5\right)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4s + 5} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{5},\ B = -\frac{1}{5},\ C = -\frac{4}{5}$$

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F_1(s)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s\left(s^2 + 4s + 5\right)}\right) = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{s^2 + 4s + 5}\right)$$

Calculamos aparte

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{s^2 + 4s + 5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(s+2)+2}{(s+2)^2 + 1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2 + 1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+2)^2 + 1}\right) \underset{tabla}{=}$$
$$= e^{-2t}\cos t + 2e^{-2t}\operatorname{sen} t$$

Por tanto,

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F_1(s)\right) = \frac{1}{5}U(t) - \frac{e^{-2t}}{5}\left(\cos t + 2\operatorname{sen} t\right)$$

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F_2(s)\right) = U(t-1)\mathcal{L}^{-1}\left[F_1(s)\right]_{(t-1)} = \frac{U(t-1)}{5}\left[1 - e^{-2(t-1)}\left(\cos(t-1) + 2\operatorname{sen}(t-1)\right)\right]$$

$$f_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F_3(s)\right) = e^{-2t}\left(\cos t + 2\operatorname{sen} t\right)$$

Finalmente,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right) = f_1(t) - f_2(t) + f_3(t) =$$

$$= \frac{1}{5}U(t) + \frac{4}{5}e^{-2t}\left(\cos t + 2\operatorname{sen} t\right) - \frac{U(t-1)}{5}\left[1 - e^{-2(t-1)}\left(\cos(t-1) + 2\operatorname{sen}(t-1)\right)\right] =$$

$$y(t)=\frac{1}{5}\left[U(t)-U(t-1)\right]+\frac{1}{5}U(t-1)e^{-2(t-1)}\left[\cos(t-1)+2\operatorname{sen}(t-1)\right]+\frac{4}{5}e^{-2t}\left(\cos t+2\operatorname{sen} t\right)$$

8 Resolver el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{matrix} y'+z=x \\ z'+4y=0 \end{matrix}\right\}$ $\quad con \quad y(0)=-z(0)=1$

Solución

Aplicando transformadas de Laplace a ambas ecuaciones

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{L}(y)+\mathcal{L}(z)=\mathcal{L}(x) & \Rightarrow & \left(sY(s)-1\right)+Z(s)=\dfrac{1}{s^2} \\ \mathcal{L}(z')+4\mathcal{L}(y)=0 & \Rightarrow & \left(sZ(s)+1\right)+4Y(s)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} sY(s)+Z(s)=\dfrac{s^2+1}{s^2} \\ 4Y(s)+sZ(s)=-1 \end{matrix}\right.$$

se ha transformado el sistema inicial en un sistema algebraico, cuya resolución proporciona las transformadas $Y(s)$ y $Z(s)$ siguientes:

$$Y(s)=\frac{s^2+s+1}{s(s^2-4)} \qquad\qquad Z(s)=\frac{-s^3-4s^2-4}{s^2(s^2-4)}$$

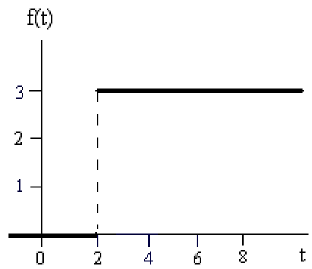
Finalmente, se calculan las transformadas inversas

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+s+1}{s(s^2-4)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{4s}+\frac{7}{8}\frac{1}{s-2}+\frac{3}{8}\frac{1}{s+2}\right)=\frac{-1}{4}+\frac{7}{8}e^{2x}+\frac{3}{8}e^{-2x}$$

$$z(x)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-s^3-4s^2-4}{s^2(s^2-4)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{7}{4}\frac{1}{s-2}+\frac{3}{4}\frac{1}{s+2}\right)=x-\frac{7}{4}e^{2x}+\frac{3}{4}e^{-2x}$$

9 Sea la función $f(t)$ cuya gráfica se muestra en la figura:

a) Expresar $f(t)$ utilizando la función de Heaviside o función salto y hallar su transformada de Laplace.



b) Aplicando transformadas de Laplace, hallar la función $y(t)$ que cumple la ecuación siguiente, siendo $f(t)$ la función del apartado a)

$$y'(t)+2y(t)+2\int_0^t y(x)dx=f(t)$$

teniendo en cuenta la condición inicial $y(0)=1$.

Solución

$f(t)=3U\left(t-2\right)$, ahora buscamos su transformada de Laplace en la tabla,

$$\mathfrak{L}\left[f(t)\right] = \frac{3}{s}e^{-2s}$$

b) Aplicando transformadas de Laplace en ambos lados de la igualdad, y teniendo en cuenta la propiedad de linealidad, resulta

$$\mathfrak{L}\left[y'(t)\right] + 2\mathfrak{L}\left[y(t)\right] + 2\mathfrak{L}\left[\int_0^t y(x)dx\right] = \mathfrak{L}\left[f(t)\right]$$

Sea $Y\left(s\right) = \mathfrak{L}\left[y(t)\right]$, aplicamos las propiedades de transformada de la derivada y transformada de la integral de $y(t)$, resultando

$$sY\left(s\right) - y\left(0+\right) + 2Y\left(s\right) + \frac{2}{s}Y\left(s\right) = \frac{3}{s}e^{-2s}$$

resolvemos esta ecuación algebraica despejando $Y\left(s\right)$,

$$Y(s) = \frac{s + 3e^{-2s}}{s^2 + 2s + 2}$$

Ahora se obtiene $y(t)$ hallando la transformada inversa de $Y\left(s\right)$. Para ello, separamos la función $Y\left(s\right)$ en dos partes, ya que se tratan de diferente forma por el hecho de que en una de ellas aparece multiplicando una función exponencial de la variable s.

