INTEGRACIÓN DE SUPERFICIE

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Derivación de funciones de varias variables.
- Cálculo y propiedades de las integrales dobles y triples.
- Ecuaciones paramétricas de curvas.
- Sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas.
- Representación de curvas y superficies con Matlab y Dpgraph.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Los objetivos específicos de este tema son:

1. Entender la construcción del elemento diferencial de superficie y su significado geométrico; saber calcularlo para superficies expresadas en paramétricas, para superficies dadas por una ecuación explícita y para superficies dadas por una ecuación implícita.
2. Entender la definición de integral de un campo escalar sobre una superficie y saber calcularla dada la superficie y el campo. Hacer uso de sus propiedades.
3. Saber utilizar esta integral para calcular el área de una superficie.
4. Conocer sus interpretaciones físicas básicas: temperatura media, masa. Saber utilizar esta integral para calcular promedios.
5. Entender la definición de integral de un campo vectorial sobre una superficie orientada y saber calcularla dada la superficie y el campo. Conocer la relación entre esta integral y la de campos escalares. Manejar el efecto del cambio de orientación de la superficie sobre el signo de la integral.
6. Saber calcular, mediante integración, el flujo de un campo vectorial a través de una superficie.
7. Poder explicar el teorema de la divergencia de Gauss y saber usarlo para calcular una integral de superficie sobre una superficie cerrada.
8. Poder explicar el teorema de Stokes y saber usarlo para calcular una integral de línea a lo largo de una curva cerrada.

SUPERFICIES

1 Superficies

Una superficie S en $\mathbb{R}^3$ puede venir dada de 3 formas:

a) Como la gráfica de una **función explícita** $z = f(x,y)$ donde $(x,y) \in D$ siendo D un conjunto del plano $S = \{(x,y,f(x,y)) / (x,y) \in D\}$.

b) Por medio de **ecuaciones paramétricas**, es decir

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k} \qquad (u,v) \in D$$

c) De **forma implícita** como el conjunto de puntos que verifican $F(x,y,z) = 0$ siendo F una función escalar de 3 variables. $S = \{(x,y,z) / F(x,y,z) = 0\}$

Nota: Al final del tema se dan las ecuaciones y las gráficas de algunas superficies.

2 Plano tangente a una superficie en un punto

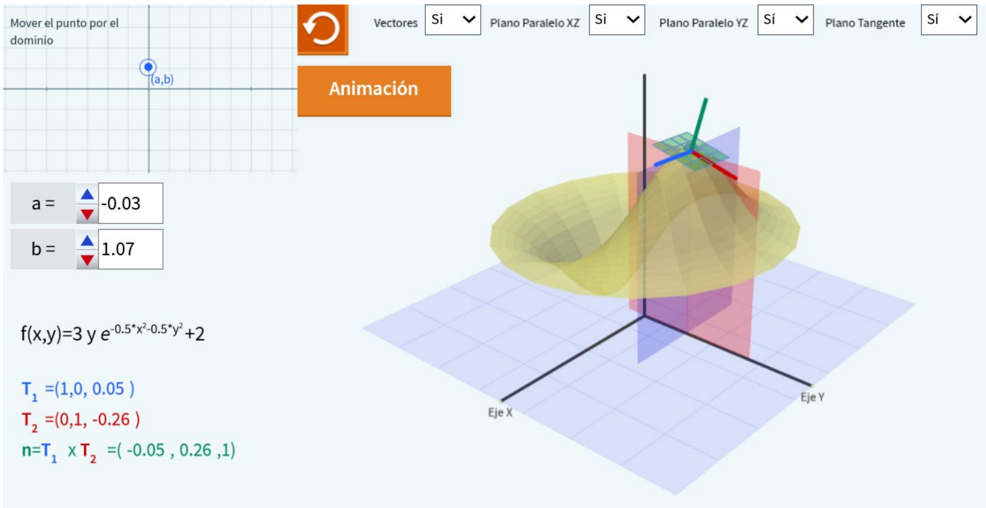
Un vector es tangente a una superficie S en un punto $P(a,b,c)$ de S si es el vector tangente a una curva contenida en S y que pasa por P.

Un vector es ortogonal a una superficie S en un punto $P(a,b,c)$ de S si es ortogonal a todo vector tangente a S en el punto P.

El **plano tangente** a una superficie en el punto $P(a,b,c)$ contiene a todos los vectores tangentes a la superficie en dicho punto. El cálculo del plano tangente depende de la forma de definir la función.

Caso 1. Superficie en explícitas. Si la superficie viene dada por la ecuación $z = f(x,y)$, con $(x,y) \in D$, siendo f de clase C^1 en D, el plano tangente y un vector normal en un punto cualquiera $P(x_0,y_0,z_0)$ con (x_0,y_0) en D será:

- Plano tangente en P: $z - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0)$
- Un vector normal en P: $\mathbf{N} = (-f'_x(x_0,y_0),\, -f'_y(x_0,y_0),\, 1)$



Herramienta visualización plano tangente
https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Tangente-JS/index.html

Caso 2. Superficie en implícitas. Si la superficie viene dada por una función implícita $F(x,y,z)=0$, con F de clase C^1 el plano tangente y un vector normal en un punto cualquiera P(x_0,y_0,z_0) con $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ será

- Plano tangente en P es:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

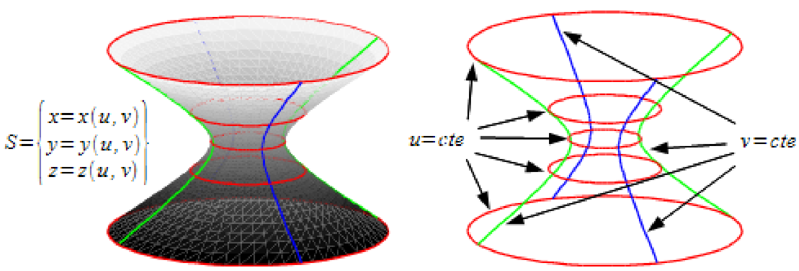
- Un vector normal en P es: $\mathbf{N}=\left(F'_x(x_0,y_0,z_0),\ F'_y(x_0,y_0,z_0),\ F'_z(x_0,y_0,z_0)\right)$

Caso 3. Superficie en paramétricas. Suponiendo que las ecuaciones paramétricas son de clase C^1 en D, es posible definir los siguientes elementos de la superficie:

- Vectores tangentes a la superficie en un punto $P(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0),z(u_0,v_0))$

$$\mathbf{r}'_u=(x'_u(u,v_0),y'_u(u,v_0),z'_u(u,v_0)) \quad \text{y} \quad \mathbf{r}'_v=(x'_v(u_0,v),y'_v(u_0,v),z'_v(u_0,v))$$

Estos vectores son tangentes, respectivamente, a las curvas de la superficie $v=v_0$, $u=u_0$, que se cortan en (u_0,v_0).



- Vector normal en P: $\mathbf{r}'_u\left(u_0, v_0\right) \times \mathbf{r}'_v\left(u_0, v_0\right)$.

ÁREA DE UNA SUPERFICIE

3 Diferencial de superficie

Definición (**Diferencial de superficie**).- Se define el elemento dS como un parche infinitesimal de superficie, cuya proyección sobre los planos coordenados en cada punto es,

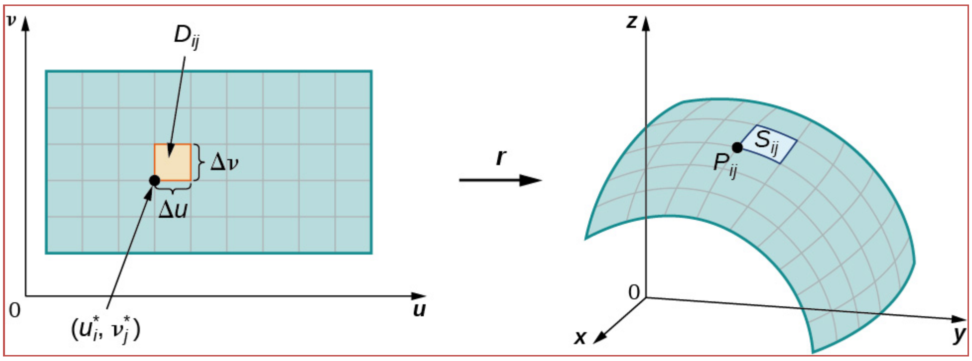
$$dS = \frac{dxdy}{\left|\cos\gamma\right|} = \frac{dydz}{\left|\cos\alpha\right|} = \frac{dxdz}{\left|\cos\beta\right|}$$

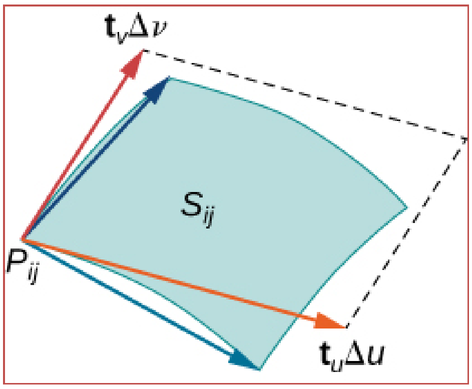
siendo $\left(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\right)$ los cosenos directores del vector normal a la superficie en dicho punto.

En el siguiente apartado se muestra el proceso de cálculo de la diferencial de superficie dependiendo de las ecuaciones con las que esté definida dicha superficie.

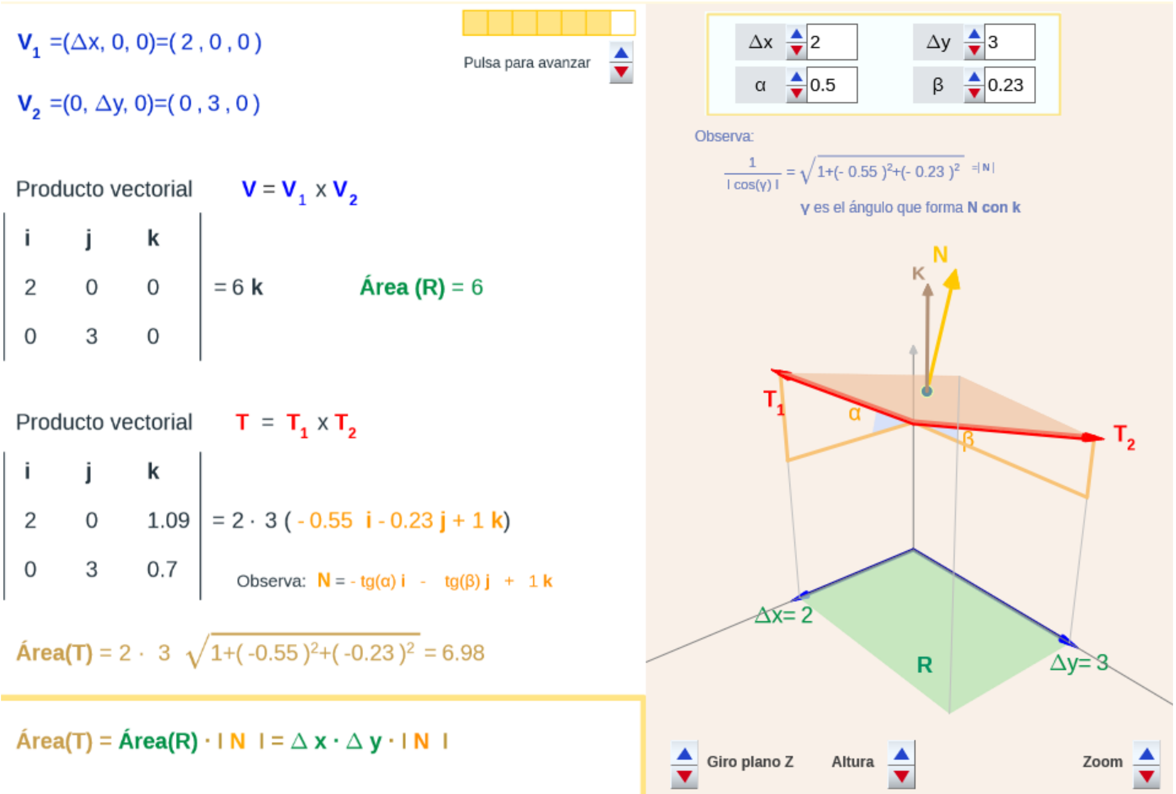
CÁLCULO DE LA DIFERENCIAL DE UNA SUPERFICIE

Nuestro objetivo es definir el área de una superficie S que está definida sobre un dominio D que en la imagen siguiente por simplicidad se ha considerado un rectángulo. Haciendo una partición del dominio D en subrectángulos, se obtiene una división de la superficie. La aproximación del área de este elemento de superficie se aproximará por una porción de plano tangente.





La herramienta siguiente permite mostrar la relación entre el área un paralelogramo y su proyección sobre el plano XY y que puede facilitar la comprensión del concepto de diferencial de superficie si consideramos que el paralelogramo es un “trozo” de plano tangente que se proyecta sobre el rectángulo del plano $z=0$, de área ΔR.



Herramienta
https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/ProyeccionParalelogramo-JS/index.html

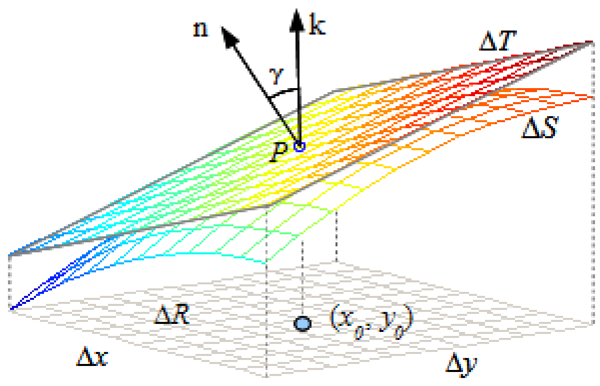
SUPERFICIE DADA POR LA ECUACIÓN CARTESIANA EXPLÍCITA: $z=f(x,y)$

Si la superficie viene dada por la ecuación $z=f(x,y)$, con $(x,y)\in D$, siendo f de clase C^1 en D, se pueden definir

Un vector normal unitario a la superficie en P$\left(x_0, y_0, f\left(x_0,y_0\right)\right)$:

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}=\frac{(-f_x'(x_0,y_0),\,-f_y'(x_0,y_0),\,1)}{\sqrt{f_x'(x_0,y_0)^2+f_y'(x_0,y_0)^2+1}}$$

Vector normal al plano $z=0$ en P:



$\mathbf{k} = (0,0,1)$

Ángulo que forman $\mathbf{n}$ y $\mathbf{k}$ en P: γ

En la figura se muestran, un parche de superficie de área ΔS, una porción de plano tangente a éste parche de área ΔT y la proyección común de ambos, el rectángulo de área ΔR.

El objetivo es encontrar una aproximación del área de ΔS que se proyecta sobre un rectángulo dado del plano $z = 0$, de área $\Delta R = \Delta x \Delta y$.

Puesto que la superficie que mejor aproxima a S en el entorno de un punto es su plano tangente, es la que utilizaremos en esta aproximación. Tomaremos el plano tangente que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y de él recortaremos la porción ΔT que se proyecta sobre ΔR, verificándose

$$\Delta T = \frac{1}{\left|\cos\gamma\right|}\Delta R$$

Cuando las dimensiones de ΔR tiendan a cero, ΔT tenderá al elemento diferencial de superficie, verificándose:

$$dS = \frac{1}{\left|\cos\gamma\right|} dxdy$$

Y puesto que, $\left|\cos\gamma\right| = \left|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\right| = \dfrac{1}{\left|\mathbf{N}\right|}$ resulta finalmente,

$$dS = \left|\mathbf{N}\right| dxdy = \sqrt{f_x'(x,y)^2 + f_y'(x,y)^2 + 1}\, dxdy$$

SUPERFICIE DADA POR LA ECUACIÓN CARTESIANA IMPLÍCITA: $F(x,y,z) = 0$

Si la superficie viene dada por una función implícita $F(x,y,z) = 0$, con F de clase C^1 siendo $F_z' \neq 0$, un vector normal en cada punto es

$$\mathbf{N} = \left(F_x',\ F_y',\ F_z'\right)$$

Con lo cual,

$$\left|\cos\gamma\right| = \left|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\right| = \frac{\left|\left(F'_x, F'_y, F'_z\right)\left(0,0,1\right)\right|}{\sqrt{\left(F'_x\right)^2 + \left(F'_y\right)^2 + \left(F'_z\right)^2}} = \frac{\left|F'_z\right|}{\sqrt{\left(F'_x\right)^2 + \left(F'_y\right)^2 + \left(F'_z\right)^2}}$$

Por tanto,

$$dS = \frac{dxdy}{\left|\cos\gamma\right|} = \frac{\sqrt{\left(F'_x\right)^2 + \left(F'_y\right)^2 + \left(F'_z\right)^2}}{\left|F'_z\right|}dxdy$$

SUPERFICIE DADA POR UNAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$$x = x(u,v),\quad y = y(u,v),\quad z = z(u,v),\quad \text{con } (u,v)\in D$$

Conocidas las ecuaciones paramétricas, el vector de posición de un punto de la superficie es:

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k},\qquad (u,v)\in D$$

Suponiendo que las ecuaciones paramétricas son de clase C^1 en D, un vector normal unitario en P_0 es

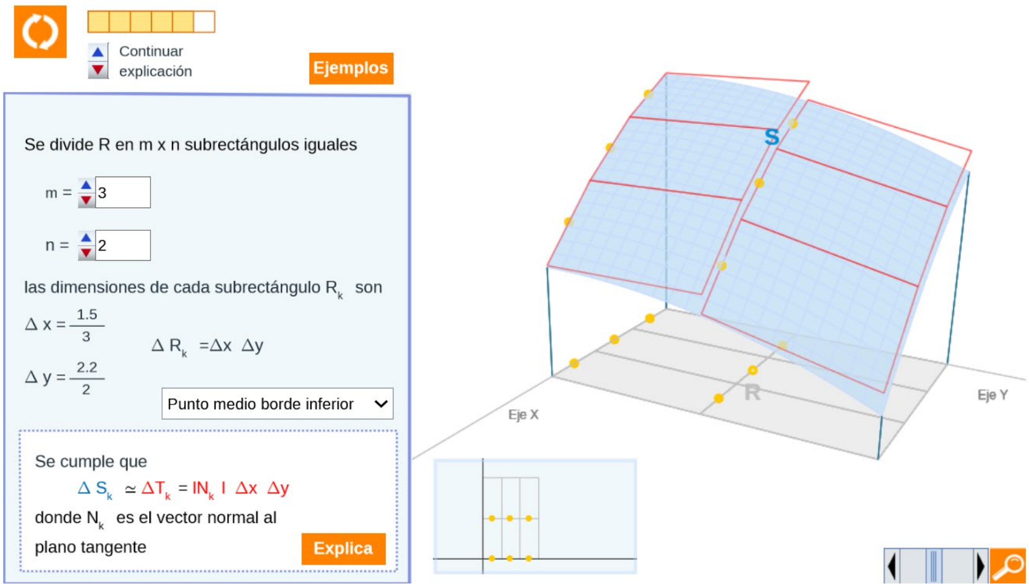
$$\mathbf{n} = \pm\frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{\left|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right|} = \pm\frac{1}{\left|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right|}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$$

y el coseno director en P_0:

$$\left|\cos\gamma\right| = \left|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\right| = \left|\frac{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2}}\right|$$

Sustituyendo la expresión anterior en $dS = \dfrac{dxdy}{\left|\cos\gamma\right|}$ y teniendo en cuenta que $dxdy = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$, resulta

$$dS = \frac{dxdy}{\left|\cos\gamma\right|} = \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,dudv = \left|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right|dudv$$



Herramienta visualización área de una superficie:
https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/escenas/DiferencialSuperficie-JS/index1.html

INTEGRAL DE SUPERFICIE DE UN CAMPO ESCALAR

4 Definiciones

La integral del campo escalar $g(x,y,z)$ sobre la superficie S se expresa con la siguiente notación: $\iint_S g(x,y,z)\,dS$ donde,

- S es una superficie suave[1].
- $g(x,y,z)$ es un campo escalar continuo sobre S.
- dS, es la diferencial de superficie.

