INTEGRACIÓN DE SUPERFICIE

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Derivación de funciones de varias variables.
- Cálculo y propiedades de integrales dobles y triples.
- Manejo de ecuaciones paramétricas de curvas.
- Manejo de los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas.
- Dibujo de curvas y superficies con Matlab y Dpgraph.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A continuación, se presentan los objetivos específicos del Tema 3, indicando en cada uno de ellos la bibliografía que le corresponde, los ejercicios propuestos y los ejercicios resueltos en estos apuntes, así como los ejercicios resueltos en el proyecto Giematic con contenidos del tema. Las abreviaturas que encabezan cada línea hacen referencia a los siguientes libros, documentos o bloques de enunciados y también actividades de la web del proyecto Giematic:

- *A) Tomo 3 de la Colección FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS, de Álvarez, Herrero y Ruiz.*
- *B) CÁLCULO de varias variables, de Bradley y Smith; editorial Prentice Hall.*
- *G) CÁLCULO II. Teoría y Problemas de funciones de varias variables, de García y otros; editorial GLAGSA.*
- *M) CÁLCULO VECTORIAL, de Marsden y Tromba; editorial Addison-Wesley Ib.*
- *P) CÁLCULO VECTORIAL. PROBLEMAS RESUELTOS1, de Marsden y Tromba, por Pao y Soon; editorial Addison-Wesley Ib.*
- *S) CALCULUS de una y varias variables. Volumen I, de Salas, Hille y Etgen; editorial Reverté.*
- *EP) Enunciados de los ejercicios propuestos de este tema.*
- *ER) Ejercicios resueltos de este tema.*
- *EG) Ejercicios y actividades en la página del proyecto Giematic, cuya dirección es: http://www.giematic.unican.es/integracion-multiple/material-interactivo*

Los objetivos específicos de este tema son:

1. Entender la construcción del elemento diferencial de superficie y su significado geométrico; saber calcularlo para superficies expresadas en paramétricas, para superficies dadas por una ecuación explícita y para superficies dadas por una ecuación implícita.

EP 1, 2;

[1]Los enunciados de estos problemas resueltos están en **[M]**

EG Preliminares. Ejercicios inmediatos. Ejercicios 1, 3 y 4. Cálculo del área de porciones de superficies. Ejercicios 1 a 4. Integral de un campo escalar sobre una superficie. Ejercicios 5 y 6.

2. Entender la definición de integral de un campo escalar sobre una superficie y saber calcularla dada la superficie y el campo. Hacer uso de sus propiedades.

A Cap.5, Sec.3: Ejemplos 5.18 a 5.20;
B Cap.14, Sec.5: Ejemplo 14.25;
P Cap.15: Problema resuelto 3;
G Cap.7, Sec.5: Ejemplos 1 a 4
M Cap.7, Sec.5: Ejercicios 3, 7, 8, 11; Cap.7, Sec. Repaso: Ejercicio 12b, 15;
EP 3, 4 y 5;
ER 1 a 4;
EG Integral de un campo escalar sobre una superficie. Ejercicios 5 y 6. Integral de un campo vectorial. Ejercicio 12.

3. Saber utilizar esta integral para calcular el área de una superficie.

A Cap.4, Sec.1: Ejemplos 4.11, 4.12; Cap.4, Sec.3: Ejercicios 4.7 a 4.9;
B Cap.13, Sec.4: Ejemplos 13.16 a 13.19;
G Cap.15: Problemas resueltos 1, 2;
M Cap.7, Sec.4: Ejemplo 2;
P Cap.7, Sec.4: Ejercicios 2, 5, 13, 17, 20;
S Cap.17, Sec.6: Ejemplos 8 a 13;
EP 3 y 9;
ER 1 a 4;
EG Preliminares. Ejercicios inmediatos. Ejercicio 2. Cálculo del área de porciones de superficies. Ejercicios 1 a 4. Demos Matlab: Área superficial de áreas de porciones de planos tangentes. Integral de un campo escalar sobre una superficie. Ejercicio 7.

4. Conocer sus interpretaciones físicas básicas: temperatura media, masa. Saber utilizar esta integral para calcular promedios.

B Cap.14, Sec.5: Ejemplo 14.26;
M Cap.7, Sec.5: Ejemplo 5;
EP 6, 7 y 8;
EG Integral de un campo escalar sobre una superficie. Ejercicio 7.

5. Entender la definición de integral de un campo vectorial sobre una superficie orientada y saber calcularla dada la superficie y el campo. Conocer la relación entre esta integral y la de campos escalares. Manejar el efecto del cambio de orientación de la superficie sobre el signo de la integral.

B Cap.14, Sec.5: Ejemplos 14.27 a 14.29;
M Cap.7, Sec.6: Ejemplos 1 a 3, 6;

P Cap.7, Sec.6: Ejercicios 6, 14[2];

EP 10, 11 y 12;

ER 5, 6;

EG Preliminares. Ejercicios inmediatos. Ejercicio 10. Integral de un campo vectorial. Ejercicio 8. Demos Matlab: Aproximación del flujo de un campo vectorial a través de una superficie. Encuentra el error. Flujo negativo con campo vectorial hacia abajo en una superficie.

6. Saber calcular, mediante integración, el flujo de un campo vectorial a través de una superficie.

A Cap.5, Sec.3: Ejemplos 5.21, 5.22; Cap.5, Sec.4: Ejercicio 5.10;

G Cap.15: Problema resuelto 8;

M Cap.7, Sec.6: Ejemplo 4;

P Cap.7, Sec.6: Ejercicios 1, 16;

S Cap.17, Sec.7: Ejemplos 6 a 8;

EP 10, 11 y 12;

ER 5, 6;

EG Integral de un campo vectorial. Ejercicio 8.

7. Poder explicar el teorema de la divergencia de Gauss y saber usarlo para calcular una integral de superficie sobre una superficie cerrada.

A Cap.5, Sec.3: Ejemplo 5.23; Cap.5, Sec.4: Ejercicio 5.11;

B Cap.14, Sec.7: Ejemplos 14.35 a 14.37;

G Cap.15: Problemas resueltos 9, 10;

M Cap.8, Sec.4: Ejemplos 3 a 6;

P Cap.8, Sec.4: Ejercicios 4a, 6b, 10, 18; Cap.8, Sec.Repaso: Ejercicio 9;

EP 13 y 14;

ER 7;

EG Preliminares. Ejercicios inmediatos. Ejercicios 12 y 13. Integral de un campo vectorial. Ejercicios 10 y 11. Encuentra el error. Falla el teorema de Gauss.

8. Poder explicar el teorema de Stokes y saber usarlo para calcular una integral de línea a lo largo de una curva cerrada.

A Cap.5, Sec.3: Ejemplos 5.24, 5.25; Cap.5, Sec.4: Ejercicio 5.9;

B Cap.14, Sec.6: Ejemplos 14.30, 14.31, 14.33, 14.34;

G Cap.15: Problemas resueltos 6, 7;

M Cap.8, Sec.2: Ejemplos 1 a 4;

P Cap.8, Sec.2: Ejercicios 1, 4, 5, 9, 12, 25;

S Cap.17, Sec.10: Ejemplos 1, 2;

EP 15, 16 y 17.;

ER 8, 9;

EG Preliminares. Ejercicios inmediatos. Ejercicios 14 y 15. Integral de un campo vectorial. Ejercicio 9. Encuentra el error. Falla el teorema de Stokes.

---

[2]En algunas ediciones lo encabeza como 15.

SUPERFICIES

1 Integral doble sobre rectángulos

Una superficie S en $\mathbb{R}^3$ puede venir dada de 3 formas:

a) Como la gráfica de una función $z = f(x,y)$ donde $(x,y) \in D$ siendo D un conjunto del plano $S = \{(x, y, f(x,y)) \,/\, (x,y) \in D\}$.

b) Por medio de ecuaciones paramétricas, es decir

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k} \qquad\qquad (u,v) \in D$$

c) De forma implícita como el conjunto de puntos que verifican $F(x,y,z) = 0$ siendo F una función escalar de 3 variables. $S = \{(x,y,z) \,/\, F(x,y,z) = 0\}$

Nota: Al final del tema se dan las ecuaciones y las gráficas de algunas superficies.

2 Plano tangente en un punto a una superficie

Un vector es tangente a una superficie S en un punto $P(a,b,c)$ de S si es el vector tangente a una curva contenida en S y que pasa por P.
Un vector es ortogonal a una superficie S en un punto $P(a,b,c)$ de S si es ortogonal a todo vector tangente a S en el punto P.
El plano tangente a una superficie en el punto $P(a,b,c)$ contiene a todos los vectores tangentes a la superficie en dicho punto. El cálculo del plano tangente depende de la forma de definir la función.

Caso 1. Si la superficie viene dada por la ecuación $z = f(x,y)$, con $(x,y) \in D$, siendo f de clase C^1 en D, el plano tangente y un vector normal en un punto cualquiera $P(x_0, y_0, z_0)$ con (x_0, y_0) en D será:

- Plano tangente en P: $z - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0)$
- Un vector normal en P: $\mathbf{N} = (-f'_x(x_0,y_0),\, -f'_y(x_0,y_0),\, 1)$

Caso 2. Si la superficie viene dada por una función implícita $F(x,y,z) = 0$, con F de clase C^1 el plano tangente y un vector normal en un punto cualquiera P(x_0, y_0, z_0) con $F'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ será

- Plano tangente en P es:

$$F'_x\left(x_0,y_0,z_0\right)\left(x-x_0\right)+F'_y\left(x_0,y_0,z_0\right)\left(y-y_0\right)+F'_z\left(x_0,y_0,z_0\right)\left(z-z_0\right)=0$$

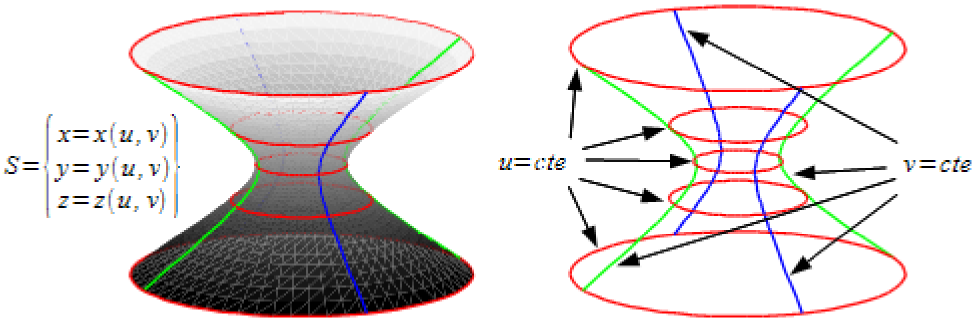
- Un vector normal en P es: $\mathbf{N}=\left(F'_x\left(x_0,y_0,z_0\right),\ F'_y\left(x_0,y_0,z_0\right),\ F'_z\left(x_0,y_0,z_0\right)\right)$

Caso 3. Suponiendo que las ecuaciones paramétricas son de clase C^1 en D, es posible definir los siguientes elementos de la superficie:

- Vectores tangentes a la superficie en un punto $P(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0),z(u_0,v_0))$

  $$\mathbf{r}'_u=(x'_u(u,v_0),y'_u(u,v_0),z'_u(u,v_0)) \text{ y } \mathbf{r}'_v=(x'_v(u_0,v),y'_v(u_0,v),z'_v(u_0,v))$$

  Estos vectores son tangentes, respectivamente, a las curvas de la superficie $v=v_0,\ \ u=u_0$, que se cortan en (u_0,v_0).



- Vector normal en P: $\mathbf{r}'_u\left(u_0,v_0\right)\times\mathbf{r}'_v\left(u_0,v_0\right)$.

