ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Cálculo diferencial de funciones de una variable.
- Cálculo integral de funciones de una variable.
- Derivación de la función compuesta e implícita.
- Representación de curvas planas.
- Dibujo de curvas con Matlab.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A continuación se presentan los objetivos específicos del Tema 4, indicando en cada uno de ellos los ejercicios propuestos del tema y los ejercicios resueltos de la bibliografía que le corresponden. Las abreviaturas que encabezan cada línea hacen referencia a los siguientes libros, documentos o bloques de enunciados:

- *Tomo 5 de la Colección FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS, de Álvarez, Herrero y Ruiz.*
- *ECUACIONES DIFERENCIALES: Una introducción a los métodos modernos y sus aplicaciones, de Brannan y Boyce; editorial México D. F.*
- ***G)*** *CÁLCULO I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable, de García y otros; editorial GLAGSA.*
- ***N)*** *FUNDAMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES, de Nagle y Staff; editorial Addison-Wesley Ib.*
- ***EP)*** *Enunciados de los ejercicios propuestos de este tema.*
- ***ER)*** *Ejercicios resueltos de este tema.*
- ***EG)*** *Ejercicios y actividades en la página del proyecto Giematic, cuya dirección es:*
http://www.giematic.unican.es/index.php/edos-primer-orden/material-interactivo

Los objetivos específicos de este tema son:

1. Poder definir los conceptos básicos del tema.
   A Cap.6, Sec.1: Ejemplo 6.1;
   EG Ejercicios inmediatos.

2. Dada una función de una variable, saber comprobar que es solución de una ecuación diferencial ordinaria dada.
   A Cap.6, Sec.1: Ejemplo 6.2;
   G Cap.16: Problema resuelto 1;
   N Cap.1, Sec.2: Ejemplos 1 a 7;
   EP 2 y 3;
   EG Ejercicios inmediatos.

3. Saber comprobar si una familia uniparamétrica de curvas es solución general de una e.d.o. de primer orden dada. Saber obtener una solución particular cumpliendo una condición inicial. Conocida su solución general, poder encontrar la ecuación correspondiente.
A Cap.6, Sec.2: Ejemplos 6.3 a 6.5, 6.7, 6.8;
N Cap.1, Sec.2: Ejemplo 8;
EP 1 a 5;
ER 1;
EG Ejercicios inmediatos, ejercicio 1.

4. Saber si un problema de valor inicial tiene solución y ésta es única.
A Cap.6, Sec.2: Ejemplo 6.6;
N Cap.1, Sec.2: Ejemplos 9, 10;
EP 2 a 5;
EG Ejercicios 2 y 3.

5. Saber obtener las trayectorias oblicuas a una familia dada.
A Cap.6, Sec.2: Ejemplo 2.8;
EP 5;
EG Ejercicio 5, 27 y 28.

6. Poder reconocer las ecuaciones de los tipos separables, homogéneas, exactas y lineales, manejando las técnicas de búsqueda de solución analítica de esas ecuaciones.
A Cap.6, Sec.2: Ejemplos 6.15, 6.17, 6.19, 6.20; Cap.6, Sec.4: Ejercicios 6.2, 6.6
B Cap.2, Sec.1: Ejemplos 1 a 3; Cap.2, Sec.2: Ejemplos 1 a 3
G Cap.16: Problemas resueltos 2, 3, 16, 17;
N Cap.2, Sec.2: Ejemplos 1 a 3; Cap.2, Sec.3: Ejemplos 2 a 4;
EP 9 a 13;
ER 2 a 7;
EG Ejercicios 3, 4 y 6.

7. Realizar cambios de variable en e.d.o. de primer orden.
A Cap.6, Sec.2: Ejemplos 6.10, 6.11; Cap.6, Sec.4: Ejercicio 6.3;
G Cap.16: Problemas resueltos 6, 14;
N Cap.2, Sec.6: Ejemplo 2;
EP 10;
ER 3

8. Saber bosquejar un campo de direcciones de una e.d.o. de primer orden y utilizarlo, junto con las isoclinas para aproximar gráficamente una solución.
B Cap.1, Sec.1: Ejemplos 2 a 4;
N Cap.1, Sec.3: Ejemplo 1;
EP 6 y 8;
EG Ejercicio 3.

9. Poder analizar las características relativas a monotonía y concavidad de las curvas de una familia uniparamétrica, conociendo únicamente la ecuación diferencial que verifican.
EP 7 y 8;

10. Entender los métodos de Euler y Euler mejorado para la aproximación de soluciones de problemas de valor inicial y saber utilizarlos con la ayuda de calculadora u ordenador.
B Cap.1, sec.3: Ejemplos 1 a 3; Cap.2, Sec.7: Ejemplo 1; Cap.2, Sec.8: Ejemplos 1, 2
G Cap.21: Problemas resueltos 1, 2a
N Cap.1, Sec.3: Ejemplos 2, 3; Cap.3, Sec.5: Ejemplos 1, 2
EP 14 a 19;
EG Demos Matlab: Resolución mediante Euler, Euler mejorado y Runge Kutta.

Ejercicios 7 y 8.

11. Saber utilizar los polinomios de Taylor para aproximar soluciones de problemas de valor inicial.
G Cap.21: Problema resuelto 4
N Cap.3, Sec.6: Ejemplo 1
EP 17

12. Poder escribir la e.d.o. de primer orden que modela un proceso y resolverla analítica o numéricamente.
B Cap.2, Sec.3: Ejemplos 1, 3
G Cap.16: Problemas resueltos 4, 5, 7, 8, 18
N Cap.3, Sec.2: Ejemplos 1 a 3; Cap.3, Sec.3: Ejemplos 1 a 3
EP 18 a 29.
ER 8;
EG Ejercicios 9 a 14.

ECUACIONES DIFERENCIALES. DEFINICIONES BÁSICAS

1 Definiciones

Llamaremos ecuación diferencial (e.d.) a una ecuación diferencial ordinaria (e.d.o) o a una ecuación en derivadas parciales (e.d.p.), de acuerdo con las definiciones siguientes:

Ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.).- Es toda ecuación que liga la variable independiente (por ejemplo, x) con alguna derivada de la función incógnita $\left(y\left(x\right), y'\left(x\right), \ldots, y^{(n}\left(x\right)\right)$: $F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n}(x)\right) = 0$

Ecuación en derivadas parciales (e.d.p.).- Es aquella en la que la función incógnita depende de más de una variable independiente conteniendo la ecuación derivadas respecto de diferentes variables.

Orden de la e.d.- Es el mayor orden de derivación que aparece en la e.d.

2 Soluciones

Resolver una e.d. es encontrar la ecuación que la verifica.
Solución de la e.d.o.- Es una función $y = \phi\left(x\right)$, definida en un intervalo $I = \left(a, b\right)$ que tiene al menos n derivadas continuas en I y que satisface la e.d.o. en I.

$$F\left(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n}(x)\right) = 0$$

- *Solución general de la e.d.o.-* Es una familia de funciones dependientes de n parámetros, de la cual pueda extraerse la e.d.o. por derivación y eliminación de los parámetros.
- *Solución particular de la e.d.o.- Es cada una de las funciones que se obtiene de la solución general al dar valores a los parámetros.*
- *Solución singular de la e.d.o.- Es una solución que no puede extraerse de la solución general.*

3 Datos y valores iniciales

Condiciones iniciales para la e.d.o.- Es un conjunto de n datos que acompañan a la ecuación, formado por los valores que toma la función incógnita y sus derivadas en $x = x_o$:
$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \dots, \; y^{(n-1}(x_0) = y_{n-1}$$

Problema de valor inicial de orden n (p.v.i.).- Es una e.d.o de orden n acompañada de n condiciones iniciales:
$$\begin{cases} F\left(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n}(x)\right) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \dots, \; y^{(n-1}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

4 Linealidad

E.d.o. lineal.- Es toda ecuación lineal en las variables $y, \; y', \dots, \; y^{(n}$, tomando la forma:
$$a_n(x) y^{(n}(x) + \ldots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = b(x)$$

En una e.d.o. lineal la variable dependiente y sus derivadas sólo aparecen elevadas a grado uno y además, cada coeficiente sólo depende de la variable independiente.