Una integral de superficie se calcula transformándola previamente en una integral doble, lo cual requiere expresar el integrando en función de dos únicas variables independientes. El dominio de integración de la integral doble pasará a ser la proyección de la superficie S sobre el plano de las variables independientes elegidas.

Suponiendo S la superficie definida por $z = f(x,y)$ diferenciable, $g(x,y,z)$ continua sobre S y utilizando la expresión obtenida para el diferencial de superficie, la integral de $g(x,y,z)$ campo escalar continuo sobre S, es

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{f_x'(x,y)^2 + f_y'(x,y)^2 + 1}\;\, dA$$

[1] Una superficie suave es imagen de una función de clase C^1 definida en un dominio D.

donde D es la proyección de S sobre el plano $z = 0$.

Suponiendo S la superficie definida por $F\left(x,y,z\right) = 0$, la integral de $g(x,y,z)$ campo escalar continuo sobre S, es

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_D g(x,y,z(x,y)) \frac{\sqrt{\left(F'_x\right)^2 + \left(F'_y\right)^2 + \left(F'_z\right)^2}}{\left|F'_z\right|} dxdy$$

donde D es la proyección de S sobre el plano $z = 0$.

Suponiendo S definida en paramétricas

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \quad \text{con } (u,v) \in D$$

la integral de $g(x,y,z)$ campo escalar continuo sobre S, es

$$\iint_S g(x,y,z)dS = \iint_D g(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right| dudv$$

5 Propiedades

P1 (Linealidad).- La integral de una combinación lineal de funciones es la combinación lineal de las integrales.

P2 (Aditividad sobre la superficie de integración).- La integral sobre una superficie que sea unión de varias es la suma de las integrales sobre cada una de ellas; por ejemplo, para la unión de dos superficies:

$$\iint_{S_1 \cup S_2} g(x,y,z)dS = \iint_{S_1} g(x,y,z)dS + \iint_{S_2} g(x,y,z)dS$$

P3 (Independencia de la parametrización).- El valor de la integral no cambia con la parametrización elegida para la superficie.

P4 (Independencia de la orientación).- El signo de la integral no cambia con la orientación fijada en la superficie.

6 Algunas aplicaciones

Área de una superficie.- Si sobre una superficie S se integra el campo escalar constante $g(x,y,z)=1$, se obtendrá el área superficial de S.

$$\acute{a}rea\left(S\right) = \iint_S dS$$

Masa de una lámina.- Si S es la forma de una lámina, o elemento de dos dimensiones significativas en el espacio, y el campo g da el valor de la densidad superficial en cada punto de la lámina, la masa total de la lámina será la integral de g sobre S.

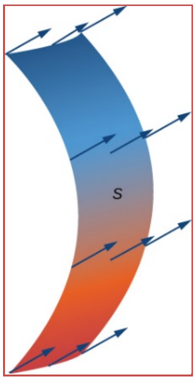
Temperatura media de una lámina.- Si S tiene la forma de una lámina, o elemento de dos dimensiones significativas, y el campo g da el valor de la temperatura en cada punto de la lámina, la integral de g sobre S, dividida por el área de S, es el valor de la temperatura media de la lámina.

INTEGRAL DE SUPERFICIE DE UN CAMPO VECTORIAL O INTEGRAL DE FLUJO

7 Definiciones

La integral del campo vectorial $\mathbf{F}$ sobre la superficie S es la integral de superficie del campo escalar $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$:

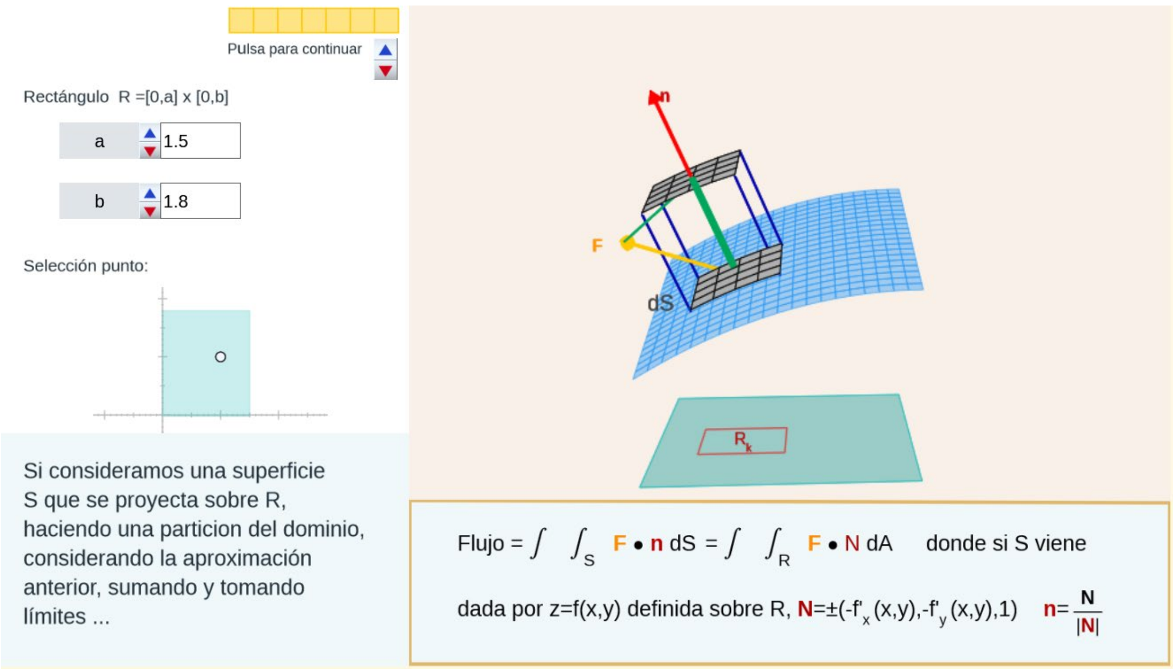
$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$$



Los elementos que intervienen en la integral de un campo vectorial sobre una superficie son:

- La superficie orientada S, en las mismas condiciones de continuidad y derivabilidad impuestas para definir la integral de un campo escalar sobre ella; llamaremos $\mathbf{n}$ al vector normal unitario.
- El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ definido y continuo sobre S.
- La diferencial de superficie dS.

Igual que la integral de un campo escalar, el cálculo de una integral de flujo se realiza previa conversión en una integral doble, cuya expresión dependerá de las ecuaciones de la superficie.



Herramienta interpretación integral de superficie de un campo vectorial
https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/IntegralSuperficieCVectorial-JS/index.html

SUPERFICIE DADA POR LA ECUACIÓN CARTESIANA EXPLÍCITA: $z = f(x,y)$

Si el campo es $\mathbf{F} = (M,N,P)$ y la superficie viene dada por $z = f(x,y)$ en D, la integral de $\mathbf{F}$ sobre S se puede expresar como

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_D (-Mf_x' - Nf_y' + P)dA$$

siendo **n** el vector normal que apunta en la dirección del eje OZ positivo.

SUPERFICIE DADA POR LA ECUACIÓN CARTESIANA IMPLÍCITA: $F(x,y,z) = 0$

Suponiendo F de clase C^1 y $F_z' \neq 0$, y tomando como vector normal el vector $\mathbf{N} = \left(F_x',\ F_y',\ F_z'\right)$, la integral de flujo es

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_D \left(M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j} + P(x,y)\mathbf{k}\right)\frac{(F_x', F_y', F_z')}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}\frac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}{\left|F_z'\right|}dxdy =$$
$$= \iint_D \left(MF_x' + NF_y' + PF_z'\right)\frac{dxdy}{\left|F_z'\right|}$$

Nótese que al ser $F_z' \neq 0$ las variables independientes son x e y, lo cual implica proyectar la superficie sobre el plano $z = 0$.

SUPERFICIE DADA POR UNAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$$x = x(u,v),\quad y = y(u,v),\quad z = z(u,v),\qquad \text{con}\quad (u,v) \in D$$

En este caso la integral es,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_D \left(M(u,v)\mathbf{i} + N(u,v)\mathbf{j} + P(u,v)\mathbf{k}\right)\left(\mathbf{r}_u' \times \mathbf{r}_v'\right)dudv$$

8 Aplicación al Cálculo de Flujos

Si la superficie S está sumergida en un fluido que tiene un campo de velocidades continuo $\mathbf{V}$ y si ΔS es el área de una pequeña parte de S, sobre la cual $\mathbf{V}$ se puede suponer constante, podemos escribir

$$\Delta\phi \approx \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\Delta S$$

donde $\Delta\phi$ es el volumen de fluido por unidad de tiempo, que cruza esa porción de área en dirección y sentido de un vector normal unitario **n**. Sumando todos esos pequeños volúmenes obtendremos que el flujo total de $\mathbf{V}$ a través de S es la integral

$$Flujo = \iint_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dS$$

Esta misma expresión es válida para cualquier otro tipo de flujo, como puede ser el flujo eléctrico, el flujo de calor, etc.

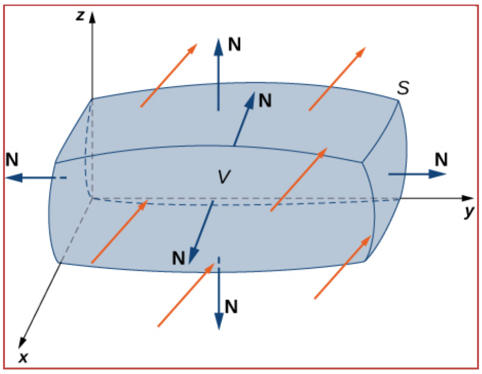
9 Teoremas

El teorema de la divergencia de Gauss relaciona la integral de flujo sobre una superficie cerrada con la integral triple, sobre el volumen interior a dicha superficie, del campo escalar divergencia.

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA DE GAUSS.-

- Hipótesis: los elementos que intervienen en este teorema son
  - la superficie S, cerrada, suave por partes y orientada según la normal unitaria exterior, **n**;
  - la región H cuya frontera la superficie S; se escribe $\partial H = S$;
  - un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ de clase C^1 sobre H y ∂H;
- Tesis: bajo estas hipótesis se verifica que

$$\oiint_{\partial H} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iiint_H div\,\mathbf{F}dV$$



Ejemplo: En la imagen la superficie S es la frontera que encierra el sólido H.

El flujo que atraviesa la superficie S hacia fuera, ya que se está considerando una normal unitaria exterior se puede calcular como una integral triple de la divergencia del campo vectorial sobre el sólido H.

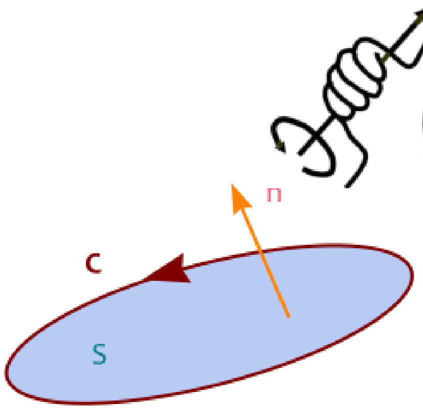
El teorema de Stokes relaciona la integral de superficie que proporciona el flujo del rotacional de un campo vectorial con la integral de línea de ese mismo campo.

TEOREMA DE STOKES.-

- Hipótesis: los elementos que intervienen en este teorema son
  - la superficie S no cerrada, suave por partes, orientada según la normal unitaria **n**;
  - la curva "borde o frontera" de S, que denotamos , orientada conforme a la orientación de S;
  - un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ de clase C^1 sobre S y ∂S;
- Tesis: bajo estas hipótesis se verifica que

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

El convenio para determinar la orientación de la curva y el vector normal a la superficie coherente con dicha orientación viene dado por la regla del sacacorchos: si se recorre ∂S, dejando la cara exterior de la superficie a la izquierda, la normal asociada apunta desde cualquier punto de ella hacia el exterior.



Ejemplo: Este resultado afirma que la circulación de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada es igual al flujo del rotacional del campo a través de cualquier superficie S no cerrada que tiene a C como frontera siempre que se considere el sentido de la circulación y la normal a la superficie relacionadas por la regla del sacacorchos.

Es importante hacer notar que cada contorno C tiene infinitas superficies a efectos de aplicar este resultado.

Ejercicios propuestos

1 En el resumen de teoría se recogen las expresiones del elemento diferencial de superficie de una superficie dada por $z = f(x,y)$ con $(x,y) \in R$, estando R en el plano XY.

a. Escribe la expresión del elemento diferencial de superficie adaptada a la superficie dada por $y = g(x,z)$ con $(x,z) \in R$ estando R en el plano XZ.

b. Encuentra dS para la superficie $x = \sqrt{1-y^2-2z^2}$, tomando como variables independientes con $\left(y,\, z\right) \in \{(y,z) \,/\, y^2 + 2z^2 < 1\}$

Solución: a)

$$dS = \sqrt{g'_x(x,z)^2 + g'_z(x,z)^2 + 1}\, dxdz$$

b) $$dS = \frac{\sqrt{1+2z^2}}{\sqrt{1-y^2-2z^2}}\, dydz$$

2 En el resumen de teoría se recoge la expresión del elemento diferencial se superficie de una superficie dada por $F(x,y,z) = 0$ si $F'_z \neq 0$.

a. ¿Cómo se calcularía el elemento diferencial de superficie si $F'_z \neq 0$?

b. Determina dS para la superficie $x^2 + 5y^2 = 25$ y calcula el área de la porción de ésta superficie situada en el primer octante con $0 \leq z \leq 2$. Resuelve la integral con Matlab.

Solución: b) $área = 11{,}785$

3 Determina el elemento diferencial de superficie para las siguientes superficies e indica en cuáles, el cociente entre el elemento diferencial de superficie y el elemento diferencial de área es constante. Prepara un fichero con Octave/Matlab para dibujar las superficies de este ejercicio, así como una muestra de sus vectores normales.

a) $2x - 3y + 5z = 1$ b) $2x - 3y = 1$

c) $z = \sqrt{9 - x^2 - 2y^2}$ d) $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$

e) $z = \sqrt{x^2 + 3y^2}$ f) $z = 4 - x^2 - 2y^2$

g) $x^2 + 2y = 4$

Solución: a) $dS = \dfrac{\sqrt{38}}{5} dxdy$, $\dfrac{dS}{dA} = cte$;

b) $dS = \dfrac{\sqrt{13}}{3} dxdz$, $\dfrac{dS}{dA} = cte$;

c) $dS = \dfrac{\sqrt{9+2y^2}}{\sqrt{9-x^2-2y^2}} dxdy$;

d) $dS = \sqrt{10}\, dxdy$, $\dfrac{dS}{dA} = cte$;

e) $dS = \sqrt{2}\dfrac{\sqrt{x^2+6y^2}}{\sqrt{x^2+3y^2}} dxdy$;

f) $dS = \sqrt{1+4x^2+16y^2}\, dxdy$;

g) $dS = \sqrt{1+x^2}\,dxdz$

4 Halla el área de la superficie de las siguientes superficies:

a. paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ acotada entre los planos $z = 1$ y $z = 5$.

b. $z = x^2 + (y-1)^2$ comprendida entre los planos z=1 y z=4

c. superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, situado por encima del plano $z = 1$.

d. cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ de altura h.

e. esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Solución: (a) $\pi\left(\sqrt{33} - \sqrt{17}\right)$

b) $\dfrac{\pi\left(17\sqrt{7} - 5\sqrt{5}\right)}{6}$ d) $2\pi ah$ e) $4a^2\pi$

5 (a) Calcula la integral de superficie

$$I = \iint_S (x^2 + y^2)dS$$

donde S es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 0$ para $0 \le z \le b$

(b) Calcula la integral de superficie $I = \iint_S (x^2 + y^2)dS$ donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

(c) Calcula $I = \iint_S \dfrac{z + x^2}{\sqrt{1+4x^2}} dS$ donde S es la porción de la superficie $z = 4 - x^2$ limitada por el plano $x + 2y = 4$

(d) Calcula la integral

$I = \iint_S \left(z + 2x + \dfrac{4}{3}y\right) dS$ donde S es la porción del plano $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 1$ situada en el primer octante.

Solución: (a) $I = 8\pi a^4 / 3$ (b) $I = 8\pi a^4 / 3$

(c) 12 (d) $4\sqrt{61}$

6 Encuentra la masa de la lámina S, su densidad media si en cada punto la densidad de masa superficial de la placa es la función $g(x,y,z)$ indicada.

a) S es la porción del plano $z = x + 2y$ que se proyecta en el rectángulo $R = [0,1] \times [0,3]$ del plano XY; $g(x,y,z) = xyz$

b) S es la parte de la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$ interior a $x^2 + y^2 = 1$; $g(x,y,z) = z$

Solución: a) Masa = 21, densidad media= $\dfrac{7}{2}$

b) Masa = $\dfrac{\pi}{60}\left(7 \cdot 5^{5/2} - 41\right)$, densidad media=

$\dfrac{7 \cdot 5^{5/2} - 41}{10\left(5^{3/2} - 1\right)} = 3,44$

7 Una lámina S ocupa la parte del plano $x + y + z = a$ en el primer octante (a es un número real positivo).

Si la temperatura en cada punto de S es $T(x,y,z) = k\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ ($k > 0$), halla el valor medio de la temperatura en S.