ÁREA DE UNA SUPERFICIE

3 Diferencial de superficie

Definición (Diferencial de superficie).- Se define el elemento dS como un parche infinitesimal de superficie, cuya proyección sobre los planos coordenados en cada punto es,

$$dS=\frac{dxdy}{\left|\cos\gamma\right|}=\frac{dydz}{\left|\cos\alpha\right|}=\frac{dxdz}{\left|\cos\beta\right|}$$

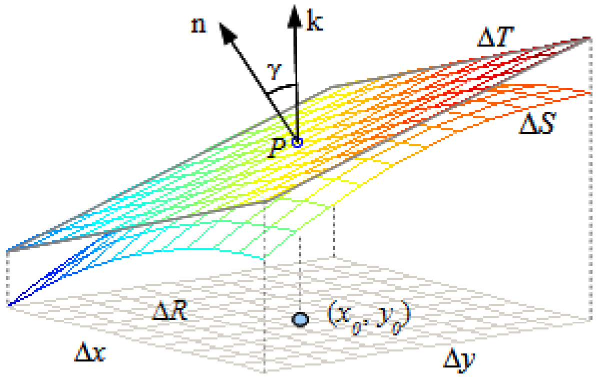
siendo $\left(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\right)$ los cosenos directores del vector normal a la superficie en dicho punto.

En el siguiente apartado se muestra el proceso de cálculo de la diferencial de superficie dependiendo de las ecuaciones con las que esté definida dicha superficie.

4 Cálculo de la Diferencial de una Superficie

SUPERFICIE DADA POR LA ECUACIÓN CARTESIANA EXPLÍCITA: $z = f(x, y)$

Si la superficie viene dada por la ecuación $z = f(x,y)$, con $(x,y) \in D$, siendo f de clase C^1 en D, se pueden definir



Un vector normal unitario a la superficie en P$\left(x_0, y_0, f\left(x_0, y_0\right)\right)$:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \frac{(-f_x'(x_0,y_0),\, -f_y'(x_0,y_0),\, 1)}{\sqrt{f_x'(x_0,y_0)^2 + f_y'(x_0,y_0)^2 + 1}}$$

Vector normal al plano $z = 0$ en P:

$\mathbf{k} = (0,0,1)$

Ángulo que forman $\mathbf{n}$ y $\mathbf{k}$ en P: γ

En la figura se muestran, un parche de superficie de área ΔS, una porción de plano tangente a éste parche de área ΔT y la proyección común de ambos, el rectángulo de área ΔR.

El objetivo es encontrar una aproximación del área de ΔS que se proyecta sobre un rectángulo dado del plano $z = 0$, de área $\Delta R = \Delta x \Delta y$.

Puesto que la superficie que mejor aproxima a S en el entorno de un punto es su plano tangente, es la que utilizaremos en esta aproximación. Tomaremos el plano tangente que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y de él recortaremos la porción ΔT que se proyecta sobre ΔR, verificándose

$$\Delta T = \frac{1}{|\cos\gamma|}\Delta R$$

Cuando las dimensiones de ΔR tiendan a cero, ΔT tenderá al elemento diferencial de superficie, verificándose:

$$dS = \frac{1}{|\cos\gamma|}dxdy$$

Y puesto que,

$$|\cos\gamma| = |\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}| = \frac{1}{|\mathbf{N}|}$$

Resulta finalmente,

$$dS = \left|\mathbf{N}\right| dxdy = \sqrt{f_x'(x,y)^2 + f_y'(x,y)^2 + 1}\, dxdy$$

SUPERFICIE DADA POR LA ECUACIÓN CARTESIANA IMPLÍCITA: $F(x,y,z)=0$

Si la superficie viene dada por una función implícita $F(x,y,z)=0$, con F de clase C^1 siendo $F_z' \neq 0$, un vector normal en cada punto es

$$\mathbf{N} = \left(F_x',\ F_y',\ F_z'\right)$$

Con lo cual,

$$\left|\cos\gamma\right| = \left|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\right| = \frac{\left|\left(F_x', F_y', F_z'\right)\left(0,0,1\right)\right|}{\sqrt{\left(F_x'\right)^2 + \left(F_y'\right)^2 + \left(F_z'\right)^2}} = \frac{\left|F_z'\right|}{\sqrt{\left(F_x'\right)^2 + \left(F_y'\right)^2 + \left(F_z'\right)^2}}$$

Por tanto,

$$dS = \frac{dxdy}{\left|\cos\gamma\right|} = \frac{\sqrt{\left(F_x'\right)^2 + \left(F_y'\right)^2 + \left(F_z'\right)^2}}{\left|F_z'\right|}\, dxdy$$

SUPERFICIE DADA POR UNAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$$x = x(u,v),\quad y = y(u,v),\quad z = z(u,v),\quad \text{con } (u,v)\in D$$

Conocidas las ecuaciones paramétricas, el vector de posición de un punto de la superficie es:

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k},\qquad (u,v)\in D$$

Suponiendo que las ecuaciones paramétricas son de clase C^1 en D, un vector normal unitario en P_0 es

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\mathbf{r}_u'\times\mathbf{r}_v'}{\left|\mathbf{r}_u'\times\mathbf{r}_v'\right|} = \pm\frac{1}{\left|\mathbf{r}_u'\times\mathbf{r}_v'\right|}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix}$$

y el coseno director en P_0:

$$\left|\cos\gamma\right| = \left|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\right| = \left|\frac{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2}}\right|$$

Sustituyendo la expresión anterior en $dS = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|}$ y teniendo en cuenta que $dxdy = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv$, resulta

$$dS = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, dudv = \left|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right| dudv$$

INTEGRAL DE SUPERFICIE DE UN CAMPO ESCALAR

5 Definiciones

La integral del campo escalar $g(x,y,z)$ sobre la superficie S se expresa con la siguiente notación: $\iint_S g(x,y,z)dS$

donde,

- S es una superficie suave[3].
- $g(x,y,z)$ es un campo escalar continuo sobre S.
- dS, es la diferencial de superficie.

Una integral de superficie se calcula transformándola previamente en una integral doble, lo cual requiere expresar el integrando en función de dos únicas variables independientes. El dominio de integración de la integral doble pasará a ser la proyección de la superficie S sobre el plano de las variables independientes elegidas.

Suponiendo S la superficie definida por $z = f(x,y)$ diferenciable, $g(x,y,z)$ continua sobre S y utilizando la expresión obtenida para el diferencial de superficie, la integral de $g(x,y,z)$ campo escalar continuo sobre S, es

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{f'_x(x,y)^2 + f'_y(x,y)^2 + 1}\; dA$$

donde D es la proyección de S sobre el plano $z = 0$.

Suponiendo S la superficie definida por $F(x,y,z) = 0$, la integral de $g(x,y,z)$ campo escalar continuo sobre S, es

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_D g(x,y,z(x,y))\frac{\sqrt{\left(F'_x\right)^2 + \left(F'_y\right)^2 + \left(F'_z\right)^2}}{\left|F'_z\right|} dxdy$$

donde D es la proyección de S sobre el plano $z = 0$.

[3] Una superficie suave es imagen de una función de clase C^1 definida en un dominio D.

Suponiendo S definida en paramétricas

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \quad \text{con } (u,v) \in D$$

la integral de $g(x,y,z)$ *campo escalar continuo sobre* S, *es*

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_D g(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right| dudv$$

6 Propiedades

***P1 (Linealidad)**.- La integral de una combinación lineal de funciones es la combinación lineal de las integrales.*

***P2 (Aditividad sobre la superficie de integración)**.- La integral sobre una superficie que sea unión de varias es la suma de las integrales sobre cada una de ellas; por ejemplo, para la unión de dos superficies:*

$$\iint_{S_1 \cup S_2} g(x,y,z)dS = \iint_{S_1} g(x,y,z)dS + \iint_{S_2} g(x,y,z)dS$$

***P3 (Independencia de la parametrización)**.- El valor de la integral no cambia con la parametrización elegida para la superficie.*

***P4 (Independencia de la orientación)**.- El signo de la integral no cambia con la orientación fijada en la superficie.*

7 Algunas aplicaciones

Área de una superficie.- Si sobre una superficie S se integra el campo escalar constante $g(x,y,z)=1$, se obtendrá el área superficial de S.

$$\acute{a}rea\left(S\right) = \iint_S dS$$

Masa de una lámina.- Si S es la forma de una lámina, o elemento de dos dimensiones significativas en el espacio, y el campo g da el valor de la densidad superficial en cada punto de la lámina, la masa total de la lámina será la integral de g sobre S.

Temperatura media de una lámina.- Si S tiene la forma de una lámina, o elemento de dos dimensiones significativas, y el campo g da el valor de la temperatura en cada punto de la lámina, la integral de g sobre S, dividida por el área de S, es el valor de la temperatura media de la lámina.

INGEGRAL DE SUPERFICIE DE UN CAMPO VECTORIAL O INTEGRAL DE FLUJO

8 Definiciones

La integral del campo vectorial $\mathbf{F}$ sobre la superficie S es la integral de superficie del campo escalar $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$: $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$

Los elementos que intervienen en la integral de un campo vectorial sobre una superficie son:

- La superficie orientada S, en las mismas condiciones de continuidad y derivabilidad impuestas para definir la integral de un campo escalar sobre ella; llamaremos $\mathbf{n}$ al vector normal unitario.
- El campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ definido y continuo sobre S.
- La diferencial de superficie dS.

Igual que la integral de un campo escalar, el cálculo de una integral de flujo se realiza previa conversión en una integral doble, cuya expresión dependerá de las ecuaciones de la superficie.

SUPERFICIE DADA POR LA ECUACIÓN CARTESIANA EXPLÍCITA: $z = f(x,y)$

Si el campo es $\mathbf{F} = (M,N,P)$ y la superficie viene dada por $z = f(x,y)$ en D, la integral de $\mathbf{F}$ sobre S se puede expresar como

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} dS = \iint_D (-Mf'_x - Nf'_y + P)dA$$

siendo $\mathbf{n}$ el vector normal que apunta en la dirección del eje OZ positivo.

SUPERFICIE DADA POR LA ECUACIÓN CARTESIANA IMPLÍCITA: $F(x,y,z) = 0$

Suponiendo F de clase C^1 y $F'_z \neq 0$, y tomando como vector normal el vector $\mathbf{N} = \left(F'_x,\ F'_y,\ F'_z\right)$, la integral de flujo es

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} dS = \iint_D \left(M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j} + P(x,y)\mathbf{k}\right)\frac{(F'_x, F'_y, F'_z)}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}\,\frac{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}{\left|F'_z\right|}dxdy =$$
$$= \iint_D \left(MF'_x + NF'_y + PF'_z\right)\frac{dxdy}{\left|F'_z\right|}$$

Nótese que al ser $F'_z \neq 0$ las variables independientes son x e y, lo cual implica proyectar la superficie sobre el plano $z = 0$.

SUPERFICIE DADA POR UNAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v),\ \ z = z(u,v),\quad \text{con}\quad (u,v)\in D$$

En este caso la integral es,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_D \left(M(u,v)\mathbf{i} + N(u,v)\mathbf{j} + P(u,v)\mathbf{k}\right)\left(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right)dudv$$

9 Aplicación al Cálculo de Flujos

Si la superficie S está sumergida en un fluido que tiene un campo de velocidades continuo $\mathbf{V}$ y si ΔS es el área de una pequeña parte de S, sobre la cual $\mathbf{V}$ se puede suponer constante, podemos escribir

$$\Delta\phi \approx \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\Delta S$$

donde $\Delta\phi$ es el volumen de fluido por unidad de tiempo, que cruza esa porción de área en dirección y sentido de un vector normal unitario **n**. Sumando todos esos pequeños volúmenes obtendremos que el flujo total de $\mathbf{V}$ a través de S es la integral

$$Flujo = \int\int_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$$

Esta misma expresión es válida para cualquier otro tipo de flujo, como puede ser el flujo eléctrico, el flujo de calor, etc.

10 Teoremas

El teorema de la divergencia de Gauss relaciona la integral de flujo sobre una superficie cerrada con la integral triple, sobre el volumen interior a dicha superficie, del campo escalar divergencia.