5 Modelización

Modelar mediante ecuaciones diferenciales un fenómeno o proceso es escribir en términos de ecuaciones diferenciales las relaciones de cambio sufridas por unas magnitudes frente a otras en el desarrollo de ese fenómeno. Una vez establecido un modelo matemático, podrá encontrarse una solución exacta o aproximada de las variables incógnitas que intervienen en el proceso.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

6 Conceptos básicos

Se escriben a continuación las distintas formas en las que puede presentarse la ecuación de una e.d.o. de primer orden.

- La **forma implícita** de una e.d.o. de primer orden es $F\left(x,y,y'\right)=0$.
- Si en la ecuación implícita se puede despejar y', se obtiene la **forma explícita** $y'=f\left(x,y\right)$.
- Teniendo en cuenta que $y'=\dfrac{dy}{dx}$, también se puede escribir la ecuación en **forma diferencial** $M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0$.

La solución general de la e.d.o. de primer orden es una familia uniparamétrica de funciones

$$y=\phi(x,C)$$

donde C es un parámetro real; para cada valor de C se obtendrá una solución particular.

Un problema de valor inicial de primer orden es

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0 \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

y se resuelve (también se dice integra) encontrando la función de la familia $y=\phi(x,C)$ que verifica $y(x_0)=y_0$. Geométricamente, la familia solución general es el conjunto de curvas en las que se cumple que la pendiente en un punto es el valor de la función f en ese punto. De esas curvas, la que pasa por el punto (x_0,y_0) es la solución del problema de valor inicial.

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD.-
Dada la ecuación $y'=f(x,y)$, con f definida en $D=[a,b]\times[c,d]$, $a<x_0<b$, $c<y_0<d$, si f y f'_y son continuas en D, entonces existe una solución única de la ecuación cumpliendo que $y(x_0)=y_0$; esta solución única del problema de valor inicial está definida en un intervalo centrado en x_0.

7 Métodos elementales de resolución

Veamos a continuación algunos tipos de ecuaciones de primer orden con sus métodos de resolución.

TIPO 1. ECUACIONES DE VARIABLES SEPARABLES O SEPARADAS

Definición.- Una e.d.o. de primer orden es de variables separables si se puede escribir de la forma $f_1(x)g_1(y)dx = f_2(x)g_2(y)dy$

Las funciones que satisfacen esta ecuación deben cumplir alguna de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy \ , \quad f_2(x) = 0 \ , \quad g_1(y) = 0$$

RESOLUCIÓN

La solución general se obtendrá por integración de la primera de las ecuaciones anteriores:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy$$

y deberá analizarse si $f_2(x) = 0$ y $g_1(y) = 0$ proporcionan soluciones singulares.

CAMBIO DE VARIABLE

En las e.d.o. de primer orden es frecuente utilizar un cambio de variable para reducir la dificultad de la ecuación. Por ejemplo, el cambio $u = ax + by + c$, reduce la ecuación $y' = g(ax + by + c)$ a una de variables separables.

TIPO 2. ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Definición.- Una función $f(x,y)$ *es homogénea de grado* n *en sus argumentos si se cumple* $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$

Definición (Ecuación diferencial homogénea).- Una ecuación expresada de la forma $y' = f(x,y)$ *es homogénea si* $f(x,y)$ *es una función homogénea de grado cero en sus argumentos.*

RESOLUCIÓN

Las ecuaciones diferenciales homogéneas se resuelven reduciéndolas a ecuaciones de variables separables mediante el cambio de variable: $z = \dfrac{y}{x}$.

TIPO 3. ECUACIONES EXACTAS

Definición.- La e.d.o. $M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0$ es una ecuación exacta si existe una función $u\left(x,y\right)$ tal que $du(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$

Si esto es así, se tendrá que

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \;\Rightarrow\; du(x,y)=0$$

con lo cual la solución general de la ecuación será la familia uniparamétrica $u(x,y)=C$

Para conocer si una ecuación es exacta se utilizará el siguiente test de exactitud.

TEOREMA (CRITERIO DE ECUACIÓN EXACTA).-
Supongamos $M(x,y)$ y $N(x,y)$ funciones con derivadas parciales continuas. La ecuación $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es exacta si y sólo si

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

RESOLUCIÓN

Si la e.d.o. es exacta, existe una función $u(x,y)$ tal que

$$u'_x(x,y)=M(x,y)\,, \qquad u'_y(x,y)=N(x,y)$$

puesto que la solución general de la ecuación es $u(x,y)=C$, debemos hallar $u(x,y)$ realizando los siguientes pasos:

1. Integrar $M(x,y)$ respecto de x

$$u'_x(x,y)=M(x,y) \;\Rightarrow\; u(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y)$$

2. Derivar respecto de y la expresión obtenida para $u\left(x,y\right)$ e igualar a $N\left(x,y\right)$ para despejar $C'\left(x,y\right)$

$$u'_y(x,y)=N(x,y) \;\Rightarrow\; C'(y)=\dots$$

3. Integrar $C'\left(x,y\right)$ respecto de y.

Como es obvio, este proceso se puede comenzar igualmente integrando N respecto de y para luego derivar el resultado respecto de x.

FACTOR INTEGRANTE

En ocasiones es posible convertir ecuaciones que no son exactas en exactas mediante el método del factor integrante.

Definición (Factor integrante).- La función $\mu(x,y)$ *es factor integrante de* $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ *si es exacta la ecuación*

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

La solución general de esta última es la solución general de la ecuación inicial. Con este nuevo término surge la pregunta, ¿en qué condiciones puede encontrarse un factor integrante? Analizamos seguidamente la respuesta.

Sabemos que si $\mu(x,y)$ es factor integrante de la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, la ecuación

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

es exacta. Por tanto, debe ocurrir que

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \Rightarrow M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

y entonces

$$M\frac{\frac{\partial \mu}{\partial y}}{\mu} - N\frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow M\frac{\partial}{\partial y}(\log\mu) - N\frac{\partial}{\partial x}(\log\mu) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

Esta es una ecuación diferencial en derivadas parciales, de la cual sólo vamos a encontrar alguna solución particular y sólo en algún caso concreto, como son los dos siguientes:

CASO 1.- $\mu = \mu(x)$:

El factor integrante depende sólo de x, luego la ecuación anterior queda reducida a

$$\frac{\partial}{\partial x}(\log\mu) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

por lo que, dada una ecuación diferencial, para detectar si estamos en este caso basta ver que el término de la derecha de la expresión anterior es sólo función de x. En caso afirmativo, integramos esta expresión para obtener el factor integrante,

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

CASO 2.- $\mu = \mu(y)$:

Análogamente si el factor integrante depende sólo de y, luego la ecuación se reduce a la siguiente

$$\frac{\partial}{\partial y}(\log\mu) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

encontrando por integración la forma del factor $\mu(y)$ siempre que el segundo término de la expresión anterior dependa sólo de y. El factor integrante resulta ser

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} dy}$$

Por supuesto estos dos casos no cubren todas las posibles ecuaciones para las que se puede encontrar un factor integrante. El mismo método que se ha seguido para saber cuándo existe un factor integrante en función sólo de x o sólo de y, podría aplicarse para factores integrantes en función de xy, $x+y$, etc.

TIPO 4. ECUACIONES LINEALES

Definición.- Una e.d.o. lineal de primer orden es de la forma $y' + p(x)y = q(x)$ *donde* $p(x)$ *y* $q(x)$ *son funciones continuas en la región en la que se integra.*

- Si $q\left(x\right) = 0$ la ecuación se llama lineal homogénea.
- Si $q\left(x\right) \neq 0$ la ecuación se llama completa.

RESOLUCIÓN

La solución general de la ecuación lineal completa se puede obtener siguiendo un método específico basado en el siguiente teorema, que se enuncia sin demostración.

TEOREMA.-
Si se denota por y_p *cualquier solución particular de la ecuación completa* $y' + p(x)y = q(x)$ *y por* y_h *la solución general de la homogénea asociada* $y' + p(x)y = 0$*, entonces la solución general de la ecuación completa es* $y_p + y_h$.
La consecuencia del teorema anterior es que para resolver una ecuación lineal basta encontrar la solución general de su homogénea asociada y una solución particular de la completa.

RESOLUCIÓN DE LA HOMOGÉNEA

No tiene ninguna novedad, pues todas las e.d.o. lineales homogéneas son de variables separables:

$$y' = -p(x)y \;\Rightarrow\; y = Ce^{g(x)} \quad \text{ó} \quad y = 0$$

donde

$$g(x) = -\int p(x)dx$$

La única dificultad puede venir del cálculo de primitivas necesario para la resolución.

SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA COMPLETA

Para encontrar una solución particular de la ecuación completa se puede utilizar el *Método de variación de constantes*, que consiste en buscar una solución particular convirtiendo en función indeterminada la constante de la familia uniparamétrica de soluciones de la homogénea asociada:

$$y_h = Ce^{g(x)} \Rightarrow y_p = C(x)e^{g(x)}$$

Para determinar $C(x)$ se deriva y se impone que se verifique la ecuación diferencial

$$y_p' = e^{g(x)}(C'(x) - C(x)p(x)) \quad \Rightarrow \quad y_p' + p(x)y_p = C'(x)e^{g(x)} = q(x)$$

de aquí se despeja $C'(x)$ y se obtiene $C(x)$ por integración.

$$C'(x) = q(x)e^{-g(x)} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int q(x)e^{-g(x)}dx$$

Por tanto la solución general es:

$$y_g = y_p + y_h = e^{g(x)}\int q(x)e^{-g(x)}dx + Ce^{g(x)}$$

Sacando factor común $e^{g(x)}$ y agrupando la constante de integración con la que se obtendrá al calcular $C(x)$, resulta finalmente,

$$y_g = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

RESOLUCIÓN COMO EXACTA

Escribiendo la ecuación en forma diferencial $\big(p(x)y - q(x)\big)dx + dy = 0$, se observa que siempre va a tener un factor integrante de la forma $\mu = \mu(x)$. Es decir,

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx} = e^{\int p(x)dx}$$

Multiplicando la ecuación por este factor integrante y resolviendo como exacta se llega a la expresión

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int q(x)\mu(x)dx$$

Que coincide con la expresión obtenida por el método de superposición.

RESOLUCIÓN APROXIMADA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

8 Campo de direcciones

La ecuación

$$y' = f(x, y)$$

fija, en cada punto del plano donde f está definida, el valor de la pendiente de la curva $y = y(x)$. La terna (x, y, y') establece la dirección de la recta que pasa por (x, y) y es tangente a la curva solución $y = y(x)$. Así, la ecuación genera un campo de direcciones; la representación gráfica de este campo mediante pequeños segmentos situados en una muestra de puntos del plano es lo que se suele llamar **campo de direcciones** de la ecuación diferencial.

El campo de direcciones de la ecuación proporciona un "mapa" aproximado de las soluciones, pues al representar sus tangentes plasma gráficamente cómo van cambiando estas soluciones.

Además, facilita el trazado de una solución particular, al menos de forma aproximada; esta aproximación es en ocasiones suficiente, como por ejemplo si únicamente fuera de interés el comportamiento de la solución en cuanto a monotonía y concavidad.

9 Isoclinas

Para facilitar el trazado del campo de direcciones suelen utilizarse las curvas en las que la pendiente permanece constante, al ser paralelos sobre sus puntos todos los segmentos que pintemos. Una **isoclina** es el lugar geométrico de los puntos del plano donde la pendiente de las curvas solución es constante, siendo su ecuación $f(x,y)=C$. Las pendientes de las soluciones en los puntos de corte con la isoclina son, por tanto, $y'=C$.

Dando a C un número suficiente de valores próximos podremos dibujar una red de isoclinas que permita representar el campo de direcciones. Uniendo un número finito de los segmentos del campo obtenemos una aproximación gráfica, en forma de poligonal, de la solución particular que se precise. Ver figuras 1 y 2.

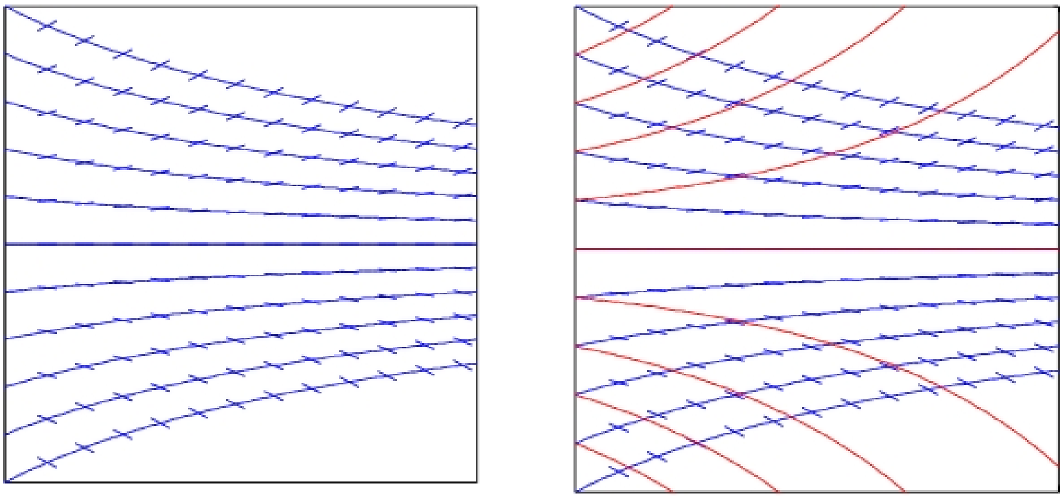

Figura 1.- A la izquierda, muestra de isoclinas (hipérbolas) y del campo de direcciones de la ecuación $y'=xy$; a la derecha se superponen algunas soluciones.

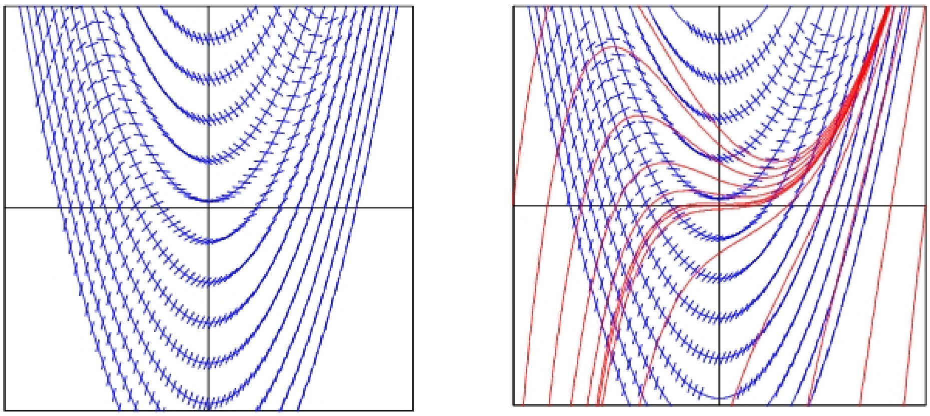

Figura 2.- A la izquierda, muestra de isoclinas (parábolas) y del campo de direcciones de la ecuación $y'=x^2-y$; a la derecha se superponen algunas soluciones.

MODELADO DE PROCESOS FÍSICOS Y PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Para resolver los problemas geométricos es necesario trazar un dibujo de acuerdo con las condiciones del problema, denotar la curva buscada mediante $y = y(x)$ (si el problema se resuelve en coordenadas cartesianas) y expresar todas las magnitudes mencionadas en el problema mediante x, y e y'. De esta manera, la relación indicada se transforma en una ecuación diferencial, resolviendo la cual hallamos la función incógnita $y(x)$.

En los problemas físicos, primeramente es necesario decidir cuál de las magnitudes se toma como variable independiente, y cuál, como función incógnita. A continuación se debe expresar la variación de la función incógnita, $y(x)$, cuando la variable independiente, x, experimente un incremento, Δx, es decir, se debe expresar la diferencia $y(x+\Delta x) - y(x)$ mediante las magnitudes mencionadas en el problema. Dividiendo esta diferencia entre Δx y pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, se obtiene una ecuación diferencial, resolviendo la cual se obtiene la función incógnita y aplicando las condiciones iniciales se determinará el valor de la constante presente en la solución general.

A continuación se recogen algunas aplicaciones de los problemas de valor inicial al modelado de procesos, formulando las leyes físicas necesarias para escribir las ecuaciones diferenciales en cada caso.