Supón que $T(x,y,z) = \dfrac{1}{x + y + 1}$; halla el valor medio de la temperatura.

Solución:

a) $T_{media} = \dfrac{ka^2}{2}$

b) $T_{media} = \dfrac{2}{a^2}\left(a - \log(a+1)\right)$

8 Se considera la superficie S dada por $x = \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$ y el campo escalar $g(x,y,z) = x\left(y^2 + z^2\right)$. Halla el valor medio de g en S

Solución: $g_{medio} = \dfrac{|a|^3}{4}$

9 Calcula el flujo saliente del campo vectorial $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ a través de la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solución: Flujo $= -3\pi$

10 Calcula el flujo saliente del campo vectorial $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ a través de la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solución: Flujo $= -3\pi$

11 Considera la superficie que ocupa la parte del plano $x + y + z = a$ en el primer octante (a es un número real positivo) y el campo de calor que es proporcional al gradiente de temperatura con signo negativo, esto es, $\mathbf{F} = -c\nabla T,\quad c > 0$ para las funciones de temperatura

a. $T\left(x,y,z\right) = k\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

b. $T\left(x,y,z\right) = \dfrac{1}{x + y + 1}$

Calcula el flujo de calor hacia arriba a través de la placa.

Solución: a) Flujo $-cka^3 < 0$

b) Flujo $2c\left(\log\left(a+1\right) - \dfrac{a}{a+1}\right)$

12 Se considera la superficie S porción del paraboloide $z = a^2 - x^2 - y^2$ para $x,\ y,\ z$ positivos; a es un número real no nulo. Un campo vectorial $\mathbf{F}$ depende de a de la siguiente forma: $\mathbf{F}\left(x,y,z\right) = ax\mathbf{i} - \dfrac{2}{a}y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

a. Calcula a mano el flujo de $\mathbf{F}$ hacia arriba de S

b. Analiza el comportamiento del flujo en función del parámetro a .¿Es creciente el flujo con el valor de $|a|$? ¿Existe un valor mínimo para el flujo? Puedes dibujar con Matlab la función flujo y utilizar el comando `solve` para hacer el análisis pedido.

Solución: Flujo= $\dfrac{\pi a^3}{8}\left(a^2 + a - 2\right)$ b) El flujo alcanza un valor máximo relativo para $a = -1,5662$ y un valor mínimo relativo para $a = 0,7662$.

13 Considerando $\mathbf{F}\left(x,y,z\right) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, calcular el flujo que atraviesa la superficie del sólido encerrado por las superficies $z = 10 - x^2 - y^2$ y $z = 2 + x^2 + y^2$.

Solución: Flujo $= 48\pi$

14 Utiliza el teorema de la divergencia de Gauss en los tres casos siguientes para calcular $I = \iint_{\partial H} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$:

a. $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; H es el hemisferio $0 \le z \le \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

b. $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; H es el sólido parabólico $0 \le z \le 4 - x^2 - y^2$.

c. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x + z^2)\mathbf{i} + (y - z^2)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$; H es el sólido $0 \le y^2 + z^2 \le 1,\ 0 \le x \le 2$.

Solución: a) $I = 0$ b) $I = 64\pi / 3$ c) $I = 4\pi$

15 Encuentra una expresión para la tercera componente, $P\left(x,y,z\right)$, para que el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}\left(x,y,z\right) = \left(xy + z\right)\mathbf{i} + ze^{-y}\mathbf{j} + P\left(x,y,z\right)\mathbf{k}$ hacia arriba del semielipsoide $z = \sqrt{9 - 2x^2 - y^2}$ sea opuesto al flujo hacia debajo de la región D del plano XY encerrada en él y que éste último flujo sea el doble del área de D .

Solución: $P\left(x,y,z\right) = \dfrac{z^2}{2}e^{-y} - yz - 2$

16 Halla el flujo del rotacional de $\mathbf{F}\left(x,y,z\right) = xy^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + e^{x^2}\mathbf{k}$ sobre la parte de $z = 16 - 2x^2 - y^2$ en $z \ge 0$, orientada con la normal hacia arriba.

Solución: Flujo=0

17 Sea S la superficie de ecuación z=2 definida sobre el círculo $x^2 + y^2 \le 4$ y se considera el campo $\mathbf{F}\left(x,y,z\right) = 3y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$. Calcular $\int_C \mathrm{F}\cdot dr$

usando la definición de integral de línea y el Teorema de Stokes.
Solución: -20π

18

Sea C el triángulo orientado situado en el plano $2x+2y+z=6$, intersecado por los planos coordenados y $\mathbf{F}(x,y,z)=-y^2\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$. Calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ usando la definición de integral de línea y el Teorema de Stokes.
Solución: -9.

19

Calcula el trabajo realizado por el campo $\mathbf{F}(x,y,z)=x^2y^3\mathbf{i}+\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=R^2$ en $z=0$.
Solución: Trabajo $=-R^6\pi/8$

20

Calcula la siguiente integral mediante la fórmula de Stokes y después comprueba el resultado integrando directamente

$$I=\oint_C x\,dx+(x+y)dy+(x+y+z)dz$$

siendo C la curva $x=a\,\mathrm{sen}\,t$, $y=a\cos t$, $z=a(\mathrm{sen}\,t+\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

Solución: $I=-\pi a^2$

21

Calcular la circulación de $\mathbf{F}(x,y,z)=(x+3z)\mathbf{i}+(z+y)\mathbf{j}+4y\mathbf{k}$ alrededor del trapecio de vértices $A=(2,-2,0)$, $B=(-2,2,0)$, $C=(-1,1,1)$ y $D=(1,-1,1)$ tomando como orientación la que recorre los vértices en el orden en el que se han definido.
Solución: C=18

22

Comprobar el teorema de Stokes para $\mathbf{F}(x,y,z)=2z\mathbf{i}+x\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$ considerando como superficie S el paraboloide $z=4-x^2-y^2$ y C es la curva de nivel de S sobre el plano XY.
Solución: 4π

Test de autoevaluación

1

El área de la superficie de ecuación $z=16-x^2-y^2$ situada sobre la región $R=\{x^2+y^2\le 16\}$ es,

A. $\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{65}-1\right)$

B. $\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{65^3}-1\right)$

C. $\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{65^3}-1\right)$

D. Ninguna de las anteriores.

2

La temperatura media de la lámina S definida por $\begin{cases} x^2+y^2=1, & y\ge 0\\ 0\le z\le 3\end{cases}$ y con temperatura en cada punto $T(x,y,z)=y$, es:

A. $\frac{2}{\pi}$

B. $\frac{6}{\pi}$

C. 0

D. Ninguna de las anteriores.

3

Sea σ una superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $z=f(r,\theta)$, siendo D la proyección de la superficie en el plano $r\theta$, entonces

A. $Área\ de\ \sigma=\iint_D\sqrt{1+r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}\,dr\,d\theta$

B. $Área\ de\ \sigma=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}\,r\,dr\,d\theta$

C. $Área\ de\ \sigma=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}\,r\,dr\,d\theta\cdot$

D. Ninguna de las anteriores.

4

El área del casquete de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, situado por encima del plano $z = 1$, es:

A. $2\pi\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$

B. $4\pi\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

C. $\pi\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

D. Ninguna de las anteriores.

5

Se consideran las siguientes integrales:

$I_1 = \iint_\sigma g(x,y,z)d\sigma$, $\quad I_2 = \iint_\sigma d\sigma$,

$I_3 = \iint_\sigma \mathbf{F}\,d\boldsymbol{\sigma}$, $I_4 = \iiint_V \left(div\mathbf{F}\right)dV$,

$I_5 = \oint_C \mathbf{F}\mathbf{T}\,ds$

y las siguientes magnitudes:

a. Masa de una lámica
b. Trabajo
c. Circulación
d. Flujo
e. Área superficial

Las integrales y las magnitudes admiten los siguientes emparejamientos:

A. $\left(I_1, e\right)$, $\left(I_2, a\right)$, $\left(I_3, d\right)$, $\left(I_5, b\right)$

B. $\left(I_1, a\right)$, $\left(I_2, e\right)$, $\left(I_4, d\right)$, $\left(I_5, c\right)$.

C. $\left(I_1, a\right)$, $\left(I_2, e\right)$, $\left(I_3, c\right)$, $\left(I_4, d\right)$.

D. Ninguna de las anteriores.

6

El flujo del campo $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ hacia el exterior de la esfera unitaria, es:

A. 0

B. $\dfrac{\pi}{3}$

C. $\dfrac{8\pi}{3}$

D. Ninguna de las anteriores.

7

Sea σ una superficie cerrada que encierra un volumen V y $\mathbf{F}$ un campo vectorial de clase C^2, entonces

A. $\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = 0$

B. $\oiint_\sigma \left(\nabla \times \mathbf{F}\right)\mathbf{n}\,d\sigma = 0$

C. $\oiint_\sigma \left(\operatorname{div}\mathbf{F}\right)\mathbf{n}\,d\sigma = 0$

D. Ninguna de las anteriores.

8

Sea $\mathbf{V}(x,y,z) = \mathbf{a}\times\mathbf{r}$, siendo a un vector constante y r el vector de posición de un punto de $\mathbb{R}^3$ y sea C una curva de $\mathbb{R}^3$ que es frontera de la superficie σ. En estas condiciones se verifica:

A. $\oint_C \mathbf{V}\,d\mathbf{r} = 2\iint_\sigma \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$.

B. $\oint_C \mathbf{V}\mathbf{n}\,ds = \iint_\sigma \left(\operatorname{rot}\mathbf{V}\right)\mathbf{n}\,d\sigma$.

C. $\oint_C \mathbf{V}\,d\mathbf{r} = 2\iint_\sigma \left(\operatorname{rot}\mathbf{r}\right)\mathbf{n}\,d\sigma$.

D. Ninguna de las anteriores.

9

Sea σ el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ con $0 \le z \le 3$ y sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Entonces el flujo de $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ a través del paraboloide en el sentido de la normal exterior es:

A. $-\pi$.
B. π.
C. 0.
D. Ninguna de las anteriores.

10

El valor de la integral de flujo $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})d\boldsymbol{\sigma}$, siendo S la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z \ge 0$ y $\mathbf{F}$ el campo $\mathbf{F} = \left(x^2 + y - 4\right)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + \left(2xz + z^2\right)\mathbf{k}$, es:

A. 32π.
B. 0.
C. 2π.
D. Ninguna de las anteriores.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	C	A	B	C	B	A	C	A

Para realizar diferentes tests de autoevaluación de este tema de forma interactiva, visitar la dirección web
https://www.giematic.unican.es/index.php/integral-de-superficie/material-interactivo
y pulsar los correspondientes enlaces en el apartado "Tests interactivos".

Ejercicios resueltos

SUPERFICIES

1 Representar las siguientes superficies con Matlab

(a) $\begin{aligned} x &= u\cos v \\ y &= u\,senv \\ z &= 9-u^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2 < u < 2\sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{aligned}$

(b) Porción de la superficie $z = x^2 + (y-1)^2$ comprendida entre los planos z=1 y z=4

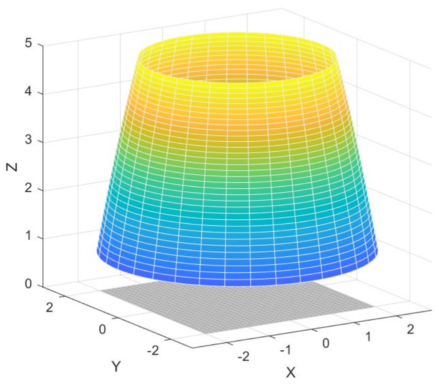
(c) Superficie esférica $x^2+y^2+z^2=2$ situada por encima del plano $z=1$.

(d) Cilindro $x^2+z^2=a^2$ de altura h.

(e) Esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$

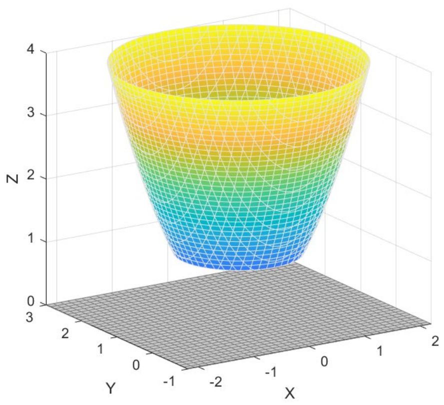
Solución a)

```
syms u v
fsurf(u*cos(v),u*sin(v),9-u^2,[2 2*sqrt(2) 0 2*pi])
hold on
fsurf(0*u,[-2 2 -2 2])
hold off
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
axis equal
```



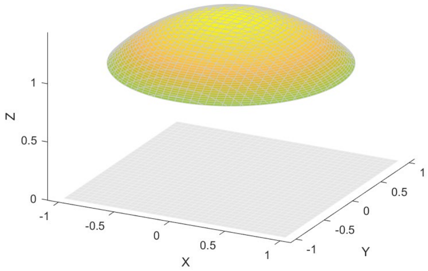
Solución b)

```
syms u v
fimplicit3(x^2+(y-1)^2-z,[-3 3 -1 3 1 4])
hold on
fsurf(0*u)
hold off
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
axis equal
```



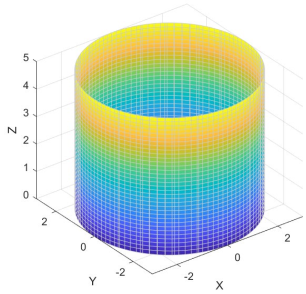
Solución c)

```
syms x y z
hold on
fimplicit3(x^2+y^2+z^2-2,[-1 1 -1 1 1 4])
fsurf(0*x,[-1 1 -1 1])
hold off
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
axis equal
```



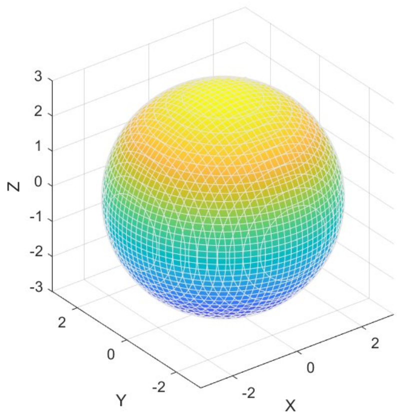
Solución d)

```
syms x y
a=3;h=5;
fimplicit3(x^2+y^2-a^2,[-a a -a a 0 h])
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
axis equal
```



Solución e)

```
syms x y
a=3;
fimplicit3(x^2+y^2+z^2-a^2,[-a a -a a -a a])
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
axis equal
```



DIFERENCIAL DE SUPERFICIE. ÁREA DE UNA SUPERFICIE

2

Considera los vectores $\mathbf{V}_1 = (1.1, 0, 0)$, $\mathbf{V}_2 = (0, 1.3, 0)$ y los vectores

- **T1** : vector del plano XZ que se proyecta sobre **V1** y forma con él $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ radianes.
- **T2** : vector del plano YZ que se proyecta sobre **V2** y forma con él $\beta = \dfrac{\pi}{8}$ radianes.

Se pide:

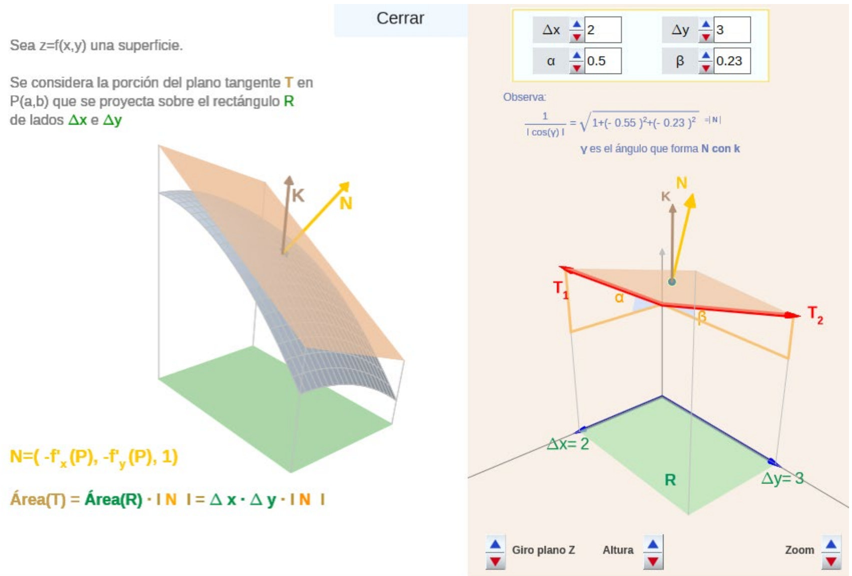
a) Calcular el área del paralelogramo formado por V1 y V2

b) Calcular el área del paralelogramo formado por los vectores T1 y T2.

c) Observa que la relación entre las dos áreas es el módulo del vector normal a los vectores T1 y T2.

Solución

Utiliza la herramienta Área de un paralelogramo y área de su proyección. Diferencial de superficie de la página
https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/integral_superficie.html
para comprobar el resultado.



para observar cómo se obtiene la diferencial de superficie cuando la superficie viene dada en explícitas.