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA DE GAUSS.-

- *Hipótesis: los elementos que intervienen en este teorema son*
  - *la superficie S, cerrada, suave por partes y orientada según la normal unitaria exterior,* ***n****;*
  - *la región H cuya frontera la superficie S; se escribe $\partial H = S$;*
  - *un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ de clase C^1 sobre H y ∂H;*
- *Tesis: bajo estas hipótesis se verifica que*

$$\oiint_{\partial H} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iiint_H div\,\mathbf{F}dV$$

El teorema de Stokes relaciona la integral de superficie que proporciona el flujo del rotacional de un campo vectorial con la integral de línea de ese mismo campo.

TEOREMA DE STOKES.-

- *Hipótesis: los elementos que intervienen en este teorema son*
    - *la superficie S no cerrada, suave por partes, orientada según la normal unitaria* ***n****;*
    - *la curva "borde o frontera" de S, que denotamos , orientada conforme a la orientación de S;*
    - *un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ de clase C^1 sobre S y ∂S;*
- *Tesis: bajo estas hipótesis se verifica que*

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\mathrm{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

El convenio para determinar la orientación de la curva y el vector normal a la superficie coherente con dicha orientación viene dado por la regla del sacacorchos: si se recorre ∂S, dejando la cara exterior de la superficie a la izquierda, la normal asociada apunta desde cualquier punto de ella hacia el exterior.

Ejercicios propuestos

1 En el resumen de teoría se recogen las expresiones del elemento diferencial de superficie de una superficie dada por $z = f(x,y)$ con $(x,y) \in R$, estando R en el plano XY.

a. Escribe la expresión del elemento diferencial de superficie adaptada a la superficie dada por $y = g(x,z)$ con $(x,z) \in R$ estando R en el plano XZ.

b. Encuentra dS para la superficie $x = \sqrt{1 - y^2 - 2z^2}$, tomando como variables independientes con $(y,\ z) \in \{(y,z) \,/\, y^2 + 2z^2 < 1\}$

Solución: a) $dS = \sqrt{g'_x(x,z)^2 + g'_z(x,z)^2 + 1}\, dxdz$

b) $dS = \dfrac{\sqrt{1+2z^2}}{\sqrt{1-y^2-2z^2}} dydz$

2 En el resumen de teoría se recoge la expresión del elemento diferencial se superficie de una superficie dada por $F(x,y,z) = 0$ si $F'_z \neq 0$.

a. ¿Cómo se calcularía el elemento diferencial de superficie si $F'_z \neq 0$?

b. Determina dS para la superficie $x^2 + 5y^2 = 25$ y calcula el área de la porción de ésta superficie situada en el primer octante con $0 \le z \le 2$. Resuelve la integral con Matlab.

Solución: b) $área = 11{,}785$

3 Determina el elemento diferencial de superficie para las siguientes superficies e indica en cuáles el cociente entre el elemento diferencial de superficie y el elemento diferencial de área es constante. Prepara un fichero con Octave/Matlab para dibujar las superficies de este ejercicio así como una muestra de sus vectores normales.

a) $2x - 3y + 5z = 1$ b) $2x - 3y = 1$

c) $z = \sqrt{9 - x^2 - 2y^2}$ d) $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$

e) $z = \sqrt{x^2 + 3y^2}$ f) $z = 4 - x^2 - 2y^2$

g) $x^2 + 2y = 4$

Solución: a) $dS = \dfrac{\sqrt{38}}{5} dxdy$, $\dfrac{dS}{dA} = cte$;

b) $dS = \dfrac{\sqrt{13}}{3} dxdz$, $\dfrac{dS}{dA} = cte$;

c) $dS = \dfrac{\sqrt{9+2y^2}}{\sqrt{9-x^2-2y^2}} dxdy$;

d) $dS = \sqrt{10}\, dxdy$, $\dfrac{dS}{dA} = cte$;

e) $dS = \sqrt{2}\dfrac{\sqrt{x^2+6y^2}}{\sqrt{x^2+3y^2}} dxdy$;

f) $dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 16y^2}\, dxdy$;

g) $dS = \sqrt{1+x^2}\,dxdz$

4 Halla el área de la superficie de las siguientes superficies:

a. paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ acotada entre los planos $z = 1$ y $z = 5$.

b. $z = x^2 + (y-1)^2$ comprendida entre los planos z=1 y z=4

c. superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, situado por encima del plano $z = 1$.

d. cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ de altura h.

e. esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Solución: (a) $\pi\left(\sqrt{33} - \sqrt{17}\right)$

b) $\dfrac{\pi\left(17\sqrt{7} - 5\sqrt{5}\right)}{6}$ d) $2\pi ah$ e) $4a^2\pi$

5 (a) Calcula la integral de superficie

$$I = \iint_S (x^2 + y^2)\,dS$$

donde S es la esfera $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 0$ para $0 \le z \le b$

(b) Calcula la integral de superficie $I = \iint_S (x^2 + y^2)\,dS$ donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

(c) Calcula $I = \iint_S \dfrac{z + x^2}{\sqrt{1 + 4x^2}}\,dS$ donde S es la porción de la superficie $z = 4 - x^2$ limitada por el plano $x + 2y = 4$

(d) Calcula la integral

$I = \iint_S \left(z + 2x + \dfrac{4}{3}y\right) dS$ donde S es la porción del plano $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 1$ situada en el primer octante.

Solución: (a) $I = 8\pi a^4 / 3$ (b) $I = 8\pi a^4 / 3$ (c) 12 (d) $4\sqrt{61}$

6 Encuentra la masa de la lámina S, su densidad media si en cada punto la densidad de masa superficial de la placa es la función $g(x,y,z)$ indicada.

a) S es la porción del plano $z = x + 2y$ que se proyecta en el rectángulo $R = [0,1]\times[0,3]$ del plano XY; $g(x,y,z) = xyz$

b) S es la parte de la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$ interior a $x^2 + y^2 = 1$; $g(x,y,z) = z$

Solución: a) Masa = 21, densidad media= $\dfrac{7}{2}$

b) Masa = $\dfrac{\pi}{60}\left(7\cdot 5^{5/2} - 41\right)$, densidad media= $\dfrac{7\cdot 5^{5/2} - 41}{10\left(5^{3/2} - 1\right)} = 3{,}44$

7 Una lámina S ocupa la parte del plano $x + y + z = a$ en el primer octante (a es un número real positivo).

Si la temperatura en cada punto de S es $T(x,y,z) = k\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ ($k > 0$), halla el valor medio de la temperatura en S.

Supón que $T(x,y,z) = \dfrac{1}{x + y + 1}$; halla el valor medio de la temperatura.

Solución:

a) $T_{media} = \dfrac{ka^2}{2}$

b) $T_{media} = \dfrac{2}{a^2}\left(a - \log(a+1)\right)$

8 Se considera la superficie S dada por $x = \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$ y el campo escalar $g(x,y,z) = x\left(y^2 + z^2\right)$. Halla el valor medio de g en S

Solución: $g_{medio} = \dfrac{|a|^3}{4}$

9 Calcula el flujo saliente del campo vectorial $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ a través de la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solución: Flujo $= -3\pi$

10 Calcula el flujo saliente del campo vectorial $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ a través de la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solución: Flujo $= -3\pi$

11 Considera la superficie que ocupa la parte del plano $x + y + z = a$ en el primer octante (a es un número real positivo) y el campo de calor que es proporcional al gradiente de temperatura con signo negativo, esto es, $\mathbf{F} = -c\nabla T, \quad c > 0$ para las funciones de temperatura

a. $T(x,y,z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$

b. $T(x,y,z) = \dfrac{1}{x + y + 1}$

Calcula el flujo de calor hacia arriba a través de la placa.

Solución: a) Flujo $-cka^3 < 0$

b) Flujo $2c\left(\log(a+1) - \dfrac{a}{a+1}\right)$

12 Se considera la superficie S porción del paraboloide $z = a^2 - x^2 - y^2$ para x, y, z positivos; a es un número real no nulo. Un campo vectorial $\mathbf{F}$ depende de a de la siguiente forma: $\mathbf{F}(x,y,z) = ax\mathbf{i} - \dfrac{2}{a}y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

a. Calcula a mano el flujo de $\mathbf{F}$ hacia arriba de S

b. Analiza el comportamiento del flujo en función del parámetro a .¿Es creciente el flujo con el valor de $|a|$? ¿Existe un valor mínimo para el flujo? Puedes dibujar con Matlab la función flujo y utilizar el comando `solve` para hacer el análisis pedido.

Solución: Flujo=$\dfrac{\pi a^3}{8}(a^2 + a - 2)$ b) El flujo alcanza un valor máximo relativo para $a = -1,5662$ y un valor mínimo relativo para $a = 0,7662$.

13 Considerando $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, calcular el flujo que atraviesa la superficie del sólido encerrado por las superficies $z = 10 - x^2 - y^2$ y $z = 2 + x^2 + y^2$.

Solución: Flujo $= 48\pi$

14 Utiliza el teorema de la divergencia de Gauss en los tres casos siguientes para calcular $I = \iint_{\partial H} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$:

a. $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; H es el hemisferio $0 \le z \le \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

b. $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; H es el sólido parabólico $0 \le z \le 4 - x^2 - y^2$.

c. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x + z^2)\mathbf{i} + (y - z^2)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$; H es el sólido $0 \le y^2 + z^2 \le 1$, $0 \le x \le 2$.

Solución: a) $I = 0$ b) $I = 64\pi / 3$ c) $I = 4\pi$

15 Encuentra una expresión para la tercera componente, $P(x,y,z)$, para que el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy + z)\mathbf{i} + ze^{-y}\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$ hacia arriba del semielipsoide $z = \sqrt{9 - 2x^2 - y^2}$ sea opuesto al flujo hacia debajo de la región D del plano XY encerrada en él y que éste último flujo sea el doble del área de D.

Solución: $P(x,y,z) = \dfrac{z^2}{2}e^{-y} - yz - 2$

16 Halla el flujo del rotacional de $\mathbf{F}(x,y,z) = xy^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + e^{x^2}\mathbf{k}$ sobre la parte de $z = 16 - 2x^2 - y^2$ en $z \ge 0$, orientada con la normal hacia arriba.

Solución: Flujo=0

17 Sea S la superficie de ecuación z=2 definida sobre el círculo $x^2 + y^2 \le 4$ y se considera el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = 3y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$. Calcular $\int_C \mathrm{F}\cdot dr$ usando la definición de integral de línea y el Teorema de Stokes.

Solución: -20π

18 Sea C el triángulo orientado situado en el plano $2x+2y+z=6$, intersecado por los planos coordenados y $\mathbf{F}(x,y,z) = -y^2\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. Calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ usando la definición de integral de línea y el Teorema de Stokes.
Solución: -9.

19 Calcula el trabajo realizado por el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2y^3\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ en $z=0$.
Solución: Trabajo $= -R^6\pi / 8$

20 Calcula la siguiente integral mediante la fórmula de Stokes y después comprueba el resultado integrando directamente $I = \oint_C x\,dx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$ siendo C la curva $x = a\operatorname{sen} t$, $y = a\cos t$, $z = a(\operatorname{sen} t + \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.
Solución: $I = -\pi a^2$

21 Calcular la circulación de $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+3z)\mathbf{i} + (z+y)\mathbf{j} + 4y\mathbf{k}$ alrededor del trapecio de vértices $A=(2,-2,0)$, $B=(-2,2,0)$, $C=(-1,1,1)$ y $D=(1,-1,1)$ tomando como orientación la que recorre los vértices en el orden en el que se han definido.
Solución: C=18

22 Comprobar el teorema de Stokes para $\mathbf{F}(x,y,z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ considerando como superficie S el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y C es la curva de nivel de S sobre el plano XY.
Solución: 4π

Test de autoevaluación

1 El área de la superficie de ecuación $z = 16 - x^2 - y^2$ situada sobre la región $R = \{x^2 + y^2 \le 16\}$ es,

A. $\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{65}-1\right)$
B. $\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{65^3}-1\right)$
C. $\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{65^3}-1\right)$
D. Ninguna de las anteriores.