10 Disolución en un recipiente

Se considera un recipiente con un volumen inicial dado, V_0 litros, de una cierta disolución líquida o gaseosa. Inicialmente la cantidad de soluto es S_0. En el momento $t = 0$ se comienza a verter disolución con una concentración dada por C_e kg/l a razón de Q_e $l/\min$ y a dejar salir disolución a razón de Q_s $l/\min$. El balance de masa de soluto en el depósito pasado un tiempo t es:

$$masa \ \ acumulada = \ masa \ entrante \ - \ masa \ saliente$$

Si llamamos $S(t)$ y $V(t)$ a la masa de soluto y al volumen en el tanque en el momento t, el incremento de la cantidad de soluto al cabo de un tiempo Δt es:

$$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t) = C_e Q_e \Delta t - \frac{S(t)}{V(t)} Q_s \Delta t$$

Si dividimos ambos miembros por Δt y hacemos que este incremento tienda a 0, resulta la ecuación diferencial

$$\frac{dS}{dt} = C_e Q_e - \frac{S}{V} Q_s$$

Esta ecuación se puede interpretar como

$$tasa \ \ acumulación = \ tasa \ de \ entrada \ - \ tasa \ de \ salida$$

Entendiendo por tasa, la razón de cambio o el ritmo de cambio de la masa de soluto con el tiempo.

Dentro de este problema cabe distinguir dos casos:

- **Caso 1**: $Q_e = Q_s$

  Si se deja salir disolución a la misma razón que está entrando, entonces el volumen permanece constante e igual a V_0, con lo que la ecuación diferencial es

$$\frac{dS}{dt} = C_e Q_e - \frac{Q_s}{V_0} S$$

  Que podrá resolverse por separación de variables ya que el coeficiente $\frac{Q_s}{V_0}$ es constante. Una vez hallada la solución general y aplicada la condición inicial, $S = S_0$ para $t = 0$, se tiene la solución del problema del valor inicial, $S(t)$. Conocida esta solución es posible hallar la concentración en el recipiente

$$C(t) = \frac{S(t)}{V_0}$$

- Caso 2: $Q_e \neq Q_s$

  En este caso el volumen en el tanque depende del tiempo

$$V(t) = V_0 + \left(Q_e - Q_s\right)t$$

  y la ecuación diferencial es

$$\frac{dS}{dt} + \frac{Q_s}{V_0 + \left(Q_e - Q_s\right)t} S = C_e Q_e$$

  que es lineal en $S(t)$. Igual que en el caso anterior, una vez obtenida la solución del problema de valor inicial, $S(t)$, se puede calcular la concentración en el recipiente

$$C(t) = \frac{S(t)}{V_0 + \left(Q_e - Q_s\right)t}$$

11 La razón de cambio de una variable es proporcional al valor de la variable en cada instante

Podemos citar varios procesos que responden a este modelo: el ritmo de cambio de una población, la velocidad a la que una sustancia A se transforma en otra en una reacción química simple, los procesos de desintegración radiactiva o el ritmo de cambio de la velocidad de un móvil debido a fuerzas de rozamiento.

La ecuación diferencial que rige estos procesos es

$$\frac{dy}{dt} = \pm ky$$

La constante k introduce en la ecuación una medida de la rapidez con la que se produce el cambio en la magnitud estudiada. El valor de k es propio de cada proceso y si no se conoce, se podrá determinar conociendo dos datos del valor de y, en $t = 0$ y en otro instante t.

- La cantidad inicial, $y(0)$, acompañará a la ecuación para definir un problema de valor inicial y se utilizará para encontrar la forma de su solución particular.

- El dato en otro valor del tiempo se impondrá a la solución anterior para determinar el valor de k y con ello la función $y(t)$.

12 Cambio de temperatura de un objeto

Experimentalmente se ha comprobado que la temperatura de un cuerpo cambia proporcionalmente a la diferencia entre su temperatura y la del medio en que se encuentra. Esta es una formulación básica de la ley de enfriamiento de Newton. Si para el momento en que se empieza a estudiar el proceso, $t = 0$, la temperatura del cuerpo es $T(0) = T_0$, y la temperatura del medio es T_m, la propiedad anterior es

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

La ecuación irá acompañada de la condición inicial $T(0) = T_0$ y se deberá contar con otro dato de la temperatura para determinar el valor de la constante k al igual que ocurría en la aplicación anterior.

13 Flujo de calor en una dimensión en estado estacionario

El flujo de calor en una dimensión se gobierna por la ecuación

$$H = kA\frac{dT}{dr}$$

donde H es la cantidad de calor fluyendo a través de un material (cal / sg), k es el coeficiente de conductividad térmica ($cal / (^\circ C \cdot cm \cdot sg)$), A es el área perpendicular al flujo del calor (cm^2), T es la temperatura ($^\circ C$) y r es la distancia (cm).

Por una tubería de sección transversal circular por la que está circulando vapor, el flujo de calor es perpendicular al flujo de vapor. Supondremos tanto simetría axial como radial. Si tomamos una porción de tubería de 1 cm de longitud, el área de la superficie para un radio r es $2\pi r \cdot 1 = 2\pi r$. La variable r varía desde el radio interno (r_0) hasta el radio externo. Llamaremos T_0 a la temperatura del vapor en r_0, es decir, en la pared interna del tubo. Si la tasa de flujo, H, y el coeficiente k de conductividad térmica son conocidos, la ecuación anterior modela la distribución de temperatura hacia el exterior de la pared de esa parte del tubo:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{H}{2\pi rk}$$

Junto con la condición $T = T_0$ en $r = r_0$.

14 Trayectorias isógonas

Se llaman trayectorias isógonas a las familias de curvas que se cortan bajo un ángulo dado.

Si todos los cortes entre curvas de dos familias se producen bajo un ángulo de φ radianes, quiere decir que las rectas tangentes en los puntos de corte forman ése ángulo φ.

Por lo tanto, si

- $y_1' = tg\alpha$, es la pendiente de las curvas de la primera familia, e
- $y_2' = tg\beta$, es la pendiente de las trayectorias isógonas

se cumple, $\beta = \alpha + \varphi$, y la relación entre las pendientes de ambas familias es:

$$y_1' = tg\alpha = tg\left(\beta - \varphi\right) = \frac{tg\beta - tg\varphi}{1 + tg\beta tg\varphi} = \frac{y_2' - tg\varphi}{1 + y_2'\, tg\varphi}$$

Suponiendo que se conozca la ecuación diferencial de una de éstas familias, la ecuación diferencial de la otra familia se obtendrá sin más que sustituir la derivada conocida por su expresión en función de la derivada de la familia buscada.

Por ejemplo, si conocemos la edo $y' = f(x,y)$, la edo de sus trayectorias isógonas con ángulo φ es:

$$\frac{y' - tg\varphi}{1 + y' tg\varphi} = f(x,y)$$

En el caso de que las trayectorias sean ortogonales, la relación entre las pendientes es:

$$y_1' = -\frac{1}{y_2'}$$

Lo cual, aplicado a la edo $y' = f(x,y)$, conduce a la edo de las trayectorias ortogonales,

$$-\frac{1}{y'} = f(x,y)$$

15 Líneas de flujo o líneas de fuerza

Recordemos que las líneas de flujo de un campo vectorial, son las trayectorias seguidas por una partícula cuyo campo de velocidad es el campo vectorial dado. De esta forma los vectores del campo son tangentes a las líneas de flujo en cada punto.

Llamando,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,\mathrm{y},\mathrm{z})\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

la condición para que la curva cuyo vector desplazamiento es $d\mathbf{r}$ sea una línea de flujo del campo $\mathbf{F}$ se traduce en el siguiente sistema,

$$\frac{dx}{M} = \frac{dy}{N} = \frac{dz}{P}$$

que establece la proporcionalidad entre las componentes de los vectores $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$. La resolución de este sistema conduce a la familia de curvas buscada.

Ejercicios propuestos

1 Halla la e.d.o. de primer orden cuya solución general es la familia $y = \sqrt{x^2 - Cx}$

Solución: $2xydy = (x^2 + y^2)dx$

2 Las expresiones

1) $y_1(x) = C - 3\cos 2x$

2) $y_2(x) = \log(C^2 + e^x)$

corresponden a dos familias uniparamétricas de curvas porque cada valor real del parámetro C proporciona una curva diferente.

a. Comprueba que todas las curvas de la familia 1) verifican la relación $y' = 6\,sen\left(2x\right)$

b. Encuentra la ecuación diferencial de la familia 2).

c. Encuentra la curva de cada familia que pasa por el punto $P\left(1,2\right)$.

d. Lo que has realizado en el apartado anterior ¿se podría hacer para cualquier punto $P\left(x_o, y_o\right)$ del plano con ambas familias?