3

Dada la superficie S definida por $z = x^2 + y^2$ sobre el rectángulo $R = [1,2] \times [1,3]$ se pide:

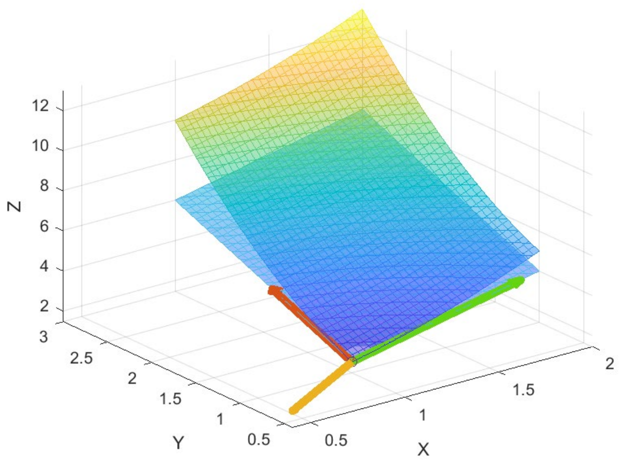
a) Representar la superficie S sobre R.

b) Obtener a mano la ecuación del plano tangente en el punto (1,1).

c) Representar en la misma figura el vector normal $\mathbf{N}$ a la superficie en el punto (1,1) y los vectores directores del plano tangente. $\mathbf{T}_1 = \left(1, 0, f'_x\left(1,1\right)\right)$ $\mathbf{T}_2 = \left(0, 1, f'_y\left(1,1\right)\right)$

Solución

```
syms x y z
fimplicit3(x^2+y^2-z,[1 2 1 3 0 13])
%Plano tangente
%z=2+2(x-1)+2(y-1)
hold on
fimplicit3(-2+2*x+2*y-z,[1 2 1 3 0 8])
quiver3(1,1,2,1,0,2,'linewidth',5)
quiver3(1,1,2,0,1,2,'linewidth',5)
quiver3(1,1,2,-2,-2,1,0.3,'linewidth',5)
plot3(1,1,2,'o')
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
hold off
```



4 Considerando la superficie S del ejercicio anterior $z = f\left(x, y\right) = x^2 + y^2$ sobre el rectángulo $R = \left[1, 2\right] \times \left[1, 3\right]$ se pide:

a) Calcula el área de la porción T de plano tangente en el (1,1) que se proyecta sobre el rectángulo R.

b) Comprueba $área\left(T\right) = \left|\mathrm{N}\right| \cdot área\left(R\right)$ siendo $\mathbf{N} = \left(f'_x\left(1,1\right), f'_y\left(1,1\right), -1\right)$

Solución

Se tiene que $área\left(R\right) = 2$, $\mathbf{N} = \left(f'_x\left(1,1\right), f'_y\left(1,1\right), -1\right) = \left(2, 2, 1\right)$, la porción T está generada por los vectores $T_1 = \left(1, 0, f'_x\left(1,1\right)\right)$, $T_2 = 2\left(0, 1, f'_y\left(1,1\right)\right)$. Por lo tanto, su área es el

$$área\left(T\right) = \left|\left(1, 0, f'_x\left(1,1\right)\right) \times \left(0, 2, 2f'_y\left(1,1\right)\right)\right| = 2 \cdot 3$$

5

Calcular con Matlab el área de la superficie $z = x^2 + (y-1)^2$ comprendida entre los planos z=1 y z=4. Representar la superficie.

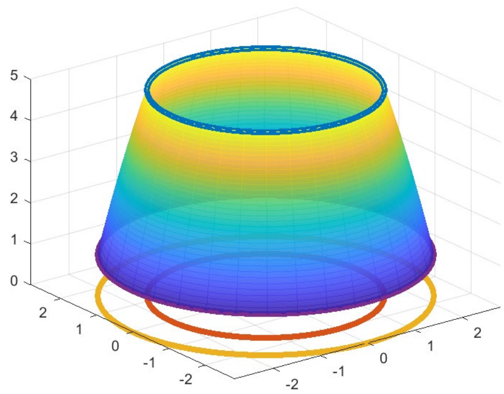
La parametrización de la superficie es

$$\begin{aligned} x &= u\cos v \\ y &= u\,sen v \\ z &= 9-u^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &2 < u < 2\sqrt{2} \\ &0 \le \theta \le 2\pi \end{aligned}$$

Para representar la superficie en paramétricas

```
syms u v
fsurf(u*cos(v),u*sin(v),9-u^2,[2 2*sqrt(2) 0 2*pi])
%Dibujamos la frontera del dominio en el que se
%proyecta la superficie
hold on
fplot3(2*cos(v),2*sin(v),5+0*v,'linewidth',4)
fplot3(2*cos(v),2*sin(v),0*v,'linewidth',4)
fplot3(sqrt(8)*cos(v),sqrt(8)*sin(v),0*v,'linewidth',4)
fplot3(sqrt(8)*cos(v),sqrt(8)*sin(v),1+0*v,'linewidth',4)
hold off
```

La superficie S y su proyección sobre el plano XY se muestra en la siguiente figura:

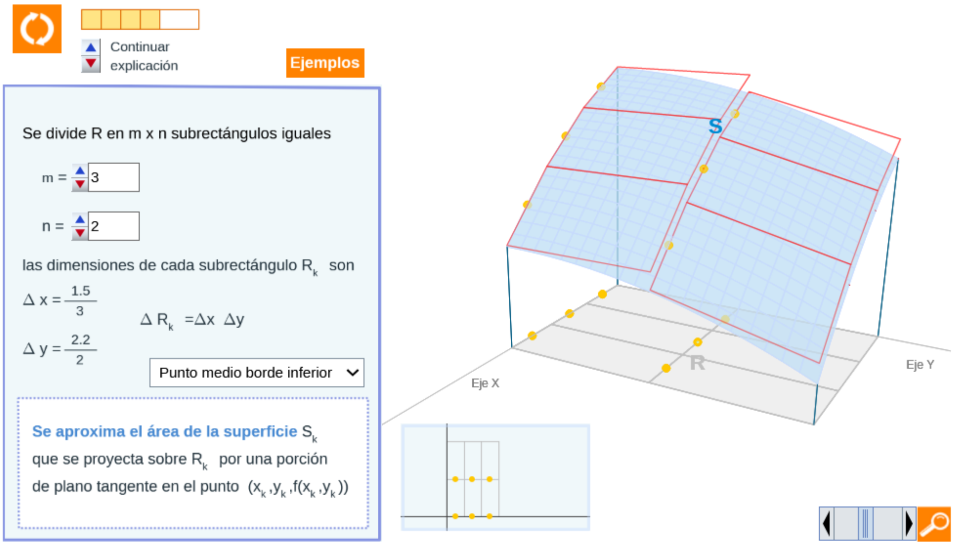


$$dS = \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dxdy \qquad D = \left\{(x,y)\,/\,2 \le x^2+y^2 \le 2\sqrt{2}\right\}$$

$$área = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy \underset{\substack{coordenadas\\polares}}{=} \int_0^{2\pi}\int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2}\,rdrd\theta = \pi\left(\sqrt{33}-\sqrt{17}\right)$$

6

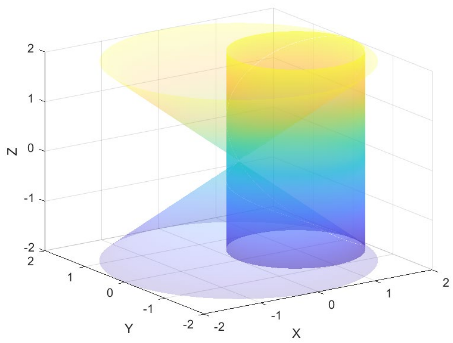
Desde la página
http://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/integral_superficie.html
selecciona la herramienta: Área de una superficie para ver cómo obtener el área de una superficie que viene dada en explícitas.



7

Calcular el área del cono $x^2+y^2-z^2=0$ que es interior al cilindro $x^2+y^2-ax=0$

Solución




```
Código Matlab
syms x y z
b=2;
h1=fimplicit3(x^2+y^2-z^2,[-b b -b b -b b]);
set(h1,'FaceColor','interp','FaceAlpha',0.2,'EdgeColor','none');
hold on
% Dibuja de la segunda superficie
h2=fimplicit3(x^2+y^2-2*x,[-b b -b b -b b]);
set(h2,'FaceColor','interp','FaceAlpha',0.5,'EdgeColor','none')
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z');
%title('')
hold off
```

Al tener el cilindro sus generatrices paralelas al eje OZ, resulta apropiado proyectar la superficie del cono sobre el plano $z=0$, utilizando para calcular el área pedida la expresión $A=\iint_S dS$.

Aplicado a nuestro caso, la ecuación de la superficie es $z=f(x,y)=\pm\sqrt{x^2+y^2}$, lo que nos lleva a:

$$dS = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dxdy = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy = \sqrt{2}dxdy$$

Con respecto al dominio D de integración, será el representado en la figura, intersección del cilindro con el plano de proyección, es decir:

$$x^2 + y^2 - ax = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

la circunferencia de centro $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ y radio $\frac{a}{2}$ es la curva que limita dicho dominio D.

De esta forma, dada la simetría del cono respecto al plano z=0, ya que su ecuación no varía al cambiar z por -z, el área pedida podrá expresarse

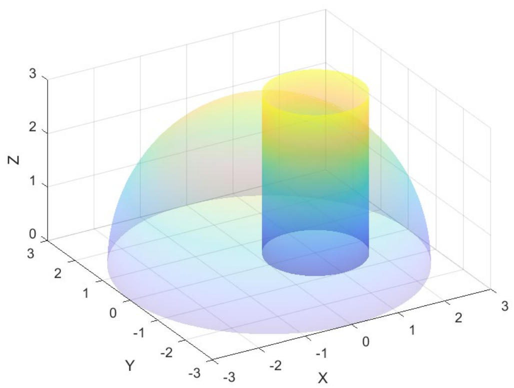
$$Área = 2\sqrt{2}\iint_D dxdy$$

y puesto que $\iint_D dxdy$ representa el área del dominio D, en este caso un círculo de radio $\frac{a}{2}$, será $\iint_D dxdy = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$, luego

$$\text{Área}=2\sqrt{2}\,\frac{\pi a^2}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2} \quad \text{u. d. s.}$$

8 Encontrar el **área** de la región de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ limitada por el cilindro $x^2 + y^2 - 3x = 0$

Solución



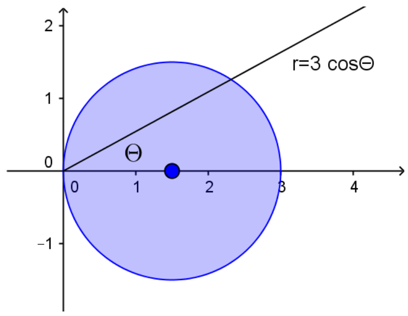
Se trata de calcular el área de la esfera acotada por el cilindro, habrá que calcular la integral de superficie

$$área = 2\iint_S dS = 2\iint_D \sqrt{f_x'(x,y)^2 + f_y'(x,y)^2 + 1}\;dA$$

donde S es la porción de esfera, de ecuación $z = f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$, cuya proyección sobre el plano XY es el interior de la circunferencia $x^2+y^2-3x=0$ que llamamos D.

Sustituyendo, $$\acute{a}rea = 2\iint_D \frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\, dxdy$$

Describiendo el dominio D en coordenadas polares,



$$D \equiv \left\{(r,\theta) \,/\, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad 0 \le r \le 3\cos\theta\right\}$$

la integral será

$$\acute{a}rea = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{3\cos\theta} 3r\left(9-r^2\right)^{-1/2} dr d\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\frac{3}{2}\frac{\left(9-r^2\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{3\cos\theta} d\theta =$$

$$= 18\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(-\operatorname{sen}\theta + 1\right)d\theta = 18\pi - 36$$

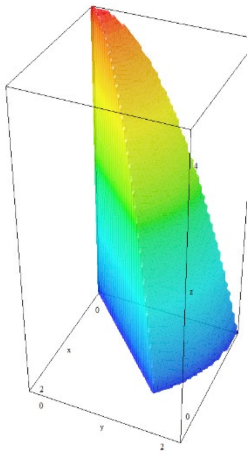
9 Calcula el área de la lámina que tiene la forma de la superficie $z = 4-x^2-y^2$ limitada por los planos $z=0$, $y=x$, $x=0$. Escribir la expresión que permite calcular la temperatura en la lámina si dicha temperatura es en cada punto proporcional al cuadrado de la distancia de dicho punto al eje OZ.

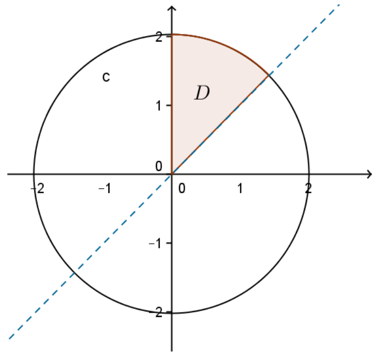
Solución

Considerando $f(x,y) = 4-x^2-y^2$, y llamando D a la proyección de S sobre el plano XY se tiene que el área pedida es

$$\acute{a}rea(S) = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_x\right)^2}\, dxdy$$

Como $\sqrt{1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_x\right)^2} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$, y D es un sector de la circunferencia de centro (0,0) y radio 2, utilizamos coordenadas polares





$$\acute{a}rea\left(S\right)=\iint_D \sqrt{1+\left(f_x'\right)^2+\left(f_x'\right)^2}\;dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \sqrt{1+4r^2}\;\;r\;\;dr\;\;d\theta$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{8}\left.\frac{\left(1+4r^2\right)^{3/2}}{3/2}\right|_{r=0}^{r=2}=\frac{\pi}{48}\left(17\sqrt{17}-1\right)$$

Para obtener la temperatura se deberá calcular

$$\iint_S T\left(x,y,z\right)\Big|_S\,dS=\iint_D k\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+\left(f_x'\right)^2+\left(f_x'\right)^2}\;\;dxdy$$

$$=k\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r^2\sqrt{1+4r^2}\;\;r\;\;dr\;\;d\theta=\frac{k\pi}{4}\int_0^2 r^3\sqrt{1+4r^2}\,dr$$

Las instrucciones Matlab para calcular esta integral serían:

```
>>syms k r
>>k*pi/4*int(r^3*sqrt(1+4*r^2),r,0,2)
```

Observación: Esta última integral se puede calcular por partes, aunque no se pide en el ejercicio.

$$\int r^3\sqrt{1+4r^2}\,dr=\left\{\begin{array}{l} u=r^2\;\rightarrow\;du=2rdr \\ dv=r\sqrt{1+4r^2}\,dr\;\rightarrow\;v=\dfrac{1}{8}\dfrac{\left(1+4r^2\right)^{3/2}}{3/2}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{r^2}{12}\left(1+4r^2\right)^{3/2}-\int\frac{1}{6}r\left(1+4r^2\right)^{3/2}dr=\frac{r^2}{12}\left(1+4r^2\right)^{3/2}-\frac{1}{48}\frac{\left(1+4r^2\right)^{5/2}}{5/2}=$$

$$=\frac{r^2}{12}\left(1+4r^2\right)^{3/2}-\frac{1}{120}\left(1+4r^2\right)^{5/2}$$

Con lo que el valor de la integral sería

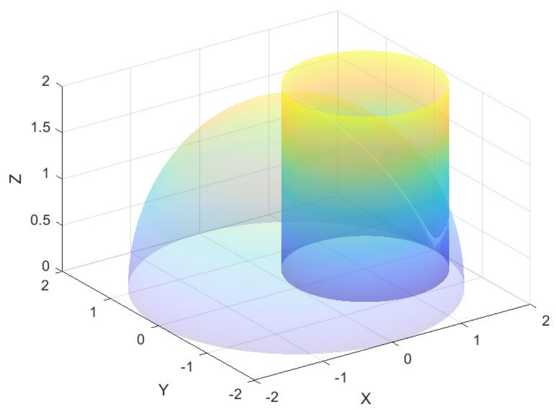
$$I = \frac{k\pi}{4}\left[\frac{r^2}{12}\left(1+4r^2\right)^{3/2} - \frac{1}{120}\left(1+4r^2\right)^{5/2}\right]_{r=0}^{r=2} =$$

$$= \frac{k\pi}{4}\left(\frac{17^{3/2}}{3} - \frac{1}{120}\left(17^{5/2}-1\right)\right) = \frac{k\pi}{4}\left(\frac{391\sqrt{17}}{120} + \frac{1}{120}\right)$$

10 Determinar el área de la porción de superficie de la semiesfera $x^2+y^2+z^2=4a^2$ $\left(z\geq 0\right)$ que es interior al cilindro $x^2+y^2-2ax=0$

Solución

En este caso $z=f\left(x,y\right)=\sqrt{4a^2-x^2-y^2+z^2}$ ya que se indica que $\left(z\geq 0\right)$. Si proyectamos sobre el plano XOY y llamando D a la proyección, se tendrá, Área= $\iint_S dS$

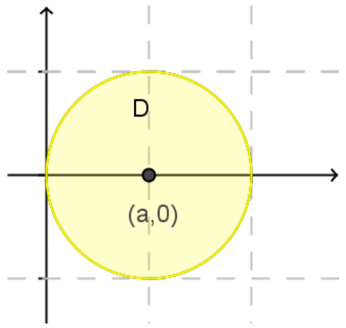



```
Código Matlab:
syms x y z
h1=fimplicit3(x^2+y^2+z^2-4,[-2 2 -2 2 0 2]);
set(h1,'FaceColor','interp','FaceAlpha',0.2,'EdgeColor','none');
hold on
% Dibuja de la segunda superficie
h2=fimplicit3(x^2+y^2-2*x,[-2 2 -2 2 0 2]);
set(h2,'FaceColor','interp','FaceAlpha',0.5,'EdgeColor','none')
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z');
%title('')
hold off
```

Teniendo en cuenta que el punto genérico $\left(x,y,z\right)$ está sobre la esfera, deberá verificar su ecuación, es decir $z=+\sqrt{4a^2-\left(x^2+y^2\right)}$ (recordemos $z\geq 0$), luego, $dS=\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dA$

$$\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2} = \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4a^2-\left(x^2+y^2\right)}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{4a^2-\left(x^2+y^2\right)}}\right)^2} = .$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)}} \quad \Rightarrow \quad Área = \iint_D \frac{2adxdy}{\sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)}}$$



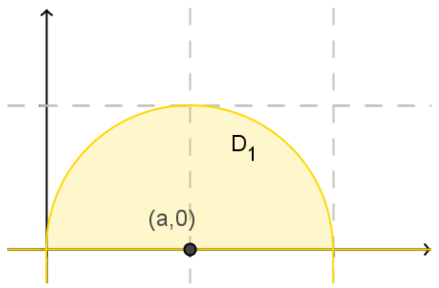
D es el dominio, en el plano XOY, limitado por la circunferencia de la figura, cuya ecuación se puede expresar como

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0\,,$$

o bien

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

Podemos usar simetrías, ya que al cambiar y por -y no cambia la ecuación de la frontera del dominio ni la función subintegral, luego podemos escribir Área$= 4\iint_{D_1} \frac{adxdy}{\sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)}}$, siendo D_1 el semicírculo superior limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ y el eje OX.