2 La temperatura media de la lámina S definida por $\begin{cases} x^2+y^2=1, & y \ge 0 \\ 0 \le z \le 3 \end{cases}$ y con temperatura en cada punto $T(x,y,z) = y$, es:

A. $\frac{2}{\pi}$
B. $\frac{6}{\pi}$
C. 0
D. Ninguna de las anteriores.

3 Sea σ una superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $z = f(r,\theta)$, siendo D la proyección de la superficie en el plano $r\theta$, entonces

A. $\acute{A}rea\ de\ \sigma = \iint_D \sqrt{1 + r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}\, dr\, d\theta$

B. $\acute{A}rea\ de\ \sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}\, r\, dr\, d\theta$

C. $\acute{A}rea\ de\ \sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}\, r\, dr\, d\theta$.

D. Ninguna de las anteriores.

4 El área del casquete de la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=2$, situado por encima del plano $z=1$, es:

A. $2\pi\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$

B. $4\pi\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

C. $\pi\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

D. Ninguna de las anteriores.

5 Se consideran las siguientes integrales:

$$I_1=\iint_\sigma g(x,y,z)d\sigma\ ,\qquad I_2=\iint_\sigma d\sigma\ ,$$

$$I_3=\iint_\sigma \mathbf{F}\,d\boldsymbol{\sigma}\ ,\ I_4=\iiint_V \left(div\mathbf{F}\right)dV\ ,$$

$$I_5=\oint_C \mathbf{F}\mathbf{T}\,ds$$

y las siguientes magnitudes:

a. Masa de una lámica
b. Trabajo
c. Circulación
d. Flujo
e. Área superficial

Las integrales y las magnitudes admiten los siguientes emparejamientos:

A. $\left(I_1,e\right),\ \left(I_2,a\right),\ \left(I_3,d\right),\ \left(I_5,b\right)$

B. $\left(I_1,a\right),\ \left(I_2,e\right),\ \left(I_4,d\right),\ \left(I_5,c\right)$.

C. $\left(I_1,a\right),\ \left(I_2,e\right),\ \left(I_3,c\right),\ \left(I_4,d\right)$.

D. Ninguna de las anteriores.

6 El flujo del campo $\mathbf{F}=2x\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ hacia el exterior de la esfera unitaria, es:

A. 0

B. $\dfrac{\pi}{3}$

C. $\dfrac{8\pi}{3}$

D. Ninguna de las anteriores.

7 Sea σ una superficie cerrada que encierra un volumen V y $\mathbf{F}$ un campo vectorial de clase C^2, entonces

A. $\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV=0$

B. $\oiint_\sigma \left(\nabla\times\mathbf{F}\right)\mathbf{n}\,d\sigma=0$

C. $\oiint_\sigma \left(\operatorname{div}\mathbf{F}\right)\mathbf{n}\,d\sigma=0$

D. Ninguna de las anteriores.

8 Sea $\mathbf{V}(x,y,z)=\mathbf{a}\times\mathbf{r}$, siendo a un vector constante y r el vector de posición de un punto de $\mathbb{R}^3$ y sea C una curva de $\mathbb{R}^3$ que es frontera de la superficie σ. En estas condiciones se verifica:

A. $\oint_C \mathbf{V}\,d\mathbf{r}=2\iint_\sigma \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$.

B. $\oint_C \mathbf{V}\mathbf{n}\,ds=\iint_\sigma \left(\operatorname{rot}\mathbf{V}\right)\mathbf{n}\,d\sigma$.

C. $\oint_C \mathbf{V}\,d\mathbf{r}=2\iint_\sigma \left(\operatorname{rot}\mathbf{r}\right)\mathbf{n}\,d\sigma$.

D. Ninguna de las anteriores.

9 Sea σ el paraboloide de ecuación $z=x^2+y^2$ con $0\le z\le 3$ y sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. Entonces el flujo de $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ a través del paraboloide en el sentido de la normal exterior es:

A. $-\pi$.

B. π.

C. 0.

D. Ninguna de las anteriores.

10 El valor de la integral de flujo $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})d\boldsymbol{\sigma}$, siendo S la semiesfera $x^2+y^2+z^2=16,\ z\ge 0$ y $\mathbf{F}$ el campo $\mathbf{F}=\left(x^2+y-4\right)\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+\left(2xz+z^2\right)\mathbf{k}$, es:

A. 32π.

B. 0.

C. 2π.

D. Ninguna de las anteriores.

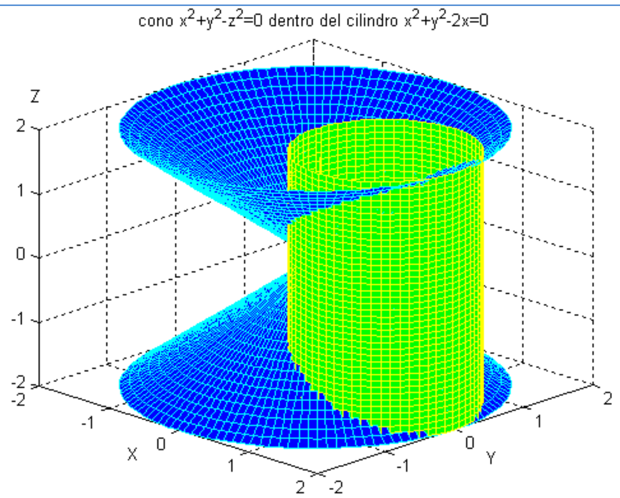
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	C	A	B	C	B	A	C	A

Para realizar diferentes tests de autoevaluación de este tema de forma interactiva, visitar la dirección web
https://www.giematic.unican.es/index.php/integral-de-superficie/material-interactivo
y pulsar los correspondientes enlaces en el apartado "Tests interactivos".

Ejercicios resueltos

1 Calcular el área del cono $x^2+y^2-z^2=0$ que es interior al cilindro $x^2+y^2-ax=0$

Solución



Código Matlab:

```
% Dibuja en paramétricas el cono x^2+y^2-z^2=0
r=0:.1:2; t=0:.05:2*pi;[R,T]=meshgrid (r,t);
h1=surf(R.*cos (T),R.*sin (T),R);
set(h1,'FaceColor','blue','FaceAlpha',0.2,'EdgeColor','c');
hold on
h2=surf (R.*cos (T),R.*sin (T),-R);
set(h2,'FaceColor','blue','FaceAlpha',0.2,'EdgeColor','c')
% Dibuja en paramétricas el cilindro x^2+y^2-ax=0
z=-2:.1:2; t=-pi/2:.05:pi/2;[Z,T]=meshgrid (z,t);
h3=surf(2*cos(T).*cos(T),2*cos(T).*sin(T),Z);
set(h3,'FaceColor','green','FaceAlpha',0.3,'EdgeColor','y')
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z');
title('cono x^2+y^2-z^2=0 dentro del cilindro x^2+y^2-2x=0')
hold off
```

Al tener el cilindro sus generatrices paralelas al eje OZ, resulta apropiado proyectar la superficie del cono sobre el plano $z=0$, utilizando para calcular el área pedida la expresión $A=\iint_D dS$.

Aplicado a nuestro caso, la ecuación de la superficie es $z=f(x,y)=\pm\sqrt{x^2+y^2}$, lo que nos lleva a:

$$dS = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} = \sqrt{2}$$

Con respecto al dominio D de integración, será el representado en la figura, intersección del cilindro con el plano de proyección, es decir:

$$x^2 + y^2 - ax = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

la circunferencia de centro $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ y radio $\frac{a}{2}$ es la curva que limita dicho dominio D.

De esta forma, dada la simetría del cono respecto al plano z=0, ya que su ecuación no varía al cambiar z por -z, el área pedida podrá expresarse

$$\acute{A}rea = 2\sqrt{2}\iint_D dxdy$$

y puesto que $\iint_D dxdy$ representa el área del dominio D, en este caso un círculo de radio $\frac{a}{2}$, será $\iint_D dxdy = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$, luego

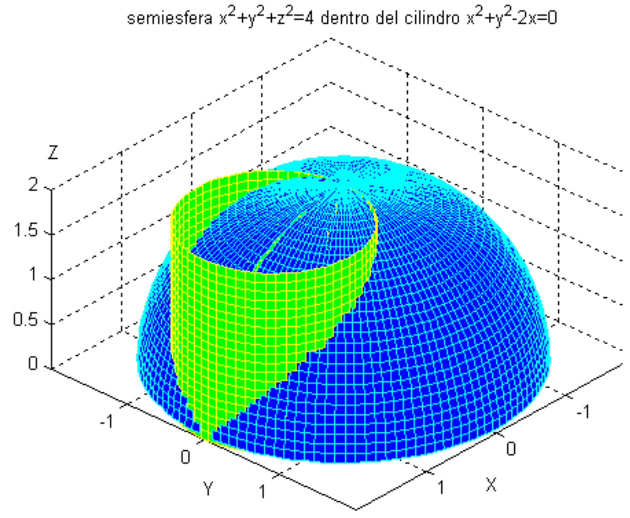
Área=$2\sqrt{2}\,\frac{\pi a^2}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$ u. d. s.

2

Determinar el área de la porción de superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \quad (z \geq 0)$ que es interior al cilindro $x^2 + y^2 - 2ax = 0$

Solución

En este caso $z = f(x,y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2 + z^2}$ ya que se indica que $(z \geq 0)$. Si proyectamos sobre el plano XOY y llamando D a la proyección, se tendrá, Área= $\iint_D dS$



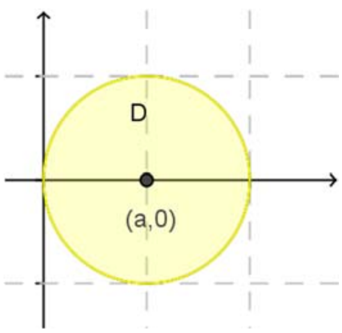
Código Matlab:

```
% Dibuja en paramétricas la semiesfera x^2+y^2+z^2=4
f=0:.05:pi/2; t=0:.05:2*pi; [F,T]=meshgrid (f,t);
h1=surf (2*sin(F).*cos (T),2*sin(F).*sin (T),2*cos(F));
set(h1,'FaceColor','blue','FaceAlpha',0.2,'EdgeColor','c')
hold on
% Dibuja en paramétricas el cilindro x^2+y^2-2x=0
z=0:.1:2; t=-pi/2:.05:pi/2; [Z,T]=meshgrid (z,t);
h2=surf (2*cos(T).*cos (T),2*cos(T).*sin (T),Z);
set(h2,'FaceColor','green','FaceAlpha',0.3,'EdgeColor','y')
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z');
title('semiesfera x^2+y^2+z^2=4 dentro del cilindro x^2+y^2-2x=0')
axis equal
hold off
```

Teniendo en cuenta que el punto genérico (x, y, z) está sobre la esfera, deberá verificar su ecuación, es decir $z = +\sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)}$ (recordemos $z \geq 0$), luego,

$$dS = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)}}\right)^2} = .$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)}} \quad \Rightarrow \quad Área = \iint_D \frac{2a\,dx\,dy}{\sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)}}$$



D es el dominio, en el plano XOY, limitado por la circunferencia de la figura, cuya ecuación se puede expresar como

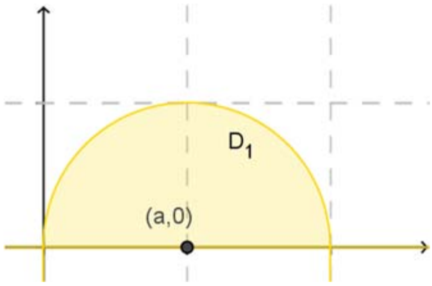
$$x^2 + y^2 - 2ax = 0\,,$$

o bien

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

Podemos usar simetrías, ya que al cambiar y por -y no cambia la ecuación de la frontera del dominio ni la función subintegral, luego podemos escribir Área= $4\iint_{D_1} \frac{adxdy}{\sqrt{4a^2-(x^2+y^2)}}$,

siendo D_1 el semicírculo superior limitado por la circunferencia $x^2+y^2-2ax=0$ y el eje OX.