Solución: b) $y' = e^{x-y}$

c) $y_1(x) = 2 + 3(\cos 2 - \cos 2x)$;

$y_2(x) = \log(e^2 - e + e^x)$

3 Una familia de curvas también puede venir dada por una expresión implícita. Por ejemplo $(x-1)^2 + (y+2)^2 = C^2$ es la familia de circunferencias centradas en $(1,-2)$ y radio $|\,C\,|$.

a. Utilizando derivación implícita, prueba que todas las curvas de la familia anterior verifican la relación $y'(x) = \dfrac{1-x}{y+2}$

b. Encuentra la curva de esa familia que pasa por el punto $P(3,0)$.

c. Analiza si es posible encontrar una curva de esa familia pasando por cualquier punto $P(x_0, y_0)$ del plano.

Solución: b) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$

4 Para la familia $x^3y^3 - x^2 = C$

a. Encuentra la relación entre x, y e y' que verifica cada curva de la familia; esto es más sencillo si se utiliza derivación implícita.

b. Determina la curva de esa familia que pasa por el punto $P(1,4)$.

c. Analiza si es posible encontrar una curva de esa familia pasando por cualquier punto $P(x_0, y_0)$ del plano.

Solución: a) $y' = \dfrac{2 - 3xy^3}{3x^2y^2}$

b) $x^3y^3 - x^2 = 63$

5 Comprueba que las familias de curvas definidas por las funciones siguientes son ortogonales[1]: $x^2 - y^2 = ky$, $x^3 + 3xy^2 = C$

6 Dada la ecuación diferencial $y' = 2x$

a. Busca todas las funciones $y = y(x)$ que la verifican. Debes obtener una familia uniparamétrica de curvas (esto es lo que se llama solución general de la ecuación).

b. Si no fuera tan sencillo encontrar la familia de soluciones, una herramienta que facilita el estudio de su comportamiento es el método de las isoclinas (una isoclina es el lugar geométrico de los puntos del plano donde la pendiente de las soluciones es la misma) y el dibujo del campo de direcciones (que es una muestra de pequeños segmentos de las rectas tangentes a las curvas solución). Representa las isoclinas de pendientes $\left\{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\right\}$ y sobre ellas el campo de direcciones.

c. Representa las soluciones que pasan por los puntos $\left(0,-0.5\right)$, $\left(0,0\right)$ y $\left(0,0.5\right)$.

---

[1]Todas los cortes entre curvas de ambas familias se producen perpendicularmente, luego las pendientes en los puntos de corte distan $\pi / 2$ radianes; puesto que $tg\,(\alpha + \pi / 2) = -1 / tg\,\alpha$ esto significa que la derivada de una familia es inversa y opuesta a la de la otra.

Solución: a) $y = x^2 + C$

7 Sin encontrar su expresión, analiza crecimiento y concavidad de las curvas solución de cada una de la siguientes ecuaciones:

a. $y' = x + 1$

b. $y' = (y-1)^2$

Solución: a) decreciente: $x \in (-\infty, -1)$, creciente: $x \in (-1, \infty)$; cóncava.

b) crecientes y cóncavas si $y > 1$, crecientes y convexas si $y < 1$

8 Para cada una de las siguientes ecuaciones,

1) $y' = xy$ 2) $y' = x + y$ 3) $y' = x^2 - y$

contesta a estas preguntas:

a. Traza a mano una muestra de las isoclinas correspondientes a cada ecuación. Sobre cada isoclina traza los segmentos que indican la pendiente de esa isoclina.

b. Estudia la monotonía y la concavidad de las curvas solución y comprueba que concuerda con el campo de direcciones representado en el apartado anterior.

Solución: 1) Crecientes en $xy > 0$, (1° y 3^er cuadrantes); decrecientes en $xy < 0$ (2° y 4°cuadrantes); cóncavas en $y > 0$; convexas en $y < 0$.

2) Crecientes en $y + x > 0$; decrecientes en $y + x < 0$; cóncavas en $y + x + 1 > 0$; convexas en $y + x + 1 < 0$.

3) Crecientes en $y < x^2$; decrecientes en $y > x^2$; cóncavas en $y > x^2 - 2x$; convexas en $y < x^2 - 2x$.

9 Encuentra la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial, comprobando si se verifican o no las condiciones de existencia y unicidad de solución:

a. $(1+e^x)yy' = e^y$, $y(0) = 0$

b. $y \log y\,dx + x\,dy = 0$, $y(1) = 1$

c. $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$, $y(0) = 1$

Solución: a) $e^{-y}(1+y) = 1 - x + \log\dfrac{1+e^x}{2}$

b) $y(x) = 1$ c) $y(x) = 1$, $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1$

10 Halla la solución general de las ecuaciones siguientes transformándolas en una de variables separables mediante los cambios de variable que se indican.

a. $2x + 2y - 1 = -y'(x + y - 2)$;
cambio: $z = x + y$

b. $y' = \cos(x - y + 5)$;
cambio: $z = x - y + 5$

Solución:

a) $x + y + 1 = C\exp\dfrac{2x+y}{3}, \quad (C \geq 0)$;

b) $x + C = -\operatorname{cotg}\left(\dfrac{x-y+5}{2}\right)$

11 Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones:

a. $x(2x^2 + y^2)dx + y(x^2 + 2y^2)dy = 0$

b. $(3x^2 - y^2)dx - 2xy\,dy = 0$

c. $\left(2x + \dfrac{x^2+y^2}{x^2 y}\right)dx = \dfrac{x^2+y^2}{xy^2}dy$

Solución: a) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = C$

b) $x^3 - xy^2 = C$ c) $x^2 - y^2 + x^3 y = Cxy$

12 Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones, utilizando un factor integrante. En el primer caso, la ecuación admite factor integrante de la forma $\mu = \mu(x)$ y en el segundo de la forma $\mu = \mu(y)$:

a. $(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0$

b. $x\,dx + y\,dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0$

Solución: a) $xy^2 - 2x^2 y - 2 = Cx$

b) $x^2 + 2y - 1 = C(1-y)^2$

13 Para cada uno de los casos siguientes, encuentra la solución general y la particular si la ecuación se acompaña de una condición inicial:

a. $y' = (1-y)\cos x$, $y(\pi) = 2$

b. $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$

c. $xy' + (2x - 3)y = 4x^4$

d. $ydx + (xy + x - 3y)dy = 0$

e. $uv' = v(1 - u\,\mathrm{tg}\,u) + u^2 \cos u$

f. $r\theta' = 3\theta + r^4 e^r + r^5 e^{-r}$, $\theta(-2) = 8\mathrm{Ch}\,2$

Solución: a) $y_g(x) = 1 + Ce^{-\,sen\,x}$,

$y_p(x) = 1 + e^{-\,sen\,x}$, b) $y^2 - 3xy + 2x^2 = C$

c) $y_g(x) = x^3(2 + Ce^{-2x})$

d) $x_g(y) = C\dfrac{e^{-y}}{y} + 3\dfrac{y-1}{y}$,

e) $v_g(u) = u(u + C)\cos u$

f) $\theta_p(r) = r^3(C + e^r - e^{-r} - re^{-r})$

14 Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y' = \dfrac{y}{x - y}$;

b) $y' = \dfrac{2y - x}{2x - y}$;

c) $\left(x\,\mathrm{sen}\dfrac{y}{x} - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\,\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)dy = 0$

Solución: a) $y(x) = C \cdot e^{-x/y}$;

b) $y - x = C\cdot\left(y + x\right)^3$; c) $x \cdot \mathrm{sen}\dfrac{y}{x} = C$

15 [2]Se vierte agua con 0.5 kg de sal por litro (l) a un tanque a razón de 2 l/min, y la mezcla homogénea sale al mismo ritmo. Tras 10 min, se para el proceso y se vierte agua limpia a razón de 2 l/min, con la nueva mezcla saliendo a la misma razón. Si inicialmente había 100 litros de agua pura en el depósito, se pide:

Escribe las ecuaciones que rigen este proceso para la cantidad (en kg) de sal en el tanque en función del tiempo (observa que habrá dos ecuaciones, según que el tiempo sea menor o mayor que 10 min.)

Encuentra la cantidad de sal en el tanque a los 20 min., resolviendo analíticamente las ecuaciones anteriores.