Hacemos el cambio a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$dxdy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}drd\theta = rdrd\theta$$

En coordenadas polares, la ecuación de la circunferencia que limita el dominio D' se convierte en $r = 2a\cos\theta$, luego

$$\text{Área}= 4a\iint_{D'} \frac{rdrd\theta}{\sqrt{4a^2 - r^2}} = 4a\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \frac{rdr}{\sqrt{4a^2 - r^2}}$$

Y resolviendo queda

$$\int_0^{2a\cos\theta} \frac{r.dr}{\sqrt{4a^2 - r^2}} = \left[-\sqrt{4a^2 - r^2}\right]_0^{2a\cos\theta} = \sqrt{4a^2}\left(1 - \sqrt{1 - \cos^2\theta}\right) = 2a(1 - \mathrm{sen}\,\theta)$$

$$\text{Área}= 8a^2\int_0^{\pi/2} (1 - \mathrm{sen}\,\theta)d\theta = 8a^2\left[\theta + \cos\theta\right]_0^{\pi/2} = 4a^2(\pi - 2) \ \text{ u. d. s.}$$

11 Determinar el área de la porción del cono $x^2 + y^2 = 3z^2 \quad (z \geq 0)$ que es interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4a^2}{3}$.

Solución

El dominio D, proyectando sobre el plano XOY $(z=0)$, lo obtendremos eliminando z entre las dos superficies:

$$\begin{cases} x^2+y^2-3z^2=0 \\ x^2+y^2+z^2=\dfrac{4a^2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2=\dfrac{1}{3}\left(x^2+y^2\right) \\ z^2=\dfrac{4a^2}{3}-x^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow \left\{\dfrac{4a^2}{3}-x^2-y^2=\dfrac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)\right.$$

simplificando se tiene como ecuación de la frontera del dominio *D* la curva $x^2+y^2=a^2$.

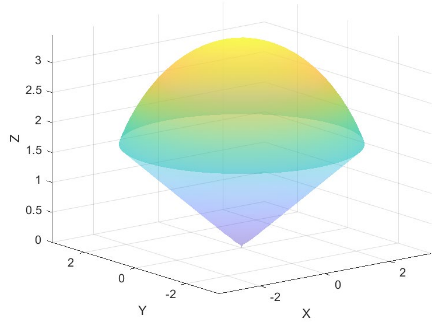
Siendo en este caso $z=f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$, ya que $z\geq 0$. El diferencial de superficie: $dS=\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dA$

$$\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{3\left(x^2+y^2\right)}+\frac{y^2}{3\left(x^2+y^2\right)}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

El área vendrá dada por la expresión A = $\iint_S dS=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\iint_D dxdy$, pero $\iint_D dxdy$ representa el área del dominio D, cuyo valor es πa^2 por ser un círculo, obteniendo:

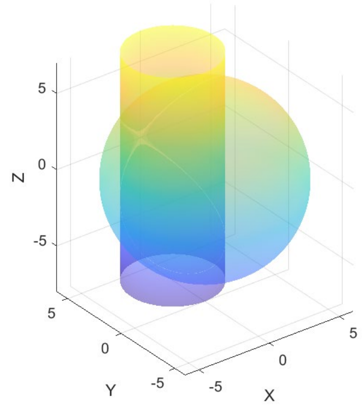
$$A=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi a^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi a^2 \quad \text{u. d. s.}$$




```
Código Matlab
syms x y z
h1=fimplicit3(x^2+y^2-3*z^2,[-5 5 -5 5 0 sqrt(3)]);
set(h1,'FaceColor','interp','FaceAlpha',0.2,'EdgeColor','none');
hold on
% Dibuja de la segunda superficie
h2=fimplicit3(x^2+y^2+z^2-12,[-5 5 -5 5 sqrt(3) sqrt(12)]);
set(h2,'FaceColor','interp','FaceAlpha',0.5,'EdgeColor','none')
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z');
%title('')
hold off
```

12 Determinar el área de la porción del cilindro $x^2 + y^2 - 6y = 0$ que es interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

<u>Nota</u>: se aconseja proyectar sobre el plano $x = 0$ (plano YOZ).



Solución

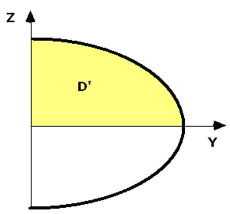
En este caso, $x = f(y,z) = \pm\sqrt{6y - y^2}$ por lo que habrá que proyectar sobre el plano YOZ,

$$dS = \sqrt{1 + f_y'^2 + f_z'^2}\,dxdy \qquad \sqrt{1 + f_y'^2 + f_z'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-2y+6}{2\sqrt{6y-y^2}}\right)^2 + 0} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{(-2y+6)^2}{4(6y-y^2)}} = \sqrt{\frac{24y - 4y^2 + 4y^2 + 36 - 24y}{4(6y-y^2)}} = \sqrt{\frac{36}{4(6y-y^2)}} = \frac{3}{\sqrt{6y-y^2}}$$

Teniendo en cuenta que el área total será dos veces el área en x≥0, se tendrá

$$Área = \iint_S dS = 2\iint_D \frac{3\ dydz}{\sqrt{6y-y^2}} = 6\iint_D \frac{dydz}{\sqrt{6y-y^2}}$$



siendo D el dominio limitado por la curva resultante de eliminar x entre el cilindro y la esfera, es decir,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow z^2 + 6y = 36$$

que es una parábola en el plano YOZ;

podemos usar simetrías, ya que al cambiar z por -z no cambia la ecuación de la frontera del dominio ni la función subintegral, luego podemos escribir

$$\text{Área}=12\iint_{D'}\frac{dy.dz}{\sqrt{6y-y^2}}=12\int_0^6\frac{dy}{\sqrt{6y-y^2}}\left[\int_0^{\sqrt{36-6y}}dz\right]$$

siendo D' la región del primer cuadrante encerrada por la parábola en el cuadrante de las z positivas. Resolvemos la integral entre corchetes,

$$\int_0^{\sqrt{36-6y}}dz=\left[z\right]_0^{\sqrt{36-6y}}=\sqrt{36-6y}$$

se sustituye en la expresión anterior

$$\text{Área}=12\int_0^6\frac{\sqrt{36-6y}.dy}{\sqrt{6y-y^2}}=12\int_0^6\frac{\sqrt{6}\sqrt{6-y}dy}{\sqrt{y}\sqrt{6-y}}=12\sqrt{6}\int_0^6\frac{dy}{\sqrt{y}}=12\sqrt{6}\left[2\sqrt{y}\right]_0^6=144\text{ u.d.s.}$$

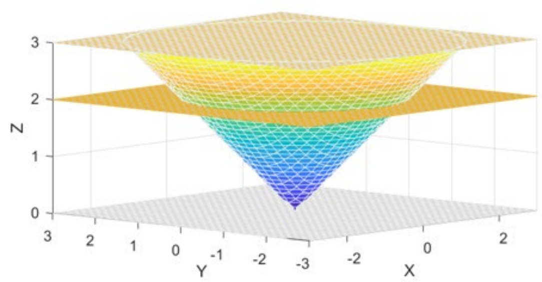
13 Calcula la temperatura media $T(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sobre la porción del cono $z^2=x^2+y^2$ que se encuentra entre los planos $z=2$ y $z=3$.

Solución

Para calcular la temperatura media se tendrá en cuenta que

$$T_m=\frac{\iint_S T(x,y,z)\,dS}{área(S)}=\frac{\iint_S T(x,y,z)\,dS}{\iint_S dS}$$

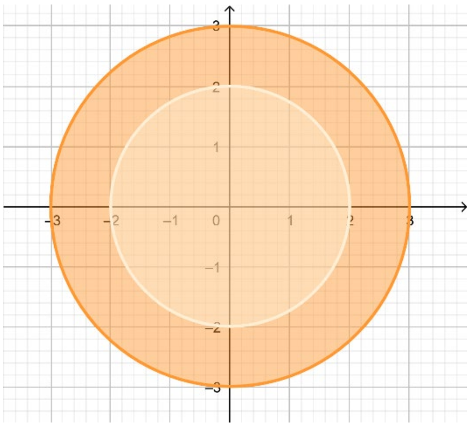
En este caso la superficie S es la parte del cono $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ entre los planos $z=2$ y $z=3$.



El diferencial de superficie es $dS=\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dA$ siendo

$$\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{(x^2+y^2)}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)}}=\sqrt{2}$$

El dominio D, proyección de esta superficie S sobre el plano z=0, es la corona circular determinada por las circunferencias de radios 2 y 3.



Se tiene entonces que el área de la superficie es

$$\iint_S dS = \sqrt{2}\iint_D dxdy = \sqrt{2}\left(3^2\pi - 2^2\pi\right) = 5\sqrt{2}\pi$$

La temperatura total sobre S es

$$\iint_S T\left(x,y,z\right)dS = \iint_D T\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{2}\ dA = \iint_D 2\left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}\ dA$$

Pasando a coordenadas polares

$$\iint_S T\left(x,y,z\right)dS = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_2^3 r^2\cdot r\,drd\theta = 4\sqrt{2}\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_{r=2}^{r=3} = \sqrt{2}\pi\left(81-16\right) = 65\sqrt{2}\pi$$

Por lo tanto, la temperatura media es

$$T_m = \frac{\iint_S T\left(x,y,z\right)dS}{área\left(S\right)} = \frac{65\sqrt{2}\pi}{5\sqrt{2}\pi} = 13^{o}$$

14 Resolver con Matlab los siguientes apartados. (a) Representar la superficie que viene dada por las ecuaciones paramétricas $\mathbf{r}(u,v) = u\cos(v)\mathbf{i} + u\,\mathrm{sen}\,v\,\mathbf{j} + 2v\,\mathbf{k}\quad 0\le u\le 3,\ \ 0\le v\le 2\pi$

(b) Calcula el área de la rampa helicoidal dada por las ecuaciones paramétricas.

(c) Considerando la función $g\left(x,y,z\right) = x + yz$ que representa la función temperatura en un punto del espacio, se pide calcular la temperatura total en S.

Solución

Dada la superficie

$$x = x(u,v),\quad y = y(u,v),\quad z = z(u,v),\quad \text{con } (u,v)\in D$$

se define: $\mathbf{r}\left(u,v\right) = \left(x\left(u,v\right), y\left(u,v\right), z\left(u,v\right)\right)$

$$\mathbf{r}'_u\left(u,v\right) = \left(x'_u\left(u,v\right), y'_u\left(u,v\right), z'_u\left(u,v\right)\right)$$

$$\mathbf{r}_v'(u,v) = \left(x_v'(u,v), y_v'(u,v), z_v'(u,v)\right)$$

Para calcular el producto vectorial de dos vectores ru y rv puedes utilizar el comando `cross`. Por ejemplo,

```
ru=[1,2,r];rv==[2,-1,3];
cross(ru,rv)
```

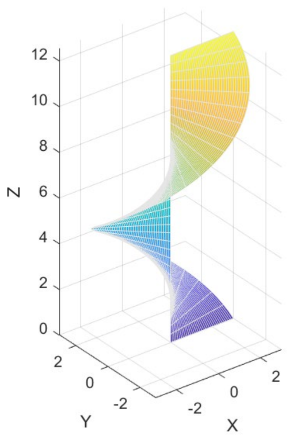
Recuerda que $\iint_S dS = \iint_D \left|\mathbf{r}_u' \times \mathbf{r}_v'\right| dudv$

Solución apartado a) b)

```
%Representación
syms u v
fsurf(u*cos(v),u*sin(v),2*v,[0 3 0 2*pi])
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
axis equal
% Cálculo del área
x=u*cos(v)
y=u*sin(v)
z=2*v
r=[x,y,z]
ru=diff(r,u)
rv=diff(r,v)
prodv=simplify(cross(ru,rv))
dS=sqrt(prodv(1)^2+prodv(2)^2+prodv(3)^2)
area=int(int(dS,u,0,3),v,0,2*pi)
double(area)
```

Solución apartado c)

```
  Temperatura = -(4*pi*(13*13^(1/2) - 8))/3
```



15 Sea S la porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ limitada entre los planos $z = 0$, $y = x$ y $x = 0$. Una lámina tiene la forma dada por S y la temperatura en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia al eje OZ. Crea un fichero con Matlab para resolver los siguientes apartados:

(a) Representar la superficie S utilizando las ecuaciones paramétricas $x = r\cos t,\quad y = r\,\mathrm{sen}\,t,\quad z = 4 - r^2$.

(b) Encontrar la temperatura promedio de la lámina, tomando el valor $k = 1$ para la constante de proporcionalidad de la temperatura.

(c) Determinar y representar sobre la superficie, el lugar geométrico de los puntos de la lámina en los que se alcanza la temperatura promedio para $k = 1$.

Solución

- La función temperatura es, $T(x,y,z) = k(x^2 + y^2)$; donde K es la constante de proporcionalidad.
- la diferencial de superficie es, $dS = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dA$;
- la proyección de la porción de paraboloide sobre el plano $z = 0$ es un sector circular, que podemos definir en coordenadas polares como,

$$D = \left\{(r,\theta)\,/\,0 \le r \le 2,\quad \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

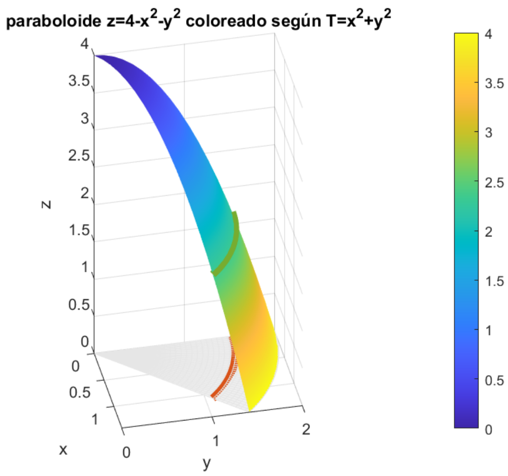
- las integrales para calcular el área y la temperatura global en coordenadas polares son,

$$\text{área} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^2 \sqrt{1+4r^2}\; r\; dr d\theta\,; \qquad \text{temp} = k\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^2 \sqrt{1+4r^2}\; r^3\; dr d\theta$$

y la temperatura media pedida es, tm=temp/area

```
%Dibuja la porción del paraboloide z=4-x^2-y^2, situado en
%el primer octante, entre los planos y=x, x=0, z=0,
%coloreado según T=x^2+y^2
t=linspace(pi/4,pi/2,10);
r=linspace(0,2,20);
[T,R]=meshgrid(t,r);
 X=R.*cos(T); Y=R.*sin(T);Z=4-R.^2;

% dibujo de la superficie, el cuarto argumento es la
% función que da el mapa de color
 surf(X,Y,Z,X.^2+Y.^2)
 xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
 shading interp
 title('paraboloide z=4-x^2-y^2 coloreado según T=x^2+y^2')
 axis equal
 hold on

 %Dibujo del dominio
 syms u v
```

```
 fsurf(u*cos(v),u*sin(v),u*0,[0 2 pi/4 pi/2])

 %Cálculo de la temperatura promedio con k=1
 syms u v
 area=double(int(int(sqrt(1+4*v^2)*v,v,0,2),u,pi/4,pi/2));
 Temp=double(int(int(sqrt(1+4*v^2)*v^3,v,0,2),u,pi/4,pi/2));
 Tm=Temp/area

%Los resultados que se obtienen son:
%area=4,5221;     Temp=10,5579;     Tm=2,3347

%Representamos los puntos (x,y) que cumplen T(x,y)=Tm
syms t
xt=sqrt(Tm)*cos(t);
yt=sqrt(Tm)*sin(t);
zt1=0*xt;
zt=4-xt^2-yt^2;
fplot3(xt,yt,zt1,[pi/4 pi/2],'linewidth',5)
%Representamos los puntos de la placa que están a temperatura media
fplot3(xt,yt,zt,[pi/4 pi/2],'linewidth',5)
colorbar
hold off
```



16 Sea S la porción del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ con $z\le 1$. Una lámina tiene la forma dada por S y su densidad en cada punto es igual a la altura del punto respecto del plano $z=0$. Crea un fichero con Matlab para resolver los siguientes apartados:

(a) Representar la superficie S utilizando las siguientes ecuaciones paramétricas: $x=r\cos t,\quad y=r\,\mathrm{sen}\,t,\quad z=r$

(b) Encontrar la densidad media de la lámina.

(c) Determinar y representar sobre la superficie, el lugar geométrico de los puntos de la lámina que tienen una densidad igual a la densidad media.

Solución

Adaptar el código del ejercicio anterior.

E_01

Se considera el sólido H que ocupa la región del espacio limitada superiormente por $z = 3 - x^2 - y^2$ e inferiormente por $z = 1 + x^2 + y^2$. Cada punto de H está a una temperatura dada por la función $T(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$. Sea S la superficie frontera de H. Se pide

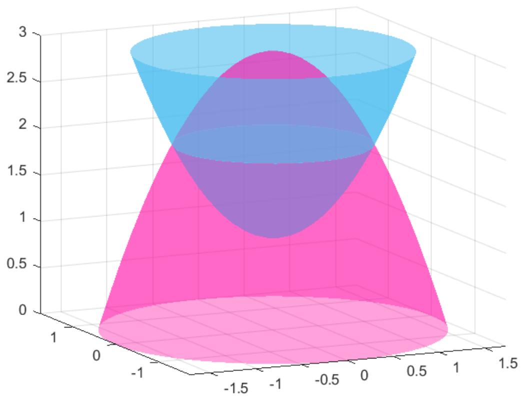
a) Calcula la temperatura media del sólido H.

b) Calcula el área de la superficie S.

c) Plantea las integrales para calcular la temperatura media de la superficie S y escribe el código Matlab para obtener su valor.

Solución a)

La superficie está limitado por dos paraboloides, el azul de la figura siguiente, S1, que tiene por ecuación $z = 1 + x^2 + y^2$ y el rosa S2 de ecuación $z = 3 - x^2 - y^2$.