Hacemos el cambio a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$dxdy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} drd\theta = rdrd\theta$$

En coordenadas polares, la ecuación de la circunferencia que limita el dominio D' se convierte en $r = 2a\cos\theta$, luego

$$\text{Área}= 4a\iint_{D'} \frac{rdrd\theta}{\sqrt{4a^2-r^2}} = 4a\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \frac{rdr}{\sqrt{4a^2-r^2}}$$

Y resolviendo queda

$$\int_0^{2a\cos\theta} \frac{r.dr}{\sqrt{4a^2-r^2}} = \left[-\sqrt{4a^2-r^2}\right]_0^{2a\cos\theta} = \sqrt{4a^2}\left(1-\sqrt{1-\cos^2\theta}\right) = 2a(1-\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$\text{Área}= 8a^2\int_0^{\pi/2} (1-\mathrm{sen}\,\theta)d\theta = 8a^2\left[\theta+\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = 4a^2(\pi-2) \text{ u. d. s.}$$

3 Determinar el área de la porción del cono $x^2+y^2=3z^2$ $(z\geq 0)$ que es interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=\frac{4a^2}{3}$.

Solución

El dominio D, proyectando sobre el plano XOY $(z=0)$, lo obtendremos eliminando z entre las dos superficies:

$$\begin{cases} x^2+y^2-3z^2=0 \\ x^2+y^2+z^2=\frac{4a^2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2=\frac{1}{3}(x^2+y^2) \\ z^2=\frac{4a^2}{3}-x^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \frac{4a^2}{3}-x^2-y^2=\frac{1}{3}(x^2+y^2) \right.$$

simplificando se tiene como ecuación de la frontera del dominio D la curva $x^2+y^2=a^2$.

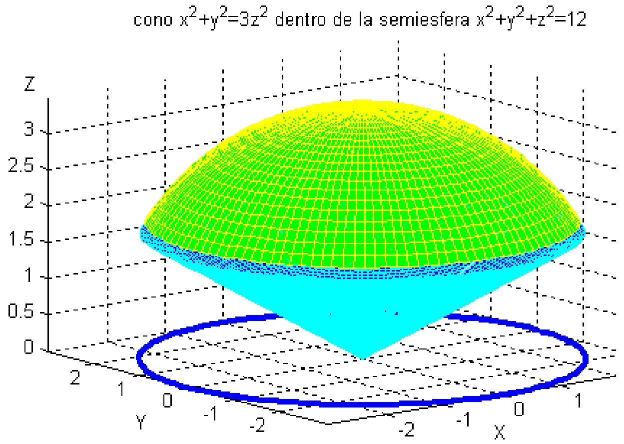
Siendo en este caso $z=f(x,y)=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$, ya que $z\geq 0$. El diferencial de superficie:

$$dS = \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{3\left(x^2+y^2\right)} + \frac{y^2}{3\left(x^2+y^2\right)}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

El área vendrá dada por la expresión A = $\iint_S dS = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_D dxdy$, pero $\iint_D dxdy$ representa el área del dominio D, cuyo valor es πa^2 por ser un círculo, obteniendo:

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi a^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi a^2 \text{ u. d. s.}$$



Código Matlab:

```
% Dibuja en paramétricas el cono x^2+y^2=3z^2 con z>=0.
ra=sqrt(12); % radio de la esfera
ro=0:.05:ra; % radio vector
t=0:.05:2*pi; % ángulo theta
[RO,T]=meshgrid (ro,t);
h1=surf (RO.*sqrt(3)/2.*cos (T),RO.*sqrt(3)/2.*sin (T),RO./2);
set(h1,'FaceColor','blue','FaceAlpha',0.2,'EdgeColor','c')
hold on
% Dibuja en paramétricas el casquete de esfera x^2+y^2+z^2=12, con phi=<pi/3
f=0:.05:pi/3; % ángulo phi
t=0:.05:2*pi; % ángulo theta
[F,T]=meshgrid (f,t);
h2=surf (ra*sin(F).*cos (T),ra*sin(F).*sin (T),ra.*cos(F));
set(h2,'FaceColor','green','FaceAlpha',0.3,'EdgeColor','y')
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z');
% Dibuja la circunferencia x^2+y^2=a^2
t=0:.05:2*pi;
h3=plot(3*cos(t),3*sin(t),'b');
set(h3,'LineWidth',3);
title('cono x^2+y^2=3z^2 dentro de la semiesfera x^2+y^2+z^2=12')
axis equal; hold off
```

4

Determinar el área de la porción del cilindro $x^2 + y^2 - 6y = 0$ que es interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

Nota: se aconseja proyectar sobre el plano $x = 0$ (plano YOZ).

Solución

En este caso, $x = f(y,z) = \pm\sqrt{6y-y^2}$ por lo que habrá que proyectar sobre el plano YOZ,

$$dS = \sqrt{1+f_y'^2+f_z'^2} = \sqrt{1+\left(\frac{-2y+6}{2\sqrt{6y-y^2}}\right)^2+0} =$$

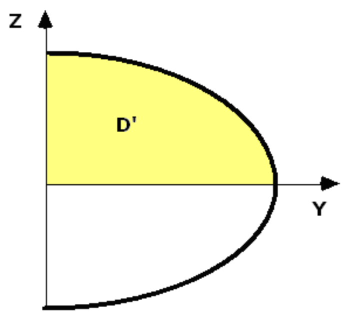
$$= \sqrt{1+\frac{(-2y+6)^2}{4(6y-y^2)}} = \sqrt{\frac{24y-4y^2+4y^2+36-24y}{4(6y-y^2)}} = \sqrt{\frac{36}{4(6y-y^2)}} = \frac{3}{\sqrt{6y-y^2}}$$

despejando,

$$\frac{1}{|\cos\alpha|} = \frac{\sqrt{4x^2+4y^2-24y+36}}{|2x|} = \frac{\sqrt{(x^2+y^2-6y)+9}}{|x|}$$

Teniendo en cuenta que ell área total será dos veces el área en x≥0,se tendrá

$$Área = \iint_S dS = 2\iint_D \frac{3\ dydz}{\sqrt{6y-y^2}} = 6\iint_D \frac{dydz}{\sqrt{6y-y^2}}$$



siendo D el dominio limitado por la curva resultante de eliminar x entre el cilindro y la esfera, es decir,

$$\begin{cases} x^2+y^2-6y=0 \\ x^2+y^2+z^2=36 \end{cases} \Rightarrow z^2+6y=36$$

que es una parábola en el plano YOZ;

podemos usar simetrías, ya que al cambiar z por -z no cambia la ecuación de la frontera del dominio ni la función subintegral, luego podemos escribir

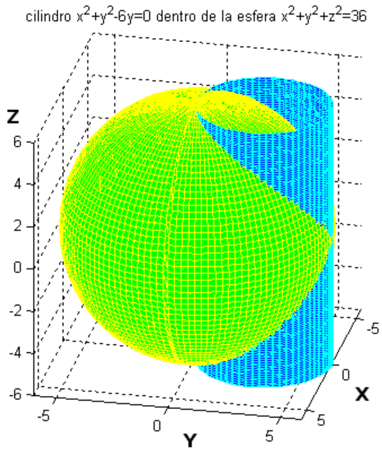
$$\text{Área}=12\iint_{D'} \frac{dy.dz}{\sqrt{6y-y^2}} = 12\int_0^6 \frac{dy}{\sqrt{6y-y^2}}\left[\int_0^{\sqrt{36-6y}} dz\right]$$

siendo D' la región del primer cuadrante encerrada por la parábola en el cuadrante de las z positivas. Resolvemos la integral entre corchetes,

$$\int_0^{\sqrt{36-6y}} dz = [z]_0^{\sqrt{36-6y}} = \sqrt{36-6y}$$

se sustituye en la expresión anterior

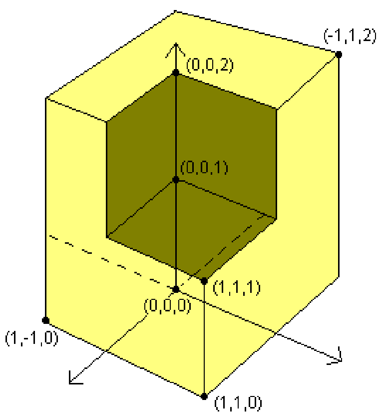
$$\text{Área} = 12\int_0^6 \frac{\sqrt{36-6y}.dy}{\sqrt{6y-y^2}} = 12\int_0^6 \frac{\sqrt{6}\sqrt{6-y}dy}{\sqrt{y}\sqrt{6-y}} = 12\sqrt{6}\int_0^6 \frac{dy}{\sqrt{y}} = 12\sqrt{6}\left[2\sqrt{y}\right]_0^6 = 144 \text{ u.d.s.}$$




```
Código Matlab
% Dibuja en paramétricas el cilindro x^2+y^2-6y=0
z=-6:.1:6; t=0:.05:2*pi;[Z,T]=meshgrid (z,t);
h1=surf (6*sin (T).*cos (T),6*sin (T).*sin (T),Z);
set(h1,'FaceColor','blue','FaceAlpha',0.2,'EdgeColor','c')
hold on
% Dibuja en paramétricas la esfera x^2+y^2+z^2=36
f=0:.05:pi; % ángulo phi
t=0:.05:2*pi; % ángulo theta
[F,T]=meshgrid (f,t);
h2=surf (6*sin(F).*cos (T),6*sin(F).*sin (T),6.*cos(F));
set(h2,'FaceColor','green','FaceAlpha',0.3,'EdgeColor','y')
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z');
title('cilindro x^2+y^2-6y=0 dentro de la esfera x^2+y^2+z^2=36')
axis equal; hold off
```

5 Hallar el flujo del campo $\mathbf{E}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, que sale de la superficie cerrada **S**, que constituye la frontera de un cubo al que se le ha quitado una esquina, como muestra la figura.

Solución



El campo $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es de clase C¹ en $\mathbb{R}^3$. S es una superficie cerrada, suave a trozos, que encierra un sólido V simplemente conexo.

Flujo saliente de V = $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$

Para calcular el flujo total es necesario hallar el flujo saliente a través de cada una de las nueve caras del sólido.