Solución: b) $S(20) = 7.42053\ kg$;

[2]Tomado de *Applied Mathematical Methods for Chemical Engineers* de Loney.

16 Un tanque con agua está recibiendo tierra arrastrada por una riada a razón de 700 dm^3 / sg. El agua arrastra 53 gr / dm^3 de tierra y el tanque contiene inicialmente 113,2 m^3 de agua limpia. Un desagüe en el tanque permite salir la mezcla a razón de 140 dm^3 / sg.

a. Encontrar la ecuación que verifica $S(t)$, que es la cantidad de tierra en el tanque, transcurrido el tiempo t. (Recordar que la tasa de cambio de $S(t)$ será la diferencia entre la tasa de entrada y la tasa de salida).

b. Resolver analíticamente la ecuación obtenida en el apartado anterior.

Solución: b) $S(1800) = 5.6042 \cdot 10^7\ gr$

17 Un bote de masa m, disminuye su movimiento bajo la acción de la fuerza de resistencia del agua, la cual es proporcional a la velocidad del bote. La velocidad inicial del bote es 1,5 m/sg, y al cabo de 4 s su velocidad es 1 m/sg.

a. ¿Al cabo de cuánto tiempo la velocidad disminuirá hasta 1 cm/sg?

b. ¿Qué distancia recorrerá el bote hasta detenerse?

Solución: a) $t \approx 49,4\,sg$ b) $s \approx 14,8\,m$

18 Se dispone inicialmente de 2 gr de un elemento radiactivo en proceso de desintegración. Al cabo de 3 sg quedan 1,4 gr. ¿Cuánto tardará en descomponerse 0,5 gr más?

Solución: $t \approx 6,7\,sg$

19 Dos recipientes de igual capacidad se llenan del líquidos diferentes. El recipiente A se mantiene a 10°C y el B a 80°C. Una pequeña pieza metálica con temperatura inicial de 30°C se introduce en el recipiente A, donde su temperatura baja a 25°C durante el primer minuto; a los 2 minutos (desde el comienzo) se saca de A y se introduce en B, donde pasado otro minuto alcanza los 40°C. ¿Cuánto tiempo, contado desde el principio del proceso, tardará la pieza en llegar a 60°C?

Nota: Experimentalmente se ha comprobado que la temperatura de un cuerpo cambia proporcionalmente a la diferencia entre su temperatura y la del medio en que se encuentra: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m), (k > 0)$

Donde, T_m es la temperatura del medio

Solución: La temperatura durante los 2 primeros minutos es $T(t) = 10 + 20\left(\frac{3}{4}\right)^t$ y para los siguientes minutos $T(t) = 80 - \frac{235}{4}\left(\frac{32}{47}\right)^{t-2}$. La temperatura será de 60°C para $t \approx 4{,}8\,\text{min}$.

20 Un depósito contiene inicialmente 110 gr de sal disueltos en 10 litros de disolución. Durante los 7 primeros minutos se vierte disolución a razón de 25 cl/min con 12 gr/l de sal. Tras esos 7 min se abre un orificio de salida (el flujo de entrada se mantiene igual y con la misma concentración).

CASO 1: Supón que el flujo de salida es 25 cl/min. Calcula en ese supuesto la cantidad de sal en el depósito cuando hayan transcurrido 7 min. más.

CASO 2: Supón que el flujo de salida es 1/6 l/min. Calcula en ese supuesto la cantidad de sal en el depósito cuando se empiece a desbordar, sabiendo que su capacidad total es 18 litros.

Solución: a) $t \approx 132{,}4$ min. b) $t \approx 211{,}7$ gr.

21 Obtener la ecuación diferencial de las circunferencias de radio 1, cuyos centros se encuentran en la recta $y = 2x$.

Solución: $(y-2x)^2(1+y'^2) = (2y+1)^2$

22 Obtener la ecuación diferencial de las parábolas cuyo eje de simetría es paralelo al eje OY y que son tangentes, simuláneamente, a las rectas $y = 0$ e $y = x$.

Solución: Solución: $xy'^2 - 2yy' + y = 0$

23 Obtener las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y = Cx^4$.

Solución: e.d.o.: $y' = -\frac{x}{4y}$; $4y^2 + x^2 = C$

24 Obtener la ecuación de las trayectorias que cortan a la familia de curvas de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, bajo un ángulo de 45°.

Solución: e.d.o. $y' = \frac{y-x}{y+x}$;

$$\frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$$

25 Obtener la ecuación de las líneas de flujo de los siguientes campos vectoriales:

a. $\mathbf{F} = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

b. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

c. $\mathbf{F} = (1, 2x, 0)$

Solución: a) $xy = C$; b) $y = mx$;

c) $\begin{cases} y = x^2 + C_1 \\ z = C_2 \end{cases}$

Test de autoevaluación

1 La curva que pasa por el punto $(0,1)$ y cumple que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto es el triple que la abscisa del punto de contacto es:

A) $y = \frac{3}{2}x^2$

B) $y = \frac{3}{2}x^2 - 1$

C) $y = \frac{3}{2}x^2 + 1$

D) Ninguna de las anteriores.

2 El cambio de variable $x = e^t$ transforma la ecuación $3xy' + y = \frac{1}{x}$ en:

A) $y' + y = e^t$

B) $3y' + y = e^{-t}$.

C) $3y' - y = e^{-t}$

D) Ninguna de las anteriores.

3 La ecuación diferencial de la familia uniparamétrica de curvas definida por $y = C\sqrt{x^2 + 4}$ es:

A) $(x^2 + 4)y' = xy$

B) $(x^2 + 4)y' = 2xy$

C) $(x^2 + 4) = 2xyy'$

D) Ninguna de las anteriores.

4 La ecuación de la curva que pasa por el punto $(1,1)$ y tiene pendiente $y' = -\dfrac{9x}{16y}$, es:

A) $8y^2 + 9x^2 = 25$

B) $16y^2 + 9x^2 = 25$

C) $16y^2 - 9x^2 = 25$

D) Ninguna de las anteriores.

5 Las trayectorias ortogonales a la familia $x^2 = Cy$, son:

A) $2y^2 - x^2 = K$

B) $y^2 + x^2 = K$

C) $2y^2 + x^2 = K$

D) Ninguna de las anteriores.

6 Sea $f(x,y)$ una función homogénea de grado 2. Si $f(1,1/2) = 3$, entonces

A) $f(4,2) = 48$

B) $f(4,2) = 16$

C) $f(4,2) = 24$

D) Ninguna de las anteriores.

7 Dada la ecuación diferencial $ydx + (1 + y^2 - x)dy = 0$, se puede afirmar que:

A) $\dfrac{1}{x^2}$ es un factor integrante.

B) $\dfrac{1}{y^2}$ es un factor integrante.

C) No tiene factor integrante.

D) Ninguna de las anteriores.

8 Las constantes *A* y *B*, tales que $y_p(x) = A \operatorname{sen} x + B \cos x$ sea una solución de $y' + y = 2 \operatorname{sen} x$, son :

A) $B = 0, \; A = 2$

B) $B = 2, \; A = 0$

C) $A = 1, \; B = -1$

D) Ninguna de las anteriores.

9 Una solución particular de la ecuación diferencial $y' + 2xy = 4x$ es de la forma,

A) $y_p = C(x)e^{-x^2}$

B) $y_p = C(x)e^{x^2}$

C) $y_p = Ce^{-x^2}$

D) Ninguna de las anteriores.

10 La ecuación de la isoclina $y' = 2$ de la familia de curvas $y = \operatorname{tg}\big(\log(Cx)\big)$ es:

A) $x = y^2$

B) $2x = 1 - y^2$

C) $2x = 1 + y^2$

D) Ninguna de las anteriores.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	A	B	C	A	B	C	A	C

Ejercicios resueltos

1

Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es la familia de curvas $y = C\,x + x^2$.