La superficie S está formada por los dos paraboloides: S1 y S2. El área de S1 y el de S2 es el mismo. El área de cada uno de ellos es

$$\acute{a}rea(S_1) = \iint_{S_1} dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(f_x'\right)^2 + \left(f_y'\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA \underset{\substack{pasando\ a \\ coordenadas \\ polares}}{=}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \frac{2\pi}{8}\left.\frac{\left(1 + 4r^2\right)^{3/2}}{3/2}\right|_{r=0}^{r=1} = \frac{5^{3/2} - 1}{6}\pi = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}\pi$$

El área de S es por tanto dos veces el valor obtenido anteriormente.

$$\acute{a}rea(S) = \frac{5\sqrt{5} - 1}{3}\pi$$

Solución b)

La temperatura media de la superficie será

$$T_{media} = \frac{T_{total\,en\,S}}{área(S)} = \frac{\iint\limits_S T(x,y,z)\,dS}{\iint\limits_S dS} = \frac{\iint\limits_S T(x,y,z)\,dS}{\dfrac{5\sqrt{5}-1}{3}\pi}$$

Para calcular la temperatura total hay que realizar la siguiente integral

$$\iint\limits_{S_1} T(x,y,z)\,dS + \iint\limits_{S_2} T(x,y,z)\,dS =$$

$$= \iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dxdy + \iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{3-x^2-y^2}}\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\sqrt{1+4r^2}\; r\,drd\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3-r^2}}\sqrt{1+4r^2}\; r\,drd\theta$$

El código Matlab para calcular esta integral es el siguiente

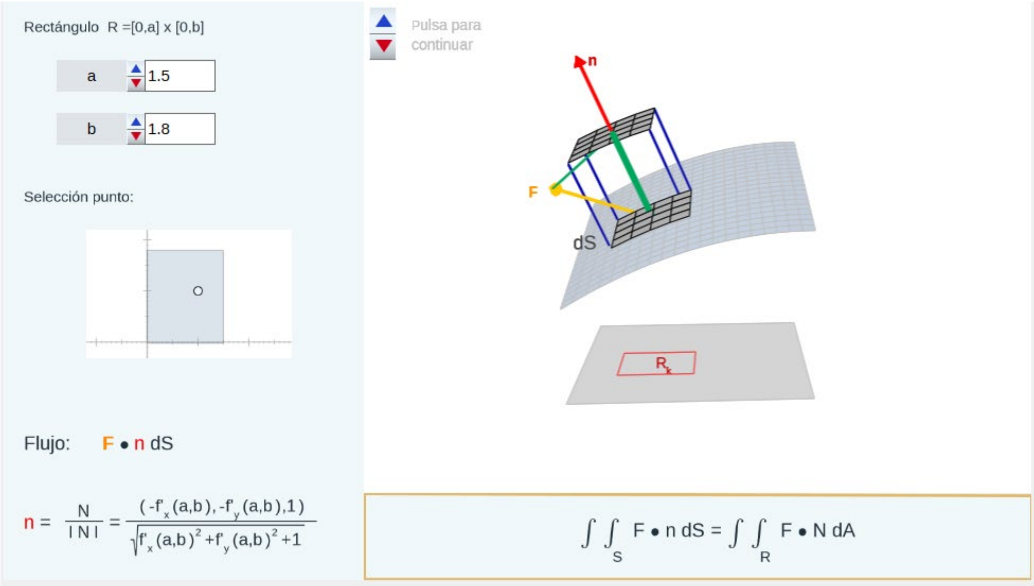
```
syms r t
T1=int(int(1/sqrt(1+r^2)*sqrt(1+4*r^2)*r,r,0,1),t,0,2*pi)
T2=int(int(1/sqrt(3-r^2)*sqrt(1+4*r^2)*r,r,0,1),t,0,2*pi)
T=T1+T2
```

La temperatura media en S será, por lo tanto,

```
areaS= (pi*(5*5^(1/2) - 1))/3
tm=T/areaS
double(tm) %0.7273
```

INTEGRAL DE UN CAMPO VECTORIAL SOBRE UNA SUPERFICIE. FLUJO

17 Desde la página
http://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/integral_superficie.html
utilizar la herramienta Integral de superficie de un campo vectorial para ver una justificación de la definición de esta integral.



18 Se considera el casquete esférico S, definido por $x^2+y^2+z^2=2, \quad z>1$, con la orientación normal exterior a la esfera. Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}=\left(1,0,1\right)$.

Solución

La integral pedida es $I=\iint\limits_S \left(1,0,1\right)\cdot \mathbf{n}\, dS$ donde, $dS=\mathbf{N}dA$, siendo

$$\mathbf{N}=\left(-z'_x,-z'_y,1\right)=\left(\frac{x}{\sqrt{2-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{2-x^2-y^2}},1\right)$$

por lo tanto,

$$\iint\limits_S \left(1,0,1\right)\cdot \mathbf{n}\, dS=\iint\limits_D \left(1+\frac{x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\right)dxdy$$

Resolvemos esta integral en polares, teniendo en cuenta que el dominio de integración es el interior del círculo que se obtiene cortando la esfera por el plano $z=1$

$$D=\left\{(x,y)\,/\,x^2+y^2\le 1\right\}$$

Es decir,

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(1+\frac{r\cos\theta}{\sqrt{2-r^2}}\right)rdrd\theta$$

Si integramos primero respecto de θ y tenemos en cuenta que $\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=0$, queda únicamente la otra integral $I=\int_0^{2\pi}\int_0^1 rdrd\theta=\pi$.

19 Calcular el flujo del campo $\mathbf{F} = \left(x, y, -2z\right)$ a través de la porción de cilindro $x^2 + y^2 = 1$ comprendido entre los planos $z = 1$ y $z = 2$, en el sentido de la normal exterior al cilindro.

Solución

Calcularemos la integral de superficie en paramétricas, utilizando las siguientes ecuaciones para el cilindro

$$x = \cos\theta, \quad y = \operatorname{sen}\theta, \quad z = z$$

El integrando en paramétricas es

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{N}}{\left|\mathbf{N}\right|}\cdot\left|\mathbf{N}\right|dA = \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}dA$$

donde,

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0\right) \quad \text{y} \quad dA = d\theta dz$$

por lo tanto,

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = \mathbf{F} = \left(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -2z\right)\cdot\left(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0\right) = 1$$

Y la integral de flujo es

$$\phi = \int_0^{2\pi}\int_1^2 dz d\theta = 2\pi$$

20 Se considera la porción de superficie $z = 2 - 3y + x^2$ que está por encima del triángulo T que se encuentra en el plano XY y tiene por vértices los puntos (0,0), (2,0) y (2,-4). Sobre cada punto de la superficie se define la función temperatura $T\left(x, y, z\right) = z + 3y - x^2$ y el campo $\mathbf{F}\left(x, y, z\right) = 3x\,\mathbf{i} + 2z\,\mathbf{j} + \left(1 - y^2\right)\mathbf{k}$.

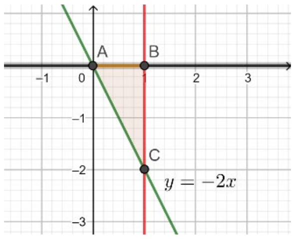
a) Calcular la temperatura total y la temperatura media.
b) El flujo hacia abajo del campo a través de esta superficie.

SOLUCIÓN a)

Se pide calcular la temperatura de la superficie $z = 2 - 3y + x^2$ sabiendo que en cada punto de la superficie su valor es: $T\left(x, y, z\right) = z + 3y - x^2$

$$\iint_S \left(z + 3y - x^2\right) dS$$

La superficie S se proyecta en el plano XY en el dominio D que se representa en la figura



$$Tem_{total} = \iint_S \left(z+3y-x^2\right) dS = \iint_D \left[\left(2-3y+x^2\right)+3y-x^2\right]\sqrt{\left(2x\right)^2+\left(-3\right)^2+1}\, dA =$$

$$= \iint_D 2\sqrt{4x^2+10}\, dA = 2\int_0^2 \int_{-2x}^0 \sqrt{4x^2+10}\, dy\, dx = 2\int_0^2 \left(y\sqrt{4x^2+10}\right)\Big|_{-2x}^0 dx =$$

$$= \int_0^2 4x\sqrt{4x^2+10}\, dx = \frac{1}{3}\left(4x^2+10\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\left(26^{\frac{3}{2}}-10^{\frac{3}{2}}\right) \simeq 33.6506$$

El área de la superficie es

$$área\left(S\right) = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{\left(2x\right)^2+\left(-3\right)^2+1}\, dA = \iint_D \sqrt{4x^2+10}\, dA = \frac{Tem_{total}}{2}$$

La temperatura media es 2.

Solución b)

Se tiene que

$$\iint_S \mathrm{F}\cdot\mathrm{n}\ dS = \iint_D \mathrm{F}\cdot\mathrm{N}\ dA = \iint_D \left(y^2+18y-13\right) dA$$

ya que

$$\mathrm{F}\cdot\mathrm{N} = \left(x,y,2-3y+x^2\right)\cdot\mathrm{N} = \left(3x,2\left(2-3y+x^2\right),1-y^2\right)\cdot\left(2x,-3,-1\right) =$$

$$= \left(6x^2-6\left(2-3y+x^2\right)-\left(1-y^2\right)\right) = y^2+18y-13$$

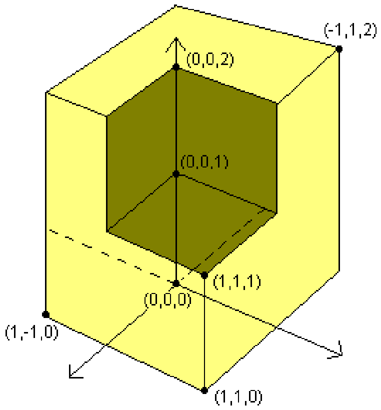
Calculando la integral doble

$$\int_0^2 \int_{-2x}^0 \left(y^2+18y-13\right) dy\, dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{3}y^3+9y^2-13y\right)\Big|_{-2x}^0 dx =$$

$$\int_0^2 \left(\frac{8}{3}x^3-36x^2-26x\right) dx = \left(\frac{2}{3}x^4-12x^3-13x^2\right)\Big|_0^2 = \boxed{-\frac{412}{3}}$$

21 Hallar el flujo del campo $\mathbf{E}(x,y,z) = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, que sale de la superficie cerrada S, que constituye la frontera de un cubo al que se le ha quitado una esquina, como muestra la figura.

Solución



El campo $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es de clase C[1] en $\mathbb{R}^3$. S es una superficie cerrada, suave a trozos, que encierra un sólido V simplemente conexo.

Flujo saliente de V = $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$

Para calcular el flujo total es necesario hallar el flujo saliente a través de cada una de las nueve caras del sólido.

S_1: base inferior, z = 0, $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{k}$; $\Phi_1 = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1 = \iint_{S_1} -z\,dx\,dy = \iint_{S_1} 0\,dx\,dy = 0$

S_2: cara z = 2, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{k}$; $\Phi_2 = \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2 = \iint_{S_2} z\,dx\,dy = \iint_{S_2} 2\,dx\,dy = 2\acute{a}rea\, S_2 = 6$

S_3: cara y = -1, $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{j}$; $\Phi_3 = \iint_{S_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_3 = \iint_{S_3} -y\,dx\,dz = \iint_{S_3} dx\,dz = \acute{a}rea\, S_3 = 4$

S_4: cara y = 1, $\mathbf{n}_4 = \mathbf{j}$; $\Phi_4 = \iint_{S_4} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_3 = \iint_{S_4} y\,dx\,dz = \iint_{S_4} dx\,dz = \acute{a}rea\, S_4 = 3$

S_5: cara x = -1, $\mathbf{n}_5 = -\mathbf{i}$; $\Phi_5 = \iint_{S_5} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_5 = \iint_{S_5} -x\,dy\,dz = \iint_{S_5} dy\,dz = \acute{a}rea\, S_5 = 4$

S_6: cara x = 1, $\mathbf{n}_6 = \mathbf{i}$; $\Phi_6 = \iint_{S_6} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_6 = \iint_{S_6} x\,dy\,dz = \iint_{S_6} dy\,dz = \acute{a}rea\, S_6 = 3$

S_7: cara z = 1, $\mathbf{n}_7 = \mathbf{k}$; $\Phi_7 = \iint_{S_7} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_7 = \iint_{S_7} z\,dx\,dy = \iint_{S_7} dx\,dy = \acute{a}rea\, S_7 = 1$

S_8: cara y = 0, $\mathbf{n}_8 = \mathbf{j}$; $\Phi_8 = \iint_{S_8} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_8 = \iint_{S_8} y\,dx\,dz = \iint_{S_8} 0\,dx\,dz = 0$

S_9: cara x = 0, $\mathbf{n}_9 = \mathbf{i}$; $\Phi_9 = \iint_{S_9} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_9 = \iint_{S_9} x\,dy\,dz = \iint_{S_9} 0\,dy\,dz = 0$

Flujo total saliente de V = $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 + \Phi_7 + \Phi_8 + \Phi_9 = 21$

Utilizando el teorema de Gauss:

Flujo saliente de V = $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_V (\mathrm{div}\ \mathbf{F})\,dx\,dy\,dz$

Como div $\mathbf{F} = \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = 3$, sustituyendo queda

Flujo saliente de $\mathbf{V}$ = $\iiint_V 3dxdydz$ = 3 volumen de V

Flujo saliente de $\mathbf{V}$ = 3 (vol. cubo lado 2 – vol. cubo lado 1) = 3(8-1) = 21 unidades de flujo

22 Se considera la porción del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$, con $x,\ y,\ z$ positivos y un campo vectorial, $\mathbf{V} = (x,\ -2y,\ z)$. Plantear la integral para calcular el flujo hacia el exterior del paraboloide.

Solución

El flujo es $$Flujo = \iint_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D \mathbf{V}\cdot\mathbf{N}\,dA$$ donde,

- El campo actuando sobre la superficie es: $\mathbf{V} = (x,\ -2y,\ 1-x^2-y^2)$
- $\mathbf{N} = \left(-z'_x, -z'_y, 1\right) = \left(2x, 2y, 1\right)$
- $dA = dxdy$

Efectuando el producto escalar $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$, agrupando términos y sustituyendo en la integral de flujo se obtiene esta integral doble:

$$Flujo = \iint_{D_{xy}} \left(x^2 - 5y^2 + 1\right) dA$$

siendo D_{xy} el cuadrante de círculo de radio 1 situado en el primer cuadrante del plano XY.

Si planteamos la integral, utilizando coordenadas polares, se tiene

$$Flujo = \iint_{D_{xy}} \left(x^2 - 5y^2 + 1\right) dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left(r^2\cos^2\theta - r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + 1\right) r\,dr\,d\theta$$

23 Se consideran las superficies $S_1 \equiv z = 1 + x^2 + y^2$ y $S_2 \equiv z = 4 - 2x^2 - 2y^2$ que encierran al sólido H.

(a) Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{j}$, se pide calcular el flujo exterior de F al atravesar $S_1 \cup S_2$ utilizando la definición de flujo.

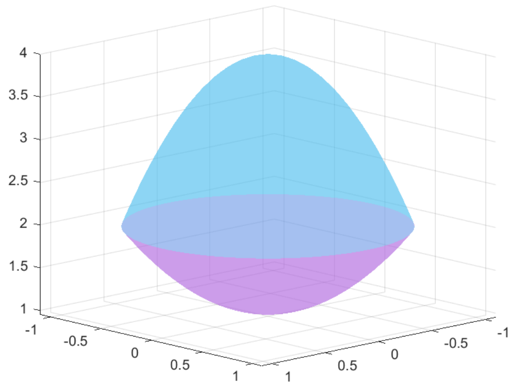
(b) Calcular el volumen de H.

(c) Si en cada punto de H la temperatura es la distancia de cada punto al plano z=0, calcular la temperatura media del sólido.

Solución a)

La curva intersección a estos dos paraboloides es

$$\left.\begin{array}{l} z = 1 + x^2 + y^2 \\ z = 4 - 2x^2 - 2y^2 \end{array}\right\} \to 1 + x^2 + y^2 = 4 - 2x^2 - 2y^2 \to x^2 + y^2 = 1 \ \left(z = 2\right)$$



Flujo a través de $S_1 \equiv z = 1 + x^2 + y^2$ (paraboloide morado en la figura). D es el círculo de centro (0,0) y radio 1 que es la proyección sobre el plano z=0 del sólido H.

$$flujo_1 = \iint_{S_1} F \cdot n_1 dS = \iint_D \left(x, y, 1 + x^2 + y^2\right) \cdot \left(2x, 2y, -1\right) dA = \iint_D \left(2x^2 + 2y^2 - 1 - x^2 - y^2\right) dA =$$

$$\iint_D \left(-1 + x^2 + y^2\right) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(-1 + r^2\right) r \, dr \ d\theta = 2\pi \left[-\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} = -\frac{\pi}{2}$$

Flujo a través de $S_2 \equiv z = 4 - 2x^2 - 2y^2$ (paraboloide azul en la figura). D es el círculo de centro (0,0) y radio 1 que es la proyección sobre el plano z=0 del sólido H.

$$flujo_2 = \iint_{S_2} F \cdot n_2 dS = \iint_D \left(x, y, 4 - 2x^2 - 2y^2\right) \cdot \left(4x, 4y, 1\right) dA = \iint_D \left(4x^2 + 4y^2 + 4 - 2x^2 - 2y^2\right) dA =$$

$$\iint_D \left(4 + 2x^2 + 2y^2\right) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(4 + 2r^2\right) r \, dr \ d\theta = 2\pi \left[\frac{4r^2}{2} + \frac{2r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} = 5\pi$$

Solución b) Volumen de H

$$vol(H) = \iiint_H dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1+r^2}^{4-2r^2} r \, dz \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^1 \left[\left(4 - 2r^2\right) - \left(1 + r^2\right)\right] r \, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(3r - 3r^3\right) dr = \frac{3\pi}{2}$$

Solución c)

$$Temp = \iiint_H z \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1+r^2}^{4-2r^2} z \, r \, dz \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^1 \frac{\left(4 - 2r^2\right)^2 - \left(1 + r^2\right)^2}{2} r \, dr =$$

$$= \pi \int_0^1 \left(3r^4 - 18r^2 + 15\right) r\, dr = \pi \left[\frac{r^6}{2} - \frac{9r^4}{2} + \frac{15r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{7\pi}{2}$$

La temperatura media es

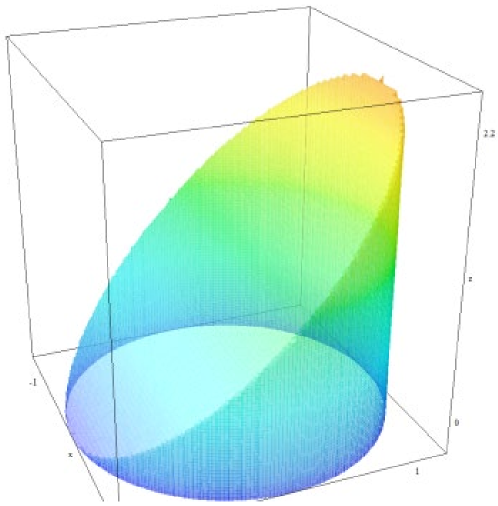
$$T_m = \frac{Temp}{vol(H)} = \frac{\frac{7\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{7}{3}$$

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA O DE GAUSS

24 Calcular el flujo del campo $\mathrm{F}(x,y,z) = y\cos y\mathbf{i} + \operatorname{sen} x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ hacia el exterior de la superficie S que es frontera del sólido H comprendido entre las superficies $z = 1 + y$, $x^2 + y^2 = 1$ y $z = 0$.