S_1: base inferior, z = 0, $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{k}$; $\Phi_1 = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1 = \iint_{S_1} -z\,dx\,dy = \iint_{S_1} 0\,dx\,dy = 0$

S_2: cara z = 2, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{k}$; $\Phi_2 = \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2 = \iint_{S_2} z dxdy = \iint_{S_2} 2dxdy = 2\acute{a}rea\, S_2 = 6$

S_3: cara y = -1, $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{j}$; $\Phi_3 = \iint_{S_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_3 = \iint_{S_3} -y dxdz = \iint_{S_3} dxdz = \acute{a}rea\, S_3 = 4$

S_4: cara y = 1, $\mathbf{n}_4 = \mathbf{j}$; $\Phi_4 = \iint_{S_4} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_3 = \iint_{S_4} y dxdz = \iint_{S_4} dxdz = \acute{a}rea\, S_4 = 3$

S_5: cara x = -1, $\mathbf{n}_5 = -\mathbf{i}$; $\Phi_5 = \iint_{S_5} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_5 = \iint_{S_5} -x dydz = \iint_{S_5} dydz = \acute{a}rea\, S_5 = 4$

S_6: cara x = 1, $\mathbf{n}_6 = \mathbf{i}$; $\Phi_6 = \iint_{S_6} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_6 = \iint_{S_6} x dydz = \iint_{S_6} dydz = \acute{a}rea\, S_6 = 3$

S_7: cara z = 1, $\mathbf{n}_7 = \mathbf{k}$; $\Phi_7 = \iint_{S_7} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_7 = \iint_{S_7} z dxdy = \iint_{S_7} dxdy = \acute{a}rea\, S_7 = 1$

S_8: cara y = 0, $\mathbf{n}_8 = \mathbf{j}$; $\Phi_8 = \iint_{S_8} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_8 = \iint_{S_8} y dxdz = \iint_{S_8} 0 dxdz = 0$

S_9: cara x = 0, $\mathbf{n}_9 = \mathbf{i}$; $\Phi_9 = \iint_{S_9} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_9 = \iint_{S_9} x dydz = \iint_{S_9} 0 dydz = 0$

Flujo total saliente de V = $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 + \Phi_7 + \Phi_8 + \Phi_9 = 21$

Utilizando el teorema de Gauss:

Flujo saliente de V = $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_V (\text{div } \mathbf{F})\, dxdydz$

Como div $\mathbf{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$, sustituyendo queda

Flujo saliente de V = $\iiint_V 3dxdydz$ = 3 volumen de V

Flujo saliente de V = 3 (vol. cubo lado 2 – vol. cubo lado 1) = 3(8-1) = 21 unidades de flujo

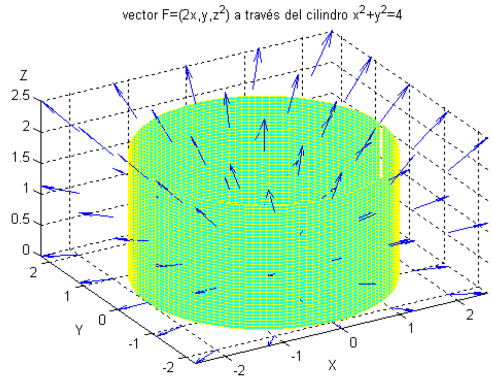
6 Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, se pide determinar el flujo a través de la cara lateral del cilindro $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq 2$.

Solución

Código Matlab:

```
% Dibuja una muestra del campo vectorial
% F=(2x,y,z^2)
x=-2:2;y=-2:2;z=0:2;
[X,Y,Z]=meshgrid (x,y,z);
U=2*X;V=Y;W=Z.^2;
quiver3(X,Y,Z,U,V,W)
hold on
% Dibuja en paramétricas el cilindro x^2+y^2=4
```

```
z=0:.05:2; t=0:.05:2*pi; [Z,T]=meshgrid (z,t);
h1=surf (2*cos (T),2*sin (T),Z);
set(h1,'FaceColor','c','FaceAlpha',0.2,'EdgeColor','y')
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z');
title('vector F=(2x,y,z^2) a través del cilindro x^2+y^2=4')
axis equal; hold off
```



Se cumplen las condiciones para aplicar el Teorema de la divergencia:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario saliente de la superficie S. Es decir, la integral de la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ extendida al volumen V, es igual al flujo saliente del vector $\mathbf{F}$ a través de la superficie que limita este volumen.

En este caso se cumple que

$$\phi_{\text{sup}} + \phi_{\text{inf}} + \phi_{lat} = \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV = \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F}) dxdydz\,,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial(2x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z} = 2 + 1 + 2z = 3 + 2z$$

luego,

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F} dV = \iiint_V (3+2z) dxdydz\,.$$

Para calcular esta integral triple calculamos el cambio a coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta\,, \\ z = z \end{cases} \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$$

las ecuaciones del dominio $x^2+y^2 \le a^2$, $0 \le z \le 2$, se transforman en $r^2 \le a^2$, $0 \le z \le 2$, luego los nuevos límites de integración serán:

$$D = \left\{(r,\theta,z)\,/\,0 \le r \le a, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le z \le 2\right\}$$

por tanto,

$$\iiint_V (3+2z)dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{2} r\left(3+2z\right)dz\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{q} rdr\right)\left(\int_0^{2}\left(3+2z\right)dz\right)$$

Podemos resolver las tres integrales por separado, ya que son independientes:

$$\int_0^2 (3+2z)dz = \left[3z+z^2\right]_0^2 = 10,\quad \int_0^a rdr = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a = \frac{a^2}{2} \quad \text{y} \quad \int_o^{2\pi} d\theta = \left[\theta\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

luego

$$\iiint_V (3+2z)\,dx\,dy\,dz = 10\pi a^2 \text{ unidades de flujo.}$$

Por otro lado, calcularemos el flujo a través de la cara superior ϕ_{sup}. En esta cara $z=2$ y $dS = dx\,dy$, $\mathbf{n}=\mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = z^2 = 4$

$$\phi_{\sup} = \iint_{S_{\sup}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = 4\iint_{\sigma_{\sup}} dxdy = 4\text{Área de } S_{\sup} = 4\pi a^2 \text{ unidades de flujo}$$

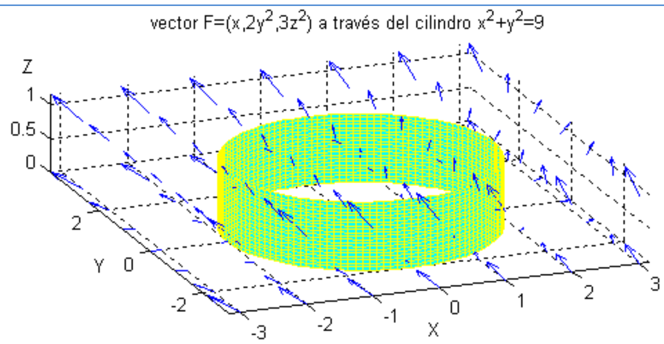
Análogamente para la cara inferior ϕ_{inf}, en ella $z=0$ y $dS = dxdy$, $\mathbf{n}=-\mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -z^2 = 0$, luego el flujo saliente a través de la cara inferior es nulo. Podemos escribir:

$$\phi_{lat} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz - \phi_{\sup} - \phi_{\inf} = 10\pi a^2 - 4\pi a^2 - 0 = 6\pi a^2 \text{ unidades de flujo.}$$

7

Determinar el flujo saliente originado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}\left(x,y,z\right)$ a través de la cara lateral del cilindro del sólido $V \equiv \left\{0 \le x^2+y^2 \le 9, 0 \le z \le 1\right\}$, siendo $\mathbf{F}\left(x,y,z\right) = x\mathbf{i} + 2y^2\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$.

Solución



Código Matlab:

```
% Dibuja una muestra del campo vectorial
% F=(x,2y^2,3z^2)
x=-3:3;y=-3:3;z=0:1;[X,Y,Z]=meshgrid (x,y,z);
U=X;V=2*Y.^2;W=3*Z.^2;
quiver3(X,Y,Z,U,V,W); hold on
```

```
% Dibuja en paramétricas el cilindro x^2+y^2=9
z=0:.05:1; t=0:.05:2*pi; [Z,T]=meshgrid (z,t);
h1=surf (2*cos (T),2*sin (T),Z);
set(h1,'FaceColor','c','FaceAlpha',0.2,'EdgeColor','y')
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z');
title('vector F=(x,2y^2,3z^2) a través del cilindro x^2+y^2=9')
axis equal; hold off
```

En nuestro caso, $\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=x\mathbf{i}+2y^2\mathbf{j}+3z^2\mathbf{k}$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$ y V es un sólido simplemente conexo. Por tanto podemos aplicar el teorema de la divergencia o teorema de Gauss:

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV=\iint_S(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dS$$

Se tiene que: $\operatorname{div}\ \mathbf{F}=\dfrac{\partial(x)}{\partial x}+\dfrac{\partial(2y^2)}{\partial y}+\dfrac{\partial(3z^2)}{\partial z}=1+4y+6z$

El flujo saliente total de V se obtendrá calculado el flujo a lo largo de la cara lateral y las caras superior e inferior:

$$\phi_{total}=\phi_{lateral}+\phi_{superior}+\phi_{inferior}$$

Aplicando el Teorema de Gauss se tendrá que

$$\phi_{total}=\iiint_V(1+4y+6z)dxdydz=\iint_D dxdy\left[\int_0^1(1+4y+6z)dz\right]$$

Como

$$\int_0^1(1+4y+6z)dz=\left[z+4yz+3z^2\right]_0^1=4\left(1+y\right)$$

se tendrá

$$\phi_{total}=4\iint_D(1+y)dxdy$$

siendo el dominio en el plano $D\equiv 0\le x^2+y^2\le 9$. Para realizar esta integral doble se pasa a coordenadas polares,

$$\begin{Bmatrix} x=r\cos\theta \\ y=r\operatorname{sen}\theta \end{Bmatrix}\qquad J=r$$

siendo el dominio D los puntos $\left(r,\theta\right)$ con $0\le r\le 3\quad y\quad 0\le\theta\le 2\pi$. Por lo tanto,

$$\phi_{total}=4\iint_{D'}(1+r sen\,\theta)rdrd\theta=4\int_0^{2\pi}d\theta\left[\int_0^3(r+r^2\operatorname{sen}\theta)dr\right]$$

$$\int_0^3(r+r^2\operatorname{sen}\theta)dr=\left[\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\theta\right]_0^3=\frac{9}{2}+9\operatorname{sen}\theta$$

$$\phi_{total}=4\int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{2}+9\operatorname{sen}\theta\right)d\theta=36\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\operatorname{sen}\theta\right)d\theta=36\left[\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right]_0^{2\pi}=36\pi$$

Por otro lado en la cara superior tenemos $\mathbf{n} = \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 3z^2$ y como es $z = 1$ queda $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 3, \quad dS = dxdy$, por tanto

$$\phi_{\text{superior}} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = 3 \iint_S dxdy = 3 \acute{A}rea\ de\ S = 3\pi 3^2 = 27\pi$$

Análogamente para la cara inferior: $\mathbf{n} = -\mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -3z^2$ y como es $z = 0$ queda $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad dS = dxdy$, por tanto $\phi_{inferior} = 0$.

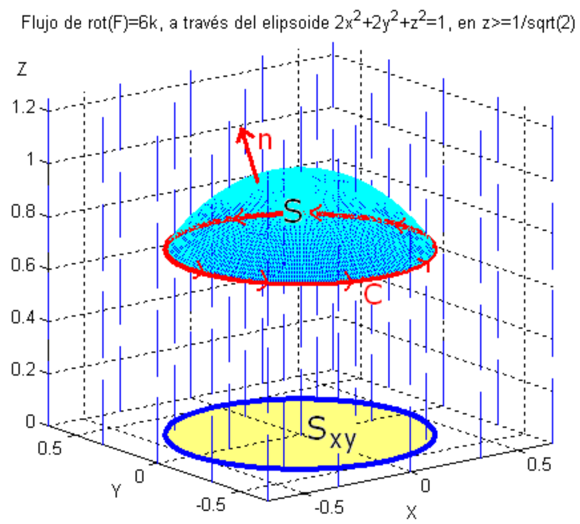
Despejando el flujo pedido se obtendrá

$$\phi_{lateral} = \phi_{total} - \phi_{\text{superior}} - \phi_{\text{inferior}} = 36\pi - 27\pi = 9\pi \quad \text{unidades de flujo}$$

8

Comprobar que se verifica el Teorema de Stokes para el campo vectorial $\mathbf{E}(x,y,z) = -3y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + z^4\mathbf{k}$ sobre la superficie S definida como el trozo del elipsoide $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ que está por encima del plano $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Para comprobar el teorema es necesario calcular las integrales que aparecen en ambos miembros de la ecuación y obtener el mismo resultado por ambos métodos de cálculo.