Solución

Se elimina la constante C del sistema $\begin{cases} y = C\,x + x^2 \\ y' = C + 2x \end{cases}$ resultando, $y' = \dfrac{y}{x} + x$

2

Encontrar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales, por separación de variables:

a) $dy = e^{3x-2y}dx$

b) $(1+y^2)dx = xdy$

c) $2x^2y\,dy = \left(1+x^2\right)dx$

d) $dy + y\,\mathrm{tg}\,x\,dx = 0$

Solución

a) $e^{2y}dy = e^{3x}dx \quad \Rightarrow \quad 2y = \log\left(\dfrac{2}{3}e^{3x} + C\right)$

b) $(1+y^2)dx = xdy \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{1+y^2}, \quad x = 0, \quad 1+y^2 = 0$

Integrando se obtiene la solución general:

$$\log x = \mathrm{arctg}\,y + \log C \qquad \Rightarrow \qquad y = \mathrm{tg}\left(\log(Cx)\right)$$

$x = 0$, es solución singular.

c) Separamos las variables

$$2\,y\,dy = \frac{1+x^2}{x^2}dx = \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)dx, \qquad x = 0$$

$$\int 2\,ydy = \int\left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx \;\Rightarrow\; y^2 = -\frac{1}{x} + x + C$$

$x = 0$, es solución singular.

Procedemos de forma análoga a los casos anteriores:

$$\frac{dy}{y} = -\,\mathrm{tg}\,x\,dx\,, \quad y = 0, \quad \cos x = 0 \quad \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -\int\mathrm{tg}\,x\;dx = -\int\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}dx$$

$$\log\left|y\right| = \log C + \log\left|\cos x\right| = \log\left|C\cos x\right| \;\Rightarrow\; y = C\cos x$$

3

Resolver la ecuación diferencial $y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)dy = 0$, utilizando el cambio de variable $xy = z$.

Solución

$$y = \frac{z}{x} \qquad \Rightarrow \qquad dy = \frac{xdz - zdx}{x^2}$$

Sustituyendo en la e.d.o. el valor de dy se tiene,

$$y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)\frac{xdz - zdx}{x^2} = 0$$

$$xy(xy+1)dx + (1+xy+x^2y^2)(xdz - zdx) = 0$$

Sustituyendo también $xy = z$, se obtiene la nueva ecuación en las variables $z,\ x$:

$$z(z+1)dx + (1+z+z^2)(xdz - zdx) = 0$$

$$(z^2 + z - z - z^2 - z^3)dx + x(1+z+z^2)dz = 0$$

$$z^3 dx - x\left(1+z+z^2\right)dz = 0$$

que es de variables separables:

$$\frac{dx}{x} = \frac{1+z+z^2}{z^3}dz\,, \quad x = 0\,, \quad z = 0$$

Integrando miembro a miembro, se llega a

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1+z+z^2}{z^3}dz \;\rightarrow\; \log\left|x\right| = \int\left(\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\right)dz = -\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{z} + \log\left|z\right| + C$$

y, deshaciendo el cambio de variable se obtiene la solución general,

$$2x^2y^2\log\left|y\right| - 2xy - 1 = Cx^2y^2$$

A esta solución añadiremos las soluciones singulares: $x = 0, \quad y = 0$.

Se puede comprobar que la solución general obtenida es correcta, derivando implícitamente respecto de x la expresión,

$$2\log y - \frac{2}{xy} - \frac{1}{x^2y^2} = C$$

Derivamos

$$\frac{2y'}{y} + \frac{2(y+xy')}{x^2y^2} + \frac{2(xy^2 + x^2yy')}{x^4y^4} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2y'}{y} + \frac{2(y+xy')}{x^2y^2} + \frac{2(y+xy')}{x^3y^3} = 0$$

dividiendo entre 2 y multiplicando por x^3y^3, se tiene

$$x^3y^2y' + xy^2 + x^2yy' + y + xy' = 0 \quad \rightarrow \quad x(x^2y^2 + xy + 1)y' + y(xy+1) = 0$$

cambiando $y' = \dfrac{dy}{dx}$, se obtiene finalmente,

$$y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)dy = 0$$

que es la ecuación diferencial del enunciado.

4 Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $ydx - \left(x+y\right)dy = 0$ b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$ c) $(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0$

Solución

a) Comprobamos que la ecuación diferencial $ydx - \left(x+y\right)dy = 0$ es homogénea. Despejamos y', así:

$$y' = \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{y}{x+y} = f(x,y)\ , \quad \text{siendo} \quad f(tx,ty) = \frac{t\,y}{t\,x + t\,y} = f(x,y)$$

Como la función $f(x,y)$ es homogénea de grado cero en sus argumentos, la e.d.o. es homogénea. Se resuelve haciendo el cambio:

$$\frac{y}{x} = u \quad \Rightarrow \quad y = ux \quad \Rightarrow \quad dy = udx + xdu$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial inicial y separando variables, tenemos:

$$u\,xdx - (x+ux)(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(u\,x - x\,u - u^2x)dx = (x + u\,x)xdu \quad \Rightarrow \quad -u^2xdx = x^2(1+u)du$$

$$-\frac{d\,x}{x} = \frac{1+u}{u^2}du, \quad x=0, \quad y=0 \quad \Rightarrow \quad -\int \frac{d\,x}{x} = \int \frac{1+u}{u^2}du = \int \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u}\right)du \quad \Rightarrow$$

$$-\log\left|x\right| = -\frac{1}{u} + \log\left|u\right| + \log C$$

Deshaciendo el cambio:

$$-\log\left|x\right| = -\frac{x}{y} + \log\left|\frac{y}{x}\right| + \log C \quad \Rightarrow \quad \log\left|\frac{y}{x}\right| = -\log\left|x\right| + \log\left(e^{x/y}\right) + \log K$$

$$\log\left|\frac{y}{x}\right| = \log\left|\frac{Ke^{x/y}}{x}\right| \quad \Rightarrow \quad y = Ke^{x/y}$$

Soluciones singulares: $x = 0, \quad y = 0$.

b) La segunda ecuación también es homogénea, ya que:

$$y' = \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = f(x,y)\ , \quad \text{siendo} \quad f(tx,ty) = \frac{t\,y}{t\,x} - \frac{t\,x}{t\,y} = f(x,y)$$

Efectuamos el cambio: $\dfrac{y}{x} = u \quad \Rightarrow \quad y = ux \quad \Rightarrow \quad dy = udx + xdu$.

Sustituimos en la ecuación:

$$\frac{xdu+udx}{dx}=u-\frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad xdu+udx=udx-\frac{1}{u}dx \quad \Rightarrow \quad udu=-\frac{1}{x}dx$$

Integrando:

$$\int udu=-\int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{u^2}{2}=-\log|x|+\log C$$

Deshaciendo el cambio quedará:

$$\frac{y^2}{2\,x^2}=-\log|x|+\log C \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2\,x^2}+\log|x|=K$$

a) Es una ecuación homogénea, por tanto el cambio es:

$$y=zx \quad \Rightarrow \quad dy=zdx+xdz$$

Sustituyendo en la edo, se obtiene una ecuación de variables separables

$$(1-z^2)dx+zxdz=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x}=\frac{zdz}{z^2-1}$$

Y, resolviendo,

$$\log Cx=\frac{1}{2}\log(z^2-1) \quad \Rightarrow \quad Cx=\sqrt{z^2-1}$$

Finalmente, deshaciendo el cambio se obtiene la solución general $y^2=x^2+Cx^4$.

Además son soluciones singulares $x=0$, $y=x$, $y=-x$

5 Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $(\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y-xe^y)dy=(e^y+\cos x\cos y)dx$

b) $(4x+3y^3)dx+3xy^2dy=0$ c) $(x^2-y)dx+(y^2-x)dy=0$

Solución

a) Comprobamos si es diferencial exacta:

$$\left.\begin{array}{lcl} M(x,y)=-e^y-\cos x\cos y & \Rightarrow & \dfrac{\partial M}{\partial y}=-e^y+\cos x\operatorname{sen}y \\ N(x,y)=\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y-xe^y & \Rightarrow & \dfrac{\partial N}{\partial x}=-e^y+\cos x\operatorname{sen}y \end{array}\right\}$$

Buscamos la solución:

$$f(x,y)=-\int\left(e^y+\cos x\cos y\right)dx=-\left(xe^y+\operatorname{sen}x\cos y\right)+\phi(y)$$

Derivando esta solución e igualando a $N(x,y)$, se obtiene $\phi(y)$:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - xe^{y} + \phi'(y) \\ N(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - xe^{y}\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = C$$