Solución

S es la frontera del sólido H interior al cilindro acotado inferiormente por $z = 0$ y superiormente por el plano $z = 1 + y$.



Como se cumplen las hipótesis para aplicar el Teorema de la divergencia, se tendrá que el flujo se puede calcular como la integral triple sobre H de la divergencia de **F**:

$$\iint_S \mathrm{F} \bullet \mathrm{n}\, dS = \iiint_H div \mathrm{F}\, dV$$

Teniendo en cuenta que:

$$div\mathrm{F} = 1$$

$$H = \left\{ (x, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \,/\, x^2 + y^2 \le 1, \quad 0 \le z \le 1 + y \right\} =$$

$$= \left\{ (\mathrm{r}, \theta, \mathrm{z}) \,/\, 0 \le r \le 1, \quad 0 \le z \le 1 + r\operatorname{sen}\theta \right\}$$

el flujo será:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1+r\operatorname{sen}\theta} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\left(1+r\operatorname{sen}\theta\right)drd\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\theta\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta\right)d\theta = \left(\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{3}\cos\theta\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \pi$$

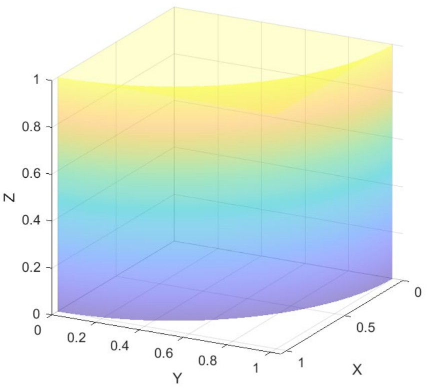
25 Calcula la integral de flujo saliente del campo vectorial

$$\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=\left(y^3+3x\right)\mathbf{i}+\left(xz+y\right)\mathbf{j}+\left(z+x^4\cos\left(x^2y\right)\right)\mathbf{k}$$

a través de la superficie que delimita el sólido $x^2+y^2\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $0\le z\le 1$

Solución

En nuestro caso, $\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=\left(y^3+3x\right)\mathbf{i}+\left(xz+y\right)\mathbf{j}+\left(z+x^4\cos\left(x^2y\right)\right)\mathbf{k}$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$ y la superficie S es cerrada frontera de un sólido H (se trata de la cuarta parte del cilindro de base la circunferencia unidad y altura 1).



Por tanto, podemos aplicar el teorema de la divergencia o teorema de Gauss:

$$\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dS = \iiint_H \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV =$$

Se tiene que: $\operatorname{div}\mathbf{F} = \dfrac{\partial(y^3+3x)}{\partial x}+\dfrac{\partial(xz+y)}{\partial y}+\dfrac{\partial\left(z+x^4\cos\left(x^2y\right)\right)}{\partial z} = 3+1+1=5$

El flujo saliente total a través de la superficie cerrada S, será entonces

$$\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dS = \iiint_H 5\,dV = 5\ vol\left(H\right) = \frac{5\pi}{4}$$

26 Aplicar el Teorema de Gauss para obtener el flujo del campo vectorial:

$\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{k}$ a través de la superficie frontera del sólido

$$H = \left\{ z \geq 0 \ \ , \ \ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \right\}.$$

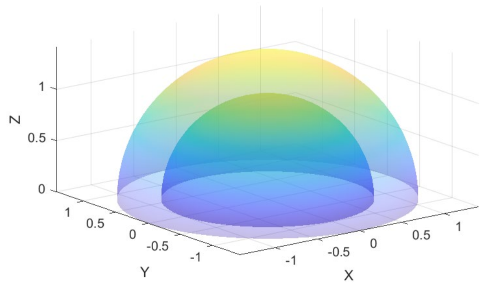
Solución

Utilizando el teorema de Gauss se tendrá que

$$flujo = \iint_{\partial H} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_H div\, \mathbf{F} \, dV = \iiint_H \sqrt{x^2 + y^2} \, dV$$

ya que $div\, \mathrm{F} = \dfrac{\partial M}{\partial x} + \dfrac{\partial N}{\partial y} + \dfrac{\partial P}{\partial z} = 2 - 2 + \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

El sólido H está delimitado por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y el plazo $z = 0$



Pasando a coordenadas esféricas

$$flujo = \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \underbrace{\rho\, sen\phi}_{\sqrt{x^2+y^2}} \ \rho^2 sen\phi \ \ d\theta \, d\phi d\rho = \left(\frac{\rho^4}{4} \right)_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{2}} \left(\theta \right)_{\theta=1}^{\theta=2\pi} \int_0^{\pi/2} sen^2\phi \, d\phi =$$

$$= \left(\frac{4-1}{4} \right) 2\pi \int_0^{\pi/2} sen^2\phi \, d\phi = \frac{3}{4} 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} d\phi =$$

$$= \frac{3\pi}{2} \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{3\pi^2}{8}}$$

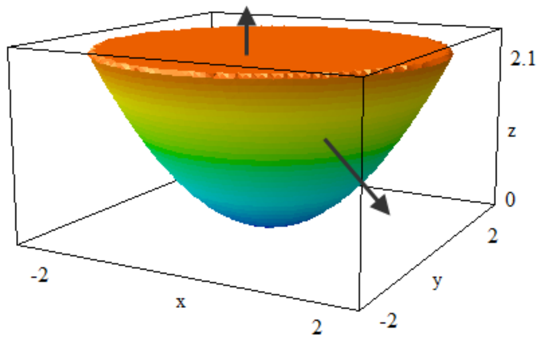
27 Halla el flujo del campo vectorial $\mathrm{F}(x, y, z) = \left(x, y, z \right)$ a través de:

a) La superficie lateral S_1 del paraboloide $x^2 + y^2 = 2az$ con $0 \leq z \leq 2a$.

b) La superficie de la tapa S_2 para $z = 2a$.

c) Aplica el teorema de Gauss a la superficie $S_1 \cup S_2$ comprobando previamente que se cumplen las hipótesis de dicho resultado.

Solución a)



El vector normal a la superficie $z = f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2a}$ es $\mathrm{N} = \left(f'_x, f'_y, -1\right) = \left(\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{a}. -1\right)$. El conjunto D proyección de S_1 sobre XY es el círculo de centro (0,0) y radio $2a$.

$$flujo_{S_1} = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dA = \iint_D \left(x, y, \frac{x^2+y^2}{2a}\right)\cdot\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, -1\right) dA =$$

$$= \iint_D \frac{2x^2+2y^2-x^2-y^2}{2a} dA = \iint_D \frac{x^2+y^2}{2a} dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{2a} \frac{r^3}{2a} dr d\theta = \frac{\pi}{a}\left(\frac{(2a)^4}{4}\right) = 4\pi a^3$$

Solución b)

El vector normal es $\mathbf{N} = \mathbf{k}$. El conjunto D es la proyección de S_2 sobre el plano XY es el círculo de centro (0,0) y radio $2a$.

$$flujo_{S_2} = \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dA = \iint_D (x, y, 2a)\cdot(0,0,1)\, dA =$$

$$= \iint_D 2a\, dA = 2a\acute{A}rea(D) = 8a^3\pi$$

Apartado c)

Para calcular el flujo a través de $S_1 \cup S_2$ aplicando el Teorema de Gauss se tendrá que

$$flujo_{S_1\cup S_2} = \iiint_H div\mathbf{F}\, dV = \iiint_H 3dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{2a}\int_{r^2/2a}^{2a} 3r dz dr d\theta =$$

$$= 3\cdot 2\pi\int_0^{2a}\left(2ar - \frac{r^3}{2a}\right)dr = 6\pi\left(2a\frac{(2a)^2}{2} - \frac{(2a)^4}{8a}\right) = 6\pi\left(4a^3 - 2a^3\right) = 12\pi a^3$$

28 Calcular, utilizando y sin utilizar el teorema de Gauss, el flujo del campo

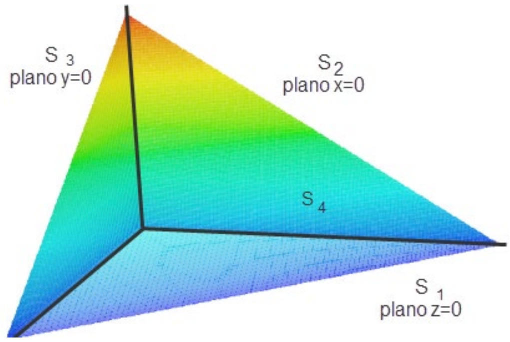
$$\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=x^3\mathbf{i}+\mathbf{y}^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$$

a través de la superficie S que es el exterior del tetraedro formado por los planos $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Nota: Enunciar el teorema de Gauss y justificar si se puede aplicar en el caso del ejercicio.

Solución

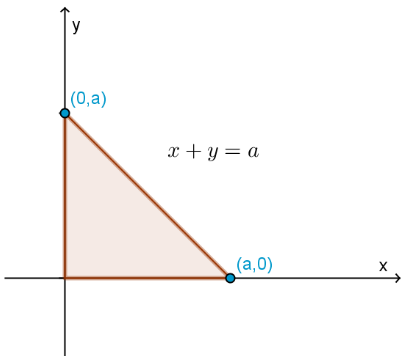
La superficie S está dada por las cuatro caras del tetraedro de la figura.



Si se aplica el teorema de Gauss

$$I=\iint_S \mathbf{F}\,dS=\iiint_V div\,\mathbf{F}\,dxdydz=\iiint_V\left(3x^2+3y^2+3z^2\right)dxdydz$$

La proyección del sólido V sobre el plano XY es el triángulo limitado por los ejes coordenados y la recta $x+y=a$, por lo tanto



$$I=\int_0^a\int_0^{a-x}\int_0^{a-x-y}\left(3x^2+3y^2+3z^2\right)dzdydx$$

Integrando

$$I=\int_0^a\int_0^{a-x}\left(3x^2z+3y^2z+z^3\right)_{z=0}^{z=a-x-y}dydx=$$

$$=\int_0^a\int_0^{a-x}\left(3x^2\left(a-x-y\right)+3y^2\left(a-x-y\right)+\left(a-x-y\right)^3\right)dydx$$

$$= \int_0^a \left(-\frac{3x^2\left(a-x-y\right)^2}{2} + y^3\left(a-x\right) - \frac{3y^4}{4} - \frac{\left(a-x-y\right)^4}{4} \right)_{y=0}^{y=a-x} dx =$$

$$= \int_0^a \left(\left(a-x\right)^4 - \frac{3\left(a-x\right)^4}{4} + \frac{3x^2\left(a-x\right)^2}{2} + \frac{\left(a-x\right)^4}{4} \right) dx = \int_0^a \left(\frac{\left(a-x\right)^4}{2} + \frac{3x^2\left(a-x\right)^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{\left(a-x\right)^4}{2} + \frac{3x^2\left(a^2-2xa+x^2\right)}{2} \right) dx = \left(-\frac{\left(a-x\right)^5}{10} + \frac{x^3a^2}{2} - \frac{3x^4a}{4} + \frac{3x^5}{10} \right)_{x=0}^{x=a} =$$

$$= \frac{a^5}{2} - \frac{3a^5}{4} + \frac{3a^5}{10} + \frac{a^5}{10} = \frac{3a^5}{20}$$

Para resolver la integral directamente, sin aplicar el teorema de Gauss, hay que calcular el flujo a través de cada una de las cuatro caras del tetraedro:

Flujo a través de S_1 **,** que se define por la ecuación z=0,

$$\iint_{S_1} \mathrm{F} dS = \iint_{D_1} \left(x^3, y^3, 0\right) \bullet \left(0,0,-1\right)\, dA = 0$$

Flujo a través de S_2 **,** que se define por la ecuación x=0,

$$\iint_{S_2} \mathrm{F} dS = \iint_{D_2} \left(0, y^3, \mathrm{z}^3\right) \bullet \left(-1,0,0\right)\, dA = 0$$

Flujo a través de S_3 **,** que se define por la ecuación y=0,

$$\iint_{S_3} \mathrm{F} dS = \iint_{D_3} \left(x^3, 0, z^3\right) \bullet \left(0,-1,0\right)\, dA = 0$$

Flujo a través de S_4 **,** que se define por la ecuación $z = a - x - y$, si la proyección de S_4 es D_4

$$\iint_{S_4} \mathrm{F} dS = \iint_{D_4} \left(\mathrm{x}^3, \mathrm{y}^3, \left(a-x-y\right)^3\right) \bullet \left(1,1,1\right)\, dA = \int_0^a \int_0^{a-x} \left(x^3 + y^3 + \left(a-x-y\right)^3\right) dy dx =$$

$$\int_0^a \left[x^3 y + \frac{y^4}{4} - \frac{\left(a-x-y\right)^4}{4} \right]_{y=0}^{y=a-x} dx = \int_0^a \left(x^3\left(a-x\right) + \frac{\left(a-x\right)^4}{4} + \frac{\left(a-x\right)^4}{4} \right) dx =$$

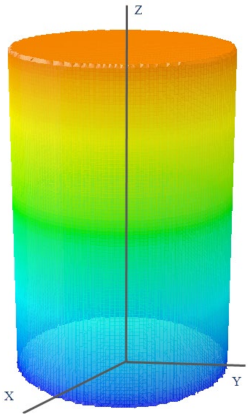
$$\int_0^a \left(x^3 a - x^4 + \frac{\left(a-x\right)^4}{2} \right) dx = \left[\frac{x^4 a}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{\left(a-x\right)^5}{10} \right]_0^a = \frac{a^5}{4} - \frac{a^5}{5} + \frac{a^5}{10} = \frac{3a^5}{20}$$

Por lo tanto, el flujo que se pedía es la suma de los valores obtenidos para cada superficie $\frac{3a^5}{20}$.

29 Calcular, utilizando y sin utilizar el teorema de Gauss, el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(xz,\,-y^2,\,xz\right)$ a través de la superficie cerrada limitada por el cilindro $x^2+y^2\le R^2$ con $0\le z\le 3$.

Solución (sin utlizar el Teorema de Gauss)

La superficie cerrada S que limita el cilindro es la unión de tres superficies, la tapa superior S1, la inferior S2 y la superficie cilíndrica S3.



Parametrización S1

$$S_1=r_1(D_1) \qquad D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\le R^2\right\}$$
$$r_1(x,y)=(x,y,3)$$

El vector normal exterior de la superficie S es

$$N_1=(0,0,1)$$

$$\int_{S_1}\mathrm{F}\cdot\mathrm{n}\,dS=\iint_{D_1}\mathrm{F}\left(r_1(x,y)\right)\cdot(0,0,1)\,dxdy=\iint_{D_1}\left(3x,-y^2,3x\right)\cdot(0,0,1)\,dxdy=$$

$$=\iint_{D_1}3x\,dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R 3r^2\cos\varphi\,d\varphi\right)dr=0$$

Parametrización S2

$$S_2=r_2(D_2) \qquad D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\le R^2\right\}$$
$$r_2(x,y)=(x,y,0)$$

El vector normal exterior de la superficie S es

$$N_2=(0,0,-1)$$

$$\int_{S_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_{D_2}\mathbf{F}\left(r_2(x,y)\right)\cdot(0,0,-1)\,dxdy=\iint_{D_2}\left(0,-y^2,0\right)\cdot(0,0,-1)\,dxdy=0$$

Parametrizamos S3

$$S_3 = r_3\left(D_3\right) \qquad D_3 = \left\{\left(u,v\right) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le 3\right\}$$
$$r_3\left(u,v\right) = \left(R\cos u, R\operatorname{sen} u, v\right)$$

El vector normal exterior de la superficie S es

$$\mathbf{N}_3 = \mathbf{T}_u \mathrm{x} \mathbf{T}_v = \left(R\cos u, R\operatorname{sen} u, 0\right)$$

El flujo de F a través de S3 es

$$\int_{S_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_{D_3} \mathbf{F}\left(r_3\left(u,v\right)\right)\cdot\left(R\cos u, R\operatorname{sen} u, 0\right) dudv =$$

$$= \iint_{D_3} \left(Rv\cos u, -R^2\operatorname{sen}^2 u, Rv\cos u\right)\cdot\left(R\cos u, R\operatorname{sen} u, 0\right) dudv =$$

$$\int_0^3 \int_0^{2\pi} \left(R^2 v\cos^2 u - R^3\operatorname{sen}^3 u\right) dudv = \frac{9}{2}\pi R^2$$

Solución (Utilizando el teorema de Gauss)

Se tendrá

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_V div\mathbf{F}\, dxdydz$$

siendo V el volumen limitado por la superficie S. Se tiene que

$$div\mathbf{F} = z - 2y + x$$

Para calcular la integral triple se pasa a coordenadas cilíndricas

$$I = \int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_V div\mathbf{F}\, dxdydz = \iiint_V \left(z - 2y + x\right) dxdydz$$

siendo $V = \left\{\left(r,\varphi,z\right) / \; 0 \le r \le R,\;\; 0 \le \varphi \le 2\pi,\;\; 0 \le z \le 3\right\}$. Se tendrá entonces

$$I = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^3 \left(z - 2r\operatorname{sen}\varphi + r\cos\varphi\right) rdzd\varphi dr =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{2}r - 6r^2\operatorname{sen}\varphi + 3r^2\cos\kappa\right) d\varphi dr = \int_0^R 9\pi r dr = \frac{9}{2}\pi R^2$$

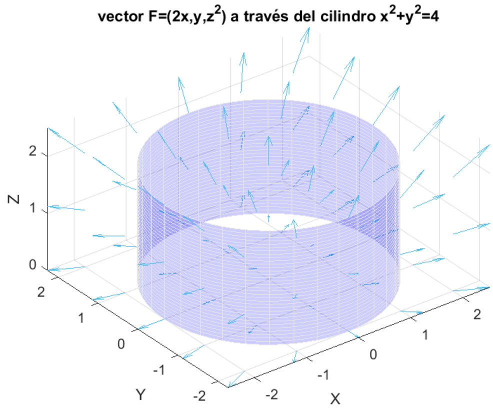
30 Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, se pide determinar el flujo a través de la cara lateral del cilindro $x^2 + y^2 \le a^2$, $\quad 0 \le z \le 2$.