Solución



Código Matlab:

```
% Dibuja una muestra del campo vectorial rotF=(0,0,6)
x=-2/3:1/3:2/3;y=-2/3:1/3:2/3;z=0:1/3:1;
[X,Y,Z]=meshgrid (x,y,z);
U=0*ones(size(X));V=0*ones(size(X));W=6*ones(size(X));
quiver3(X,Y,Z,U,V,W); hold on
% Dibuja el elipsoide 2x^2+2y^2+z^2=1, para z>=1/sqrt(2),en paramétricas
f=0:0.02:pi/4; % ángulo phi
t=0:0.02:2*pi; % ángulo theta
[F,T]=meshgrid(f,t); a=1/sqrt(2);
h1=surf(a*sin(F).*cos(T),a*sin(F).*sin(T),cos(F));
set(h1,'FaceColor','blue','FaceAlpha',0.2,'EdgeColor','c')
% Dibuja las circunferencias intersección del elipsoide con z=a y con z=0
```

```
h2=plot3(sin(t)/2,cos(t)/2,a*ones(size(t)),'r'); set(h2,'LineWidth',3);
h3=plot(sin(t)/2,cos(t)/2,'b');
set(h3,'LineWidth',3); axis equal;
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z');
title('Flujo de rot(F)=6k, a través del elipsoide 2x^2+2y^2+z^2=1,
con z > = 1/sqrt(2)');
hold off
```

El campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=-3y\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+z^4\mathbf{k}$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$. El elipsoide S es una superficie suave, limitada por la curva C, orientada en el mismo sentido que la superficie S.

El elipsoide $2x^2+2y^2+z^2=1$, tiene semiejes $\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$ y 1 lo cual se comprueba escribiendo su ecuación en la forma $\dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+z^2=1$

Según el teorema de Stokes, se cumplirá

$$I=\oint_C -3ydx+3xdy+z^4dz=\iint_S \left(\operatorname{rot}\mathbf{F}\right)\cdot\mathbf{n}dS$$

a) Cálculo de la integral de línea.

Se obtiene la ecuación de la curva C como la intersección del elipsoide y el plano $z=1/\sqrt{2}$, y posteriormente, se parametriza. Como

$$C\equiv\left\{\begin{array}{c}2x^2+2y^2+z^2=1\\ z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad 2x^2+2y^2+\frac{1}{2}=1\quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=\frac{1}{4}$$

C es la circunferencia de radio $\frac{1}{2}$, en el plano $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Su parametrización es:

$$C\equiv\left\{x=\frac{1}{2}\cos t;\quad y=\frac{1}{2}\operatorname{sen}t;\quad z=\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\quad t\in\left[0,2\pi\right]$$

$$\left\{dx=-\frac{1}{2}sent;\quad dy=\frac{1}{2}\cos t;\quad dz=0\right\}$$

Por lo tanto, la integral de línea será:

$$\oint_C -3ydx+3xdy+z^4dz=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{3}{2}\operatorname{sen}t\right)\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}tdt\right)+\left(\frac{3}{2}\cos t\right)\left(\frac{1}{2}\cos tdt\right)=\int_0^{2\pi}\frac{3}{4}dt=\frac{3\pi}{2}$$

b) Cálculo de la integral de superficie.

Hallamos previamente $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ y el vector $\mathbf{n}$, sabiendo que la ecuación implícita de S es $F\left(x,y,z\right)=2x^2+2y^2+z^2-1=0$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -3y & 3x & z^4 \end{vmatrix} = 6\mathbf{k}$$

el vector $\mathbf{n}$ será uno de los dos siguientes:

$$\mathbf{n} = \pm \frac{-f_x^{'}\mathbf{i} - f_y^{'}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(f_x^{'}\right)^2 + \left(f_y^{'}\right)^2}}$$

Tomamos el vector que tiene la tercera componente mayor que cero ya que el vector $\mathbf{n}$ apunta hacia arriba.

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{F}\right) \cdot \mathbf{n} = \left(6\mathbf{k}\right) \cdot \frac{-f_x^{'}\ \mathbf{i} - f_y^{'}\ \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + f_x^{'\,2} + f_y^{'\,2}}} = \frac{6}{\sqrt{1 + f_x^{'\,2} + f_y^{'\,2}}}$$

$$I = \iint_S \left(\operatorname{rot}\mathbf{F}\right) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \frac{6}{\sqrt{1 + f_x^{'\,2} + f_y^{'\,2}}} dS$$

Sustituyendo el diferencial de superficie, $dS = \sqrt{1 + f_x^{'\,2} + f_y^{'\,2}}\,dxdy$, y considerando D la proyección de S sobre el plano XY, se tendrá:

$$I = \iint_S \frac{6}{\sqrt{1 + f_x^{'\,2} + f_y^{'\,2}}} dS = 6 \iint_D dxdy$$

$$I = 6\ \ \acute{a}rea\left(D\right) = \frac{3\pi}{2}$$

ya que S_{xy} es el círculo de radio $\dfrac{1}{2}$.

9 Utilizar el teorema de Stokes para calcular $\oint_C 2ydx + 3xdy - z^2dz$, siendo C la circunferencia de ecuaciones paramétricas

$$C \equiv \left\{x = 3\cos t,\ y = 3\operatorname{sen} t,\ z = 0,\ 0 \le t \le 2\pi\right\}$$

Solución

El teorema de Stokes puede aplicarse sobre cualquier superficie S que tenga por borde la curva C anterior, siendo S suave o suave a trozos, estando S orientada según la orientación de C. El campo vectorial que interviene en este caso, $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$, es de clase C1 en todo $\mathbb{R}^3$, luego verificará

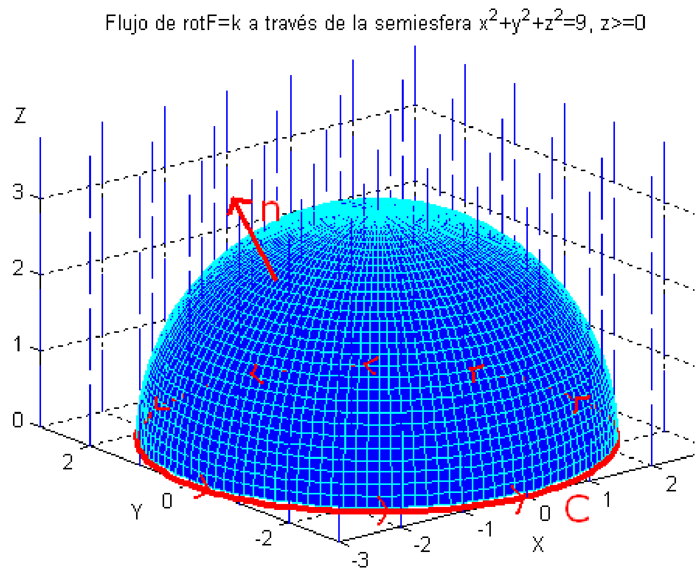
$$I = \oint_C 2ydx + 3xdy - z^2dz = \iint_S \left(\operatorname{rot}\mathbf{F}\right) \cdot \mathbf{n} dS$$

Código Matlab:

```
% Dibuja una muestra del campo rotF=k
x=-3:3;y=-3:3;z=0:3;[X,Y,Z]=meshgrid (x,y,z);
U=0*ones(size(X));V=0*ones(size(X));W=ones(size(X));
quiver3(X,Y,Z,U,V,W); hold on

% Dibuja la semiesfera x^2+y^2+z^2=9, en z>=0
f=0:0.05:pi/2; % ángulo phi
t=0:0.05:2*pi; % ángulo theta
[F,T]=meshgrid(f,t);
h1=surf(3*sin(F).*cos(T),3*sin(F).*sin(T),3*cos(F));
set(h1,'FaceColor','blue','FaceAlpha',0.2,'EdgeColor','c')

% Dibuja la circunferencia x^2+y^2=9
t=0:0.05:2*pi;
h2=plot(3*cos(t),3*sin(t),'r');
set(h2,'LineWidth',3); axis equal
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z');
title('Flujo de rotF=k a través de la semiesfera x^2+y^2+z^2=9, z>=0');
hold off
```



Hallamos $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ siendo $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} = \mathbf{k}$$

Tomamos como S la semiesfera que tiene por ecuación implícita $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con $z \geq 0$, es decir, $z = f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Esta superficie tiene como curva frontera C.

El vector $\mathbf{n}$ a S será uno de los dos siguientes:

$$\mathbf{n} = \pm \frac{-f_x'\mathbf{i} - f_y'\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}}$$

Tomamos como vector normal $\mathbf{n}$ el que tiene la tercera componente mayor que cero ya que está dirigido hacia arriba.

Se tendrá que:

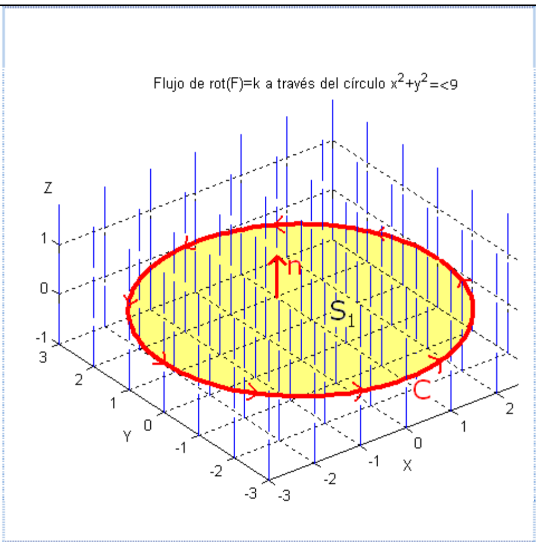
$$I = \iint_S \left(\operatorname{rot}\mathbf{F}\right)\cdot \mathbf{n}\,dS = \iint_D \left(\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{-f_x'\ \mathbf{i} - f_y'\ \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x'^2 + f_x'^2 + 1}}\right)\sqrt{f_x'^2 + f_x'^2 + 1}\ dxdy = \iint_D dxdy$$

siendo D la proyección de S sobre el plano XY que es el círculo de radio 3, por lo tanto,

$$I = \iint_D dxdy = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$$

También se podría haber utilizado como superficie para aplicar el teorema de Stokes, S_1, el círculo de radio 3, contenido en el plano $z = 0$, pues también tiene por borde la curva C. En este caso, el vector unitario perpendicular a S_1, orientado según la orientación de la curva C es $\mathbf{k}$, resultando

$$I = \iint_{S_1} \left(\operatorname{rot}\mathbf{F}\right)\cdot \mathbf{n}\,dS_1 = \iint_{S_1} \left(\mathbf{k}\right)\cdot\left(\mathbf{k}\right)dxdy = \iint_{S_1} dxdy = \acute{a}rea\ S_1 = 9\pi$$



Código Matlab:

```
% Dibuja una muestra del campo rotF=k
x=-3:3;y=-3:3;z=-1:1;
[X,Y,Z]=meshgrid (x,y,z);
U=0*ones(size(X));V=0*ones(size(X));W=ones(size(X));
quiver3(X,Y,Z,U,V,W); hold on

% Dibuja la circunferencia x^2+y^2=9 en z=0
t=0:0.05:2*pi;
h2=plot(3*cos(t),3*sin(t),'r');
set(h2,'LineWidth',3); axis equal
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z');
title('Flujo de rot(F)=k a través del círculo x^2+y^2=9');
hold off
```

Ecuaciones de algunas superficies frecuentes

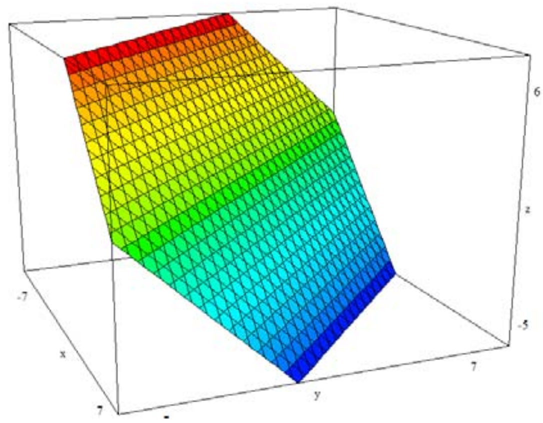
PLANO

Cartesianas

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Paramétricas

$$\begin{aligned} x &= x_o + ua_1 + vb_1 \\ y &= y_o + ua_2 + vb_2 \\ z &= z_o + ua_3 + vb_3 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} x = 1 - v \\ y = -u \qquad u \in I,\ v \in J \\ z = u + v \end{cases}$$