La solución es:

$$xe^{y} + \operatorname{sen} x \cos y = C$$

b) Comprobamos si es diferencial exacta:

$$\left.\begin{array}{lcl} M(x,y) = 4x + 3y^{3} & \Rightarrow & \dfrac{\partial M}{\partial y} = 9y^{2} \\ N(x,y) = 3xy^{2} & \Rightarrow & \dfrac{\partial N}{\partial x} = 3y^{2}\end{array}\right\}$$

No es exacta, por lo que buscamos un factor integrante. Como

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{6y^{2}}{3xy^{2}} = \frac{2}{x}$$

El factor integrante sólo depende de x :

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{\log x^{2}} = x^{2}$$

La ecuación $(4x^{2} + 3x^{2}y^{3})dx + 3x^{3}y^{2}dy = 0$ es exacta y su solución es:

$$x^{4} + x^{3}y^{3} = C$$

c) Es exacta, ya que las funciones $M(x,y) = x^{2} - y$, $N(x,y) = y^{2} - x$ son continuas en $\mathbb{R}^{2}$ y además verifican:

$$\frac{\partial\, M(x,y)}{\partial\, y} = \frac{\partial\, N(x,y)}{\partial\, x} = -1 \,.$$

Para obtener la función $f(x,y)$ que nos resuelve el problema, planteamos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{\begin{array}{ll} 1) & M(x,y) = x^{2} - y = \dfrac{\partial\, f}{\partial\, x} \\ 2) & N(x,y) = y^{2} - x = \dfrac{\partial\, f}{\partial\, y}\end{array}\right\}$$

Integramos ahora bien la ecuación (1) respecto a x , o bien la ecuación (2) respecto a y . En este caso, integramos la ecuación (1) así:

$$\int \frac{\partial\, f}{\partial\, x} dx = \int (x^{2} - y) dx \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \frac{x^{3}}{3} - y\,x + g(y)$$

La función $g(y)$ es una función de y que tenemos que determinar, actúa como una constante de integración en el proceso de integrar respecto a x la función $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, que depende de dos variables x e y. La expresión de $f(x,y)$ que hemos obtenido al integrar la ecuación (1) la sustituimos ahora en la ecuación (2), resultando:

$$y^2 - x = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} - y\,x + g(y)\right) = -x + g'(y)$$

Identificando ambos miembros de la igualdad, tenemos:

$$y^2 = g'(y) \quad \Rightarrow \quad \int g'(y)dy = \int y^2 dy \quad \Rightarrow \quad g(y) = \frac{y^3}{3} + C_1$$

Sustituyendo en la función f(x,y) nos queda como solución de la ecuación diferencial

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - y\,x + \frac{y^3}{3} = C$$

6

Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $xy' - 3y = x^4$ b) $(1+x^2)dy + 2xydx = \operatorname{cotg} x dx$

Solución

a) $xy' - 3y = x^4$

Dividimos entre x, suponiendo $x \neq 0$: $y' - \frac{3}{x}y = x^3$ (forma canónica)

Método del factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{\log\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{x^3}$$

Multiplicando por este factor resulta la ecuación diferencial exacta

$$\left(-\frac{3y}{x^4} - 1\right)dx + \frac{1}{x^3}dy = 0$$

Cuya solución es:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int q(x)\mu(x)dx\right) = x^3\left(\int dx\right) = x^4 + Cx^3$$

$x = 0$, no es solución.

Método de la solución particular más la homogénea: $y = y_h + y_p$

Homogénea:

$$y' - \frac{3}{x}y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{3}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \log y = \log Cx^3 \quad \Rightarrow \quad y_h = Cx^3$$

Particular:

$$y_p = x^3 C(x) \quad \Rightarrow \quad y_p' = x^3 C'(x) + 3x^2 C(x)$$

Sustituyendo en la ecuación completa se tiene,

$$x^4 C'(x) + 3x^3 C(x) - 3x^3 C(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad C'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad C(x) = x$$

Por lo tanto,

$$y = y_h + y_p = Cx^3 + x^4$$

b) $(1+x^2)dy + 2xydx = \operatorname{cotg} x dx$

Método del factor integrante:

Dividimos entre $\left(1+x^2\right)dx \neq 0$ para obtener la forma canónica de la ecuación:

$$y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{\operatorname{cotg} x}{1+x^2}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{\log(1+x^2)} = 1 + x^2$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int q(x)\mu(x)dx\right) = \frac{1}{1+x^2}\left(\int \operatorname{cotg} x dx\right) = \frac{1}{1+x^2}\left(\log\left|\operatorname{sen} x\right| + C\right)$$

7 Resolver la ecuación diferencial $y' + 2xy = 4x$

Solución

La solución general de la ecuación completa es $y\left(x\right) = y_p\left(x\right) + y_h\left(x\right)$.

Primero se resuelve la ecuación homogénea, que es de variables separadas

$$y' + 2xy = 0 \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -2xdx \quad \to \quad \log\left|y\right| = -x^2 + \log C \quad \to \quad y = Ce^{-x^2}$$

Buscamos una solución particular de la ecuación completa:

$$y_p(x) = C\left(x\right)e^{-x^2} \quad \to \quad y'_p(x) = e^{-x^2}\left(C'\left(x\right) - 2xC\left(x\right)\right)$$

Sustituyendo en la ecuación inicial

$$y_p' + 2xy_p = 4x \quad \to \quad e^{-x^2}\left(C'\left(x\right) - 2xC\left(x\right)\right) + 2xC\left(x\right)e^{-x^2} = 4x$$

$$e^{-x^2}C'\left(x\right) = 4x \quad \to \quad C\left(x\right) = \int 4x\, e^{x^2} dx = 2e^{x^2}$$

$$y(x) = Ce^{-x^2} + 2\,e^{x^2}e^{-x^2} = Ce^{-x^2} + 2$$

8 Un tanque de 10L de capacidad que está inicialmente lleno de agua pura, recibe una disolución salada con una concentración de sal de 0,3kg/L a una velocidad de 2L/min. La solución dentro del tanque se mantiene agitada y fluye hacia el exterior a una velocidad de 2L/min.

a) Determinar el tiempo necesario para que la concentración de sal en el tanque sea de 0,2kg/L.

b) ¿Cuál es la máxima cantidad de sal que se puede acumular en el tanque?

Solución

a) Sea t la variable independiente (tiempo en minutos).

Sea $y(t)$ la cantidad de sal en el tanque en el tiempo t.

La variación de la cantidad de sal en el tanque en el intervalo $\left(t, t+\Delta t\right)$ es:

$$\Delta y(t) = sal\ \ entrante - sal\ \ saliente$$

donde,

$$\begin{cases} sal\ \ entrante = 0,3\dfrac{kg}{L}\cdot 2\dfrac{L}{\min}\cdot \Delta t \min = 0,6\Delta t\ \ kg \\ sal\ \ saliente = \dfrac{y(t)}{10}\dfrac{kg}{L}\cdot 2\dfrac{L}{\min}\cdot \Delta t \min = 0,2y(t)\Delta t\ \ \ kg \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\Delta y(t) = 0,6\Delta t - 0,2y(t)\Delta t$$

Dividiendo entre Δt y tomando límites cuando $\Delta t \to 0$, se obtiene la ecuación diferencial que modela el proceso, es decir que expresa la variación de la cantidad de sal en el tanque en cada instante t (tasa de acumulación).

Puesto que en el instante inicial no hay sal, el problema de valor inicial es:

$$\begin{cases} y'(t) = 0,6 - 0,2y(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Esta ecuación se puede resolver por separación de variables:

$$\frac{dy}{dt} = 0,6 - 0,2y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{0,6-0,2y} = dt$$

o como lineal:

$$\mu(t) = e^{0,2t} \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{-0,2t}\left(\int 0,6e^{0,2t}dt\right) = Ce^{-0,2t} + 3$$

Imponiendo la condición inicial se obtiene $C = -3$, por tanto $y(t) = 3\left(1-e^{-0,2t}\right)$ kg.

La concentración de $0,5\dfrac{kg}{L}$, implica una cantidad de sal en el tanque de 2 kg, por lo tanto resolviendo $2 = 3\left(1-e^{-0,2t}\right)$, obtenemos $t = 5{,}5$min.

c) Cuando $t \to \infty$, $y(t) \to 3$ kg, que es la cantidad máxima de sal que se puede acumular en el tanque.

Puedes ver más ejercicios resueltos sobre ecuaciones diferenciales de primer orden en la página de Giematic UC
https://www.giematic.unican.es/index.php/edos-primer-orden/material-interactivo