Solución

Código Matlab:

```
% Dibuja una muestra del campo vectorial
% F=(2x,y,z^2)
x=-2:2;y=-2:2;z=0:2;
```

```
[X,Y,Z]=meshgrid (x,y,z);
U=2*X;V=Y;W=Z.^2;
quiver3(X,Y,Z,U,V,W)
hold on
% Dibuja en paramétricas el cilindro x^2+y^2=4
syms t z
h1=fsurf(2*cos(t),2*sin(t),z,[0 2*pi 0 2]);
set(h1,'FaceColor','b','FaceAlpha',0.2,'EdgeColor','b')
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z');
title('vector F=(2x,y,z^2) a través del cilindro x^2+y^2=4')
axis equal; hold off
```



Se cumplen las condiciones para aplicar el Teorema de la divergencia:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario saliente de la superficie S. Es decir, la integral de la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}\left(x,y,z\right)$ extendida al volumen V, es igual al flujo saliente del vector $\mathbf{F}$ a través de la superficie que limita este volumen.

En este caso se cumple que

$$\phi_{\text{sup}} + \phi_{\text{inf}} + \phi_{lat} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, dxdydz\,,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial(2x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z} = 2+1+2z = 3+2z$$

luego,

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_V (3+2z)\, dxdydz\,.$$

Para calcular esta integral triple calculamos el cambio a coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta\,, \\ z = z \end{cases} \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$$

las ecuaciones del dominio $x^2+y^2 \le a^2$, $0 \le z \le 2$, se transforman en $r^2 \le a^2$, $0 \le z \le 2$, luego los nuevos límites de integración serán:

$$D=\left\{(r,\theta,z)\,/\,0\le r\le a,\;\;0\le\theta\le 2\pi,\;\;0\le z\le 2\right\}$$

por tanto,

$$\iiint_V (3+2z)dxdydz=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{2} r\left(3+2z\right)dz\,dr\,d\theta=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{q}rdr\right)\left(\int_0^{2}\left(3+2z\right)dz\right)$$

Podemos resolver las tres integrales por separado, ya que son independientes:

$$\int_0^2(3+2z)dz=\left[3z+z^2\right]_0^2=10\,,\;\;\int_0^a rdr=\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a=\frac{a^2}{2}\quad \text{y}\quad \int_o^{2\pi}d\theta=\left[\theta\right]_0^{2\pi}=2\pi$$

luego

$$\iiint_V (3+2z)\,dx\,dy\,dz=10\pi a^2 \text{ unidades de flujo.}$$

Por otro lado, calcularemos el flujo a través de la cara superior ϕ_{sup}. En esta cara $z=2$ y $dS=dx\,dy$, $\mathbf{n}=\mathbf{k}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=z^2=4$

$$\phi_{\text{sup}}=\iint_{S_{\text{sup}}}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS=4\iint_{\sigma_{\text{sup}}}dxdy=4\acute{A}rea\ de\ S_{\text{sup}}=4\pi a^2 \text{ unidades de flujo}$$

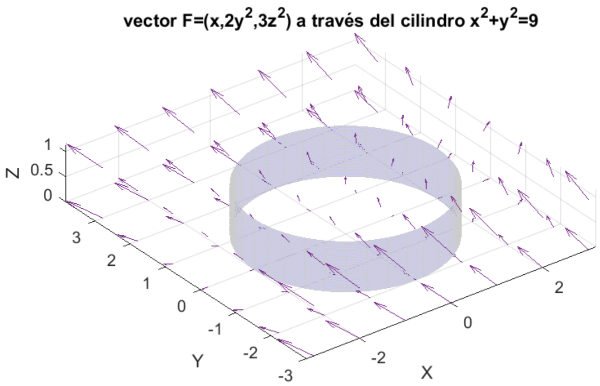
Análogamente para la cara inferior ϕ_{inf}, en ella $z=0$ y $dS=dxdy$, $\mathbf{n}=-\mathbf{k}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=-z^2=0$, luego el flujo saliente a través de la cara inferior es nulo. Podemos escribir:

$$\phi_{lat}=\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz-\phi_{\text{sup}}-\phi_{\text{inf}}=10\pi a^2-4\pi a^2-0=6\pi a^2 \text{ unidades de flujo.}$$

31

Determinar el flujo saliente originado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}\left(x,y,z\right)$ a través de la cara lateral del cilindro del sólido $V\equiv\left\{0\le x^2+y^2\le 9,\,0\le z\le 1\right\}$, siendo $\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=x\mathbf{i}+2y^2\mathbf{j}+3z^2\mathbf{k}$.

Solución



Código Matlab:

```
% Dibuja una muestra del campo vectorial
% F=(x,2y^2,3z^2)
x=-3:3;y=-3:3;z=0:1;[X,Y,Z]=meshgrid (x,y,z);
U=X;V=2*Y.^2;W=3*Z.^2;
quiver3(X,Y,Z,U,V,W); hold on
% Dibuja en paramétricas el cilindro x^2+y^2=9
syms t z
h1=fsurf(2*cos(t),2*sin(t),z,[0 2*pi 0 1]);
set(h1,'FaceColor','b','FaceAlpha',0.2,'EdgeColor','b')
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z');
title('vector F=(x,2y^2,3z^2) a través del cilindro x^2+y^2=9')
axis equal; hold off
```

En nuestro caso, $\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=x\mathbf{i}+2y^2\mathbf{j}+3z^2\mathbf{k}$ es de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$ y V es un sólido simplemente conexo. Por tanto podemos aplicar el teorema de la divergencia o teorema de Gauss:

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV=\iint_S(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dS$$

Se tiene que: $\operatorname{div}\,\mathbf{F}=\dfrac{\partial(x)}{\partial x}+\dfrac{\partial(2y^2)}{\partial y}+\dfrac{\partial(3z^2)}{\partial z}=1+4y+6z$

El flujo saliente total de V se obtendrá calculado el flujo a lo largo de la cara lateral y las caras superior e inferior:

$$\phi_{total}=\phi_{lateral}+\phi_{superior}+\phi_{inferior}$$

Aplicando el Teorema de Gauss se tendrá que

$$\phi_{total}=\iiint_V(1+4y+6z)dxdydz=\iint_D dxdy\left[\int_0^1(1+4y+6z)dz\right]$$

Como

$$\int_0^1(1+4y+6z)dz=\left[z+4yz+3z^2\right]_0^1=4\left(1+y\right)$$

se tendrá

$$\phi_{total} = 4\iint_D (1+y)dxdy$$

siendo el dominio en el plano $D \equiv 0 \le x^2 + y^2 \le 9$. Para realizar esta integral doble se pasa a coordenadas polares,

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\} \qquad J = r$$

siendo el dominio D los puntos (r,θ) con $0 \le r \le 3 \quad y \quad 0 \le \theta \le 2\pi$. Por lo tanto,

$$\phi_{total} = 4\iint_{D'} (1 + rsen\,\theta)rdrd\theta = 4\int_0^{2\pi} d\theta \left[\int_0^3 (r + r^2\,\mathrm{sen}\,\theta)dr\right]$$

$$\int_0^3 (r + r^2\,\mathrm{sen}\,\theta)dr = \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3}\mathrm{sen}\,\theta\right]_0^3 = \frac{9}{2} + 9\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\phi_{total} = 4\int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{2} + 9\mathrm{sen}\,\theta\right)d\theta = 36\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{sen}\,\theta\right)d\theta = 36\left[\frac{\theta}{2} - \cos\theta\right]_0^{2\pi} = 36\pi$$

Por otro lado en la cara superior tenemos $\mathbf{n} = \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 3z^2$ y como es $z = 1$ queda $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 3, \quad dS = dxdy$, por tanto

$$\phi_{\text{superior}} = \iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dS = 3\iint_S dxdy = 3\acute{A}rea\ de\ S = 3\pi 3^2 = 27\pi$$

Análogamente para la cara inferior: $\mathbf{n} = -\mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -3z^2$ y como es $z = 0$ queda $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad dS = dxdy$, por tanto $\phi_{inferior} = 0$.

Despejando el flujo pedido se obtendrá

$$\phi_{lateral} = \phi_{total} - \phi_{\text{superior}} - \phi_{\text{inferior}} = 36\pi - 27\pi = 9\pi \quad \text{unidades de flujo}$$

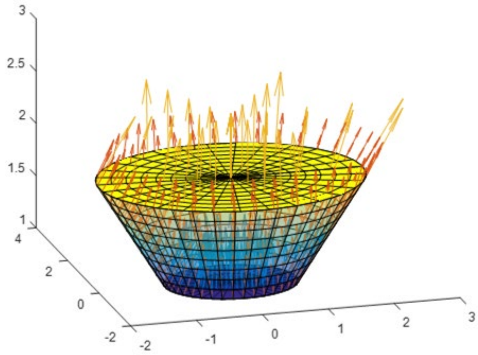
32 Sea H el sólido limitado por las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y los planos $z = 1$ y $z = 2$. Consideremos el campo $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$.

a) Representa la superficie S junto con una muestra del campo.
b) Comprobar el teorema de la divergencia.

Solución

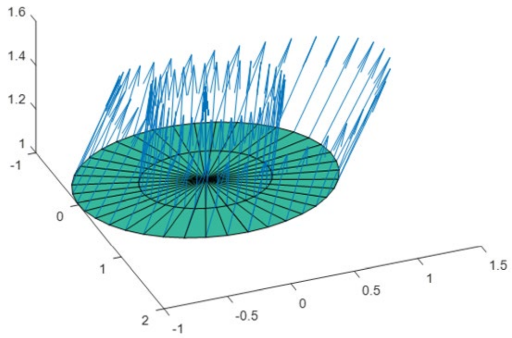
```
%Tapa inferior: S1
r=linspace(0,1,3);t=linspace(0,2*pi,40);
[R,T]=meshgrid(r,t);
X=R.*cos(T);Y=R.*sin(T);Z=0*T+1;
hold on
surf(X,Y,Z)
```

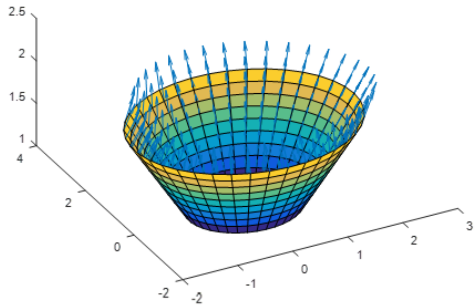
```
quiver3(X,Y,Z,X.^2,Y.^2,Z.^2)
%Superficie lateral: S2
r=linspace(1,2,10);t=linspace(0,2*pi,40);
[R,T]=meshgrid(r,t);
X=R.*cos(T);Y=R.*sin(T);Z=sqrt(X.^2+Y.^2);
h=surf(X,Y,Z)
set(h, 'FaceAlpha', 0.4)
quiver3(X,Y,Z,X.^2,Y.^2,Z.^2)
%Tapa superior: S3
r=linspace(0,2,10);t=linspace(0,2*pi,30);
[R,T]=meshgrid(r,t);
X=R.*cos(T);Y=R.*sin(T);Z=0*T+2;
surf(X,Y,Z)
[R,T]=meshgrid(0:0.5:2,0:1:2*pi);
X=R.*cos(T);Y=R.*sin(T);Z=0*T+2;
quiver3(X,Y,Z,X.^2,Y.^2,Z.^2)
hold off
```



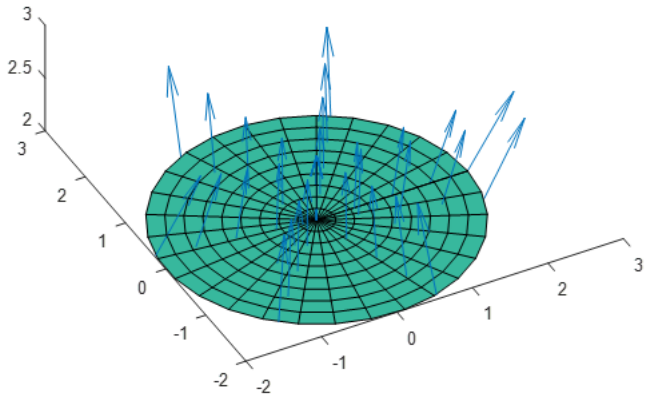
S1: tapa inferior

S2: tapa lateral





S3: tapa superior



Solución b)

Flujo a través de S1 : $-\pi$ Flujo a través de S2 : $-\dfrac{15\pi}{2}$ Flujo a través de S3 : 16π

33 Utiliza el teorema de la divergencia de Gauss en los tres casos siguientes para calcular $I = \oiint_{\partial H} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$. Nota: Este es el ejercicio propuesto número 14.

a) $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; H es la semiesfera $0 \le z \le \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; H es el sólido parabólico $0 \le z \le 4 - x^2 - y^2$

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x + z^2)\mathbf{i} + (y - z^2)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$; H es el sólido $0 \le y^2 + z^2 \le 1$, $0 \le x \le 2$

Representa cada uno de los sólidos anteriores y una muestra del campo actuando sobre ellos. Para la representación puedes utilizar las ecuaciones paramétricas siguientes:

a) Semiesfera:

$$x = 3\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta,\quad y = 3\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\quad z = 3\cos\phi,\quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

b) Paraboloide: $x = r\cos\theta,\quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,\quad z = 4 - r^2,\quad 0 \le r \le 2,\quad 0 \le \theta \le 2\pi$

c) Cilindro: $x = u,\quad y = \cos\theta,\quad z = \mathrm{sen}\,\theta,\quad 0 \le u \le 2,\quad 0 \le \theta \le 2\pi$

Solución a)

Divergencia del campo vectorial: $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = \mathrm{div}\left(z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}\right) = 0$ por lo tanto,

$$\oiint_{\partial H} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_H \mathrm{div}\,\mathbf{F} dV = 0$$

Código para dibujar el sólido:

```
%Dibujo de la semiesfera
fi=linspace(0,pi/2,10);t=linspace(0,2*pi,20);
[Fi,T]=meshgrid(fi,t);
```

```
x=3*sin(Fi).*cos(T);y=3*sin(Fi).*sin(T);z=3*cos(Fi);
surf(x,y,z,'EdgeColor','none', 'FaceAlpha', 0.3)
axis equal
hold on

%dibujo de la base
r=linspace(0,3,5);
[T R]=meshgrid(t,r);
x1=R.*cos(T);y1=R.*sin(T);z1=zeros(size(x1));
surf(x1,y1,z1,'EdgeColor','none', 'FaceAlpha', 0.3)

%dibujo de una muestra del campo sobre las dos superficies
quiver3(x,y,z,z,x,y);
quiver3(x1,y1,z1,z1,x1,y1)
hold off
```

Comprobar que se obtendría el mismo valor calculando la integral de superficie.

Solución b)

Divergencia del campo vectorial: $\operatorname{div}\left(x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}\right)=2(x+y+z)$

Ecuación del paraboloide en cilíndricas: $z=4-r^2$. Dominio de integración en coordenadas cilíndricas:

$$D=\left\{\left(r,\theta,z\right)/\,0\leq r\leq 2,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi,\quad 0\leq z\leq 4-r^2\right\}$$

Por lo tanto,

$$\oiint_{\partial H}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS=\iiint_H \operatorname{div}\mathbf{F}dV=2\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r^2}(r\cos\theta+r\operatorname{sen}\theta+z)rdzdrd\theta$$

Las integrales de $r\cos\theta$ y $r\operatorname{sen}\theta$ son nulas porque los son las de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ en $\left[0,2\pi\right]$, por lo que solo queda la integral siguiente,

$$\oiint_{\partial H}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS=\iiint_H \operatorname{div}\mathbf{F}dV=2\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r^2}zrdzdrd\theta=$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}r(4-r^2)^2drd\theta=2\pi\int_0^{2}r(4-r^2)^2dr=$$
$$=-\pi\int_0^{2}\left(-2r\right)(4-r^2)^2dr=-\pi\left.\frac{(4-r^2)^3}{3}\right]_0^2=$$
$$=\frac{64\pi}{3}$$

Esta integral triple también se podía haber resuelto con Matlab.
Código para dibujar el sólido:

```
%Dibujo del paraboloide
r=linspace(0,2,10);t=linspace(0,2*pi,20);
[R,T]=meshgrid(r,t);
x=R.*cos(T);y=R.*sin(T);z=4-R.^2;
surf(x,y,z,'EdgeColor','none', 'FaceAlpha', 0.3)
axis equal
hold on
```

```
%dibujo de la base
z1=zeros(size(x));
surf(x,y,z1,'EdgeColor','none', 'FaceAlpha', 0.3)

%dibujo de una muestra del campo sobre las dos superficies
quiver3(x,y,z,x.^2,y.^2,z.^2);
quiver3(x,y,z1,x.^2,y.^2,z1.^2)
hold off
```

Comprobar que se obtendría el mismo valor calculando la integral de superficie.

Solución c)

Divergencia del campo vectorial: $\operatorname{div}\left((x+z^2)\mathbf{i}+(y-z^2)\mathbf{j}+x\mathbf{k}\right)=2$

Por lo tanto,

$$\oiint_{\partial H}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS=\iiint_H \operatorname{div}\mathbf{F}dV=2\iiint_H dV=2(\text{volumen de } H)=4\pi$$

Al resultado anterior se llega viendo que el sólido H es un cilindro de radio 1 y altura 2, cuyo volumen es 2π. Si no nos hubiéramos dado cuenta de esto, la integral triple se puede plantear en cilíndricas y resolver con Matlab.

Puesto que el eje del cilindro es el OX y se proyecta sobre la circunferencia $y^2+z^2=1$, el cambio de variables a coordenadas cilíndricas, en este caso, es el siguiente:

$$x=x,\quad y=r\cos\theta,\quad z=r\operatorname{sen}\theta$$

y el dominio es, $D=\left\{(x,r,\theta)\,/\,0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le r\le 1,\quad 0\le x\le 2\right\}$, por lo tanto la integral triple en cilíndricas es,

$$2\iiint_H dV=2\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^2 r\,dx\,dr\,d\theta=4\pi$$

```
%Dibujo del cilindro
x=linspace(0,2,10);t=linspace(0,2*pi,20);
[X,T]=meshgrid(x,t);
y=cos(T);z=sin(T);
surf(X,y,z,'EdgeColor','none', 'FaceAlpha', 0.3)
axis equal
hold on

%dibujo de las bases
r=linspace(0,1,5);
[T1 R]=meshgrid(t,r);
x1=zeros(size(T1));y1=R.*cos(T1);z1=R.*sin(T1);
x2=2*ones(size(T1));
surf(x1,y1,z1,'EdgeColor','none', 'FaceAlpha', 0.3)
surf(x2,y1,z1,'EdgeColor','none', 'FaceAlpha', 0.3)
```

34 Calcular el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x, y^2, z^2)$ hacia el exterior de la esfera unitaria, directamente con la definición y aplicando el teorema de Gauss.

Solución

Llamando H a la esfera y D al disco unidad, utilizando el Teorema de Gauss, se tendrá que