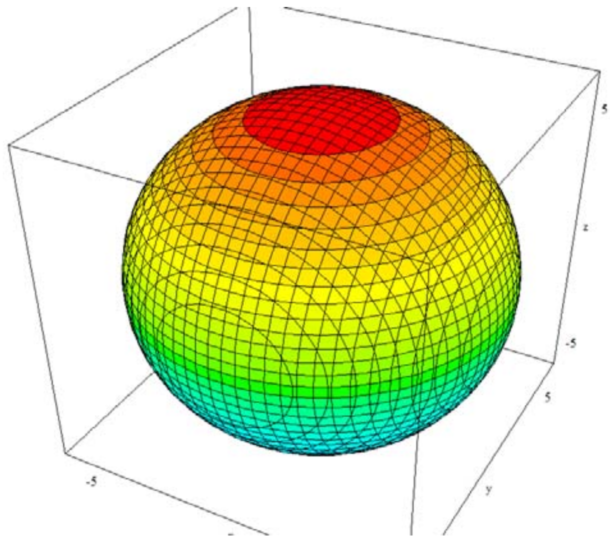
ESFERA

Cartesianas

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Paramétricas

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} u \cos v \\ y &= r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z &= r \cos u \end{aligned}$$



$$\begin{cases} x = 5 \operatorname{sen} u \cos v \\ y = 5 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = 5 \cos u \end{cases}$$

$$0 \le u \le \pi, \quad 0 \le v \le 2\pi$$

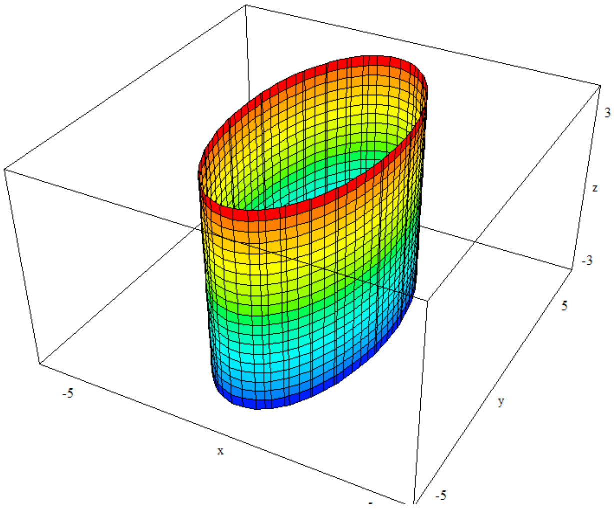
CILINDRO ELÍPTICO

Cartesianas

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Paramétricas

$$x=a\ \cos u$$
$$y=b\ \operatorname{sen} u$$
$$z=v$$



$$\begin{cases} x=2\cos u \\ y=4\operatorname{sen} u \qquad 0\le u<2\pi,\quad v\in I \\ z=v \end{cases}$$

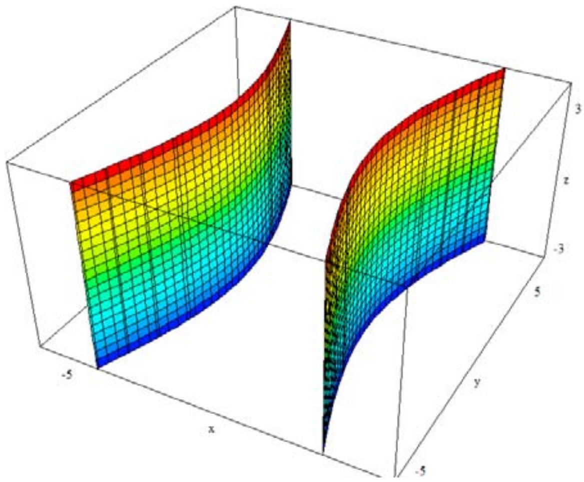
CILINDRO HIPERBÓLICO

Cartesianas

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Paramétricas

$$x=a\cosh u$$
$$y=b\operatorname{senh} u$$
$$z=v$$



$$\begin{cases} x=2\cosh u \\ y=4\operatorname{senh} u \qquad (u,v)\in D \\ z=v \end{cases}$$

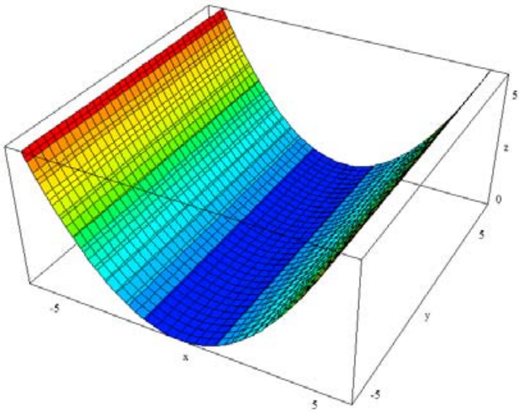
CILINDRO PARABÓLICO

Cartesianas

$$z = \frac{x^2}{a}$$

Paramétricas

$$x = u$$
$$y = v$$
$$z = \frac{u^2}{a}$$



$$x = u, \;\; y = v, \;\; z = \frac{u^2}{4}, \quad (u, v) \in D$$

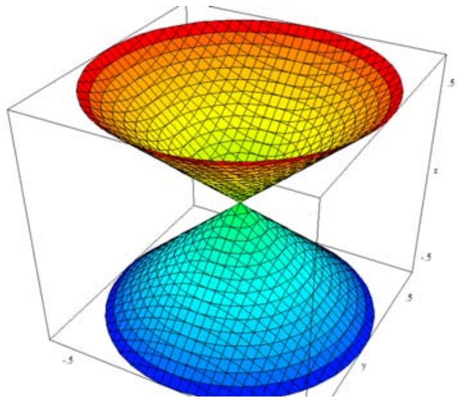
CONO

Cartesianas

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Paramétricas

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \quad\quad 0 \le v \le 2\pi, \; u \in I \\ z = u \end{cases}$$



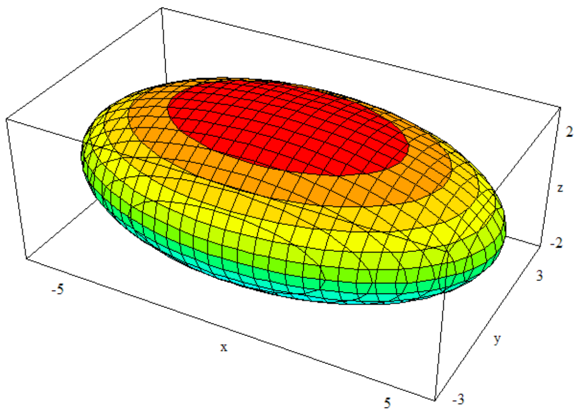
ELIPSOIDE

Cartesianas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Paramétricas

$$x = a \operatorname{sen} u \cos v$$
$$y = b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$
$$z = c\cos u$$



$$\begin{cases} x = 5 \operatorname{sen} u \cos v \\ y = 3 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = 2\cos u \end{cases}$$

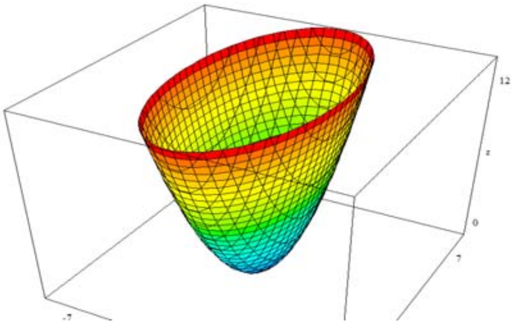
$$0 \le u \le \pi, \;\; 0 \le v \le 2\pi$$

PARABOLOIDE ELIPTICO

Cartesianas

Paramétricas

$$\begin{cases} x = au\cos v \\ y = bu\,\mathrm{sen}\, v \\ z = \pm u^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = 2u\,\mathrm{sen}\, v \qquad u\in I,\ \ 0\le v<2\pi \\ z = u^2 \end{cases}$$

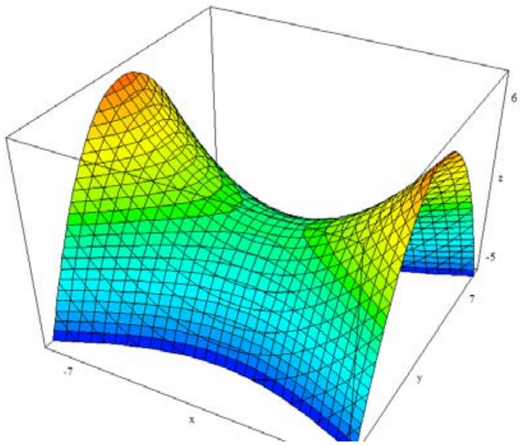
PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Cartesianas

$$z=\pm\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

Paramétricas

$$\begin{cases} x = au\cosh v \\ y = bu\,\mathrm{senh}\, v \\ z = \pm u^2 \end{cases}$$



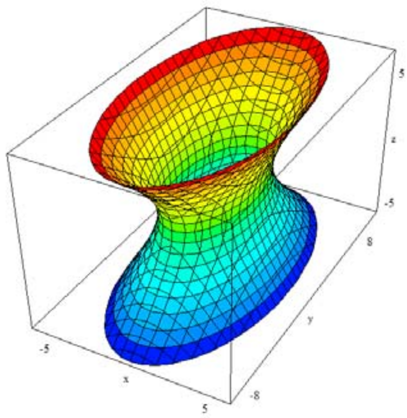
$$\begin{cases} x = 3u\cosh v \\ y = 2u\,\mathrm{senh}\, v \qquad u\in I,\ \ v\in J \\ z = u^2 \end{cases}$$

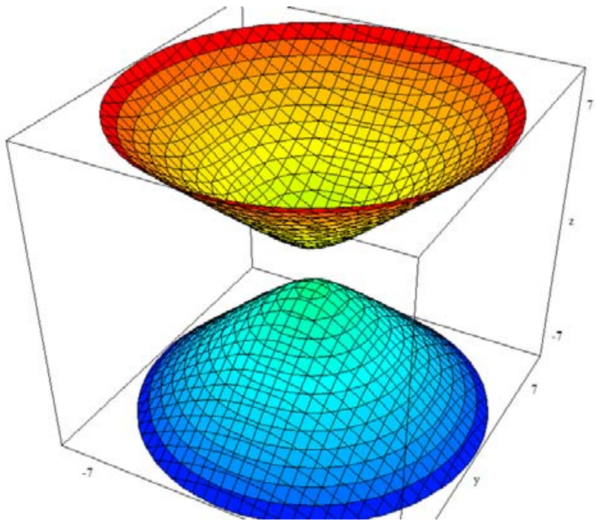
HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA

Cartesianas

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Paramétricas



$\begin{cases} x = a\cosh u \cos v \\ y = b\cosh u \operatorname{sen} v \\ z = c \operatorname{senh} u \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2\cosh u \cos v \\ y = 4\cosh u \operatorname{sen} v \quad -\infty < u < \infty,\ \ 0 \le v \le 2\pi \\ z = 3 \operatorname{senh} u \end{cases}$
HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS Cartesianas $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ Paramétricas $\begin{cases} x = a \operatorname{senh} u \cos v \\ y = b \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \\ z = c \cosh u \end{cases}$	 $\begin{cases} x = \operatorname{senh} u \cos v \\ y = \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \\ z = \cosh u \end{cases}$ $-\infty < u < \infty,\ \ 0 \le v \le 2\pi$