$$Y\left(s\right) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2} + \frac{3e^{-2s}}{s^2 + 2s + 2} \quad \rightarrow \quad y\left(t\right) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 2s + 2}\right] + \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2 + 2s + 2}\right];$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 2s + 2}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s}{\left(s+1\right)^2 + 1}\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\left(s+1\right) - 1}{\left(s+1\right)^2 + 1}\right] =$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\left(s+1\right)}{\left(s+1\right)^2 + 1}\right] - \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s+1\right)^2 + 1}\right] == e^{-t}\left(\cos t - \operatorname{sen} t\right)$$

aplicando al resultado anterior la propiedad de traslación en el tiempo, podemos obtener la transformada inversa

$$3\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2 + 2s + 2}\right] = 3\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{\left(s+1\right)^2 + 1}\right] = 3U\left(t-2\right)e^{-\left(t-2\right)}\operatorname{sen}\left(t-2\right)$$

La solución de la ecuación integral será

$$y\left(t\right) = e^{-t}\left[\cos t - \operatorname{sen} t + 3e^2 U\left(t-2\right)\operatorname{sen}\left(t-2\right)\right]$$

10 Los voltajes de entrada y salida, $v_i(t)$, $v_o\left(t\right)$, de un circuito RC en serie están relacionados por la ecuación diferencial

$$CR \cdot \frac{d\,v_o}{dt} + v_o\left(t\right) = v_i(t)$$

Las constantes del circuito verifican $C \cdot R = 10^{-2}$. Se pide:

a) Hallar la función de transferencia del sistema, considerando $v_o(0) = 0$.

b) Obtener $v_o(t)$, cuando $v_i(t) = \begin{Bmatrix} 5 & si & t \geq 0 \\ 0 & si & t < 0 \end{Bmatrix}$

Solución

La ecuación diferencial del circuito es la siguiente:

$$10^{-2} \frac{d\, v_o}{dt} + v_o(t) = v_i(t).$$

Sean $\quad V_o(s) = \mathfrak{L}\left[v_o(t)\right]$ y $V_i(s) = \mathfrak{L}\left[v_i(t)\right]$

La función de transferencia del sistema será

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

Tomando transformadas en la ecuación diferencial tenemos

$$10^{-2}\, \mathfrak{L}\left[\frac{d\, v_o}{dt}\right] + \mathfrak{L}\left[v_o(t)\right] = \mathfrak{L}\left[v_i(t)\right] \quad \rightarrow \quad 10^{-2}\left[V_o(s) - v_o(0)\right] + V_o(s) = V_i(s)$$

Sustituyendo la condición inicial, $v_o(0) = 0$, queda

$$V_o(s)\left[10^{-2} s + 1\right] = V_i(s) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{1}{10^{-2} s + 1}$$

Puedes ver más ejercicios resueltos sobre transformadas de Laplace en la página de Giematic UC
http://www.giematic.unican.es/index.php/transformada-laplace/material-interactivo

Anexo1.

TRANSFORMADAS DE LAPLACE			
	Función		Transformada
	$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left[F(s)\right]$		$F(s)=\mathfrak{L}\left[f(t)\right]$
1	1		$\frac{1}{s}, \quad s>0$
2	t^n		$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s>0, \quad n\geq 0$
3	$\sqrt{t}$		$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot s^{-3/2}, \quad s>0$
4	$\frac{1}{\sqrt{t}}$		$\sqrt{\pi}\cdot s^{-1/2}, \quad s>0$
5	e^{at}		$\frac{1}{s-a}, \quad s>a$
6	$t^n\cdot e^{at}$		$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s>a, \quad n\geq 0$
7	$\operatorname{sen} at$		$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s>0$
8	$\cos at$		$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s>0$
9	$t\cdot\operatorname{sen} at$		$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}, \quad s>0$
10	$t\cdot\cos at$		$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}, \quad s>0$
11	$e^{bt}\cdot\operatorname{sen} at$		$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}, \quad s>b$
12	$e^{bt}\cdot\cos at$		$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}, \quad s>b$
13	$U\left(t-a\right)$		$\frac{e^{-as}}{s}, \quad s>a$

Anexo2.

Propiedades de la Transformada de Laplace			
	Función		Transformada
Linealidad	$a\ f(t)+bg(t)$		$a\ F(s)+bG(s)$ $s>\max(\alpha,\beta)$
Cambio de escala	$f(at)$		$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\quad ,\ s>\alpha$
Primera propiedad de traslación	$e^{at}f(t)$		$F(s-a),\quad s>a+\alpha$
Segunda propiedad de traslación	$U(t-c)f(t-c)$		$e^{-cs}F(s),\quad \forall s>\alpha$
Transformada de una derivada	$f'(t)$		$sF(s)-f(0^+),\quad s>\alpha$
	$f''(t)$		$s^2F(s)-sf(0)-f'(0),\quad s>\alpha$
	$f^{(n}(t)$		$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\dots-f^{(n-1}(0)$
Derivada de una transformada	$t\,f(t)$		$-F'(s)$
	$t^n\,f(t)$		$(-1)^n\,F^{(n}(s)$
Transformada de una integral	$\int_0^t f(x)dx$		$\frac{1}{s}F(s),\quad s>\alpha$
Integral de una transformada	$\frac{f(t)}{t}$		$\int_1^\infty F(u)\,du$
$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)\quad (s>\alpha)$		$\mathcal{L}[g(t)]=G(s)\quad (s>\beta)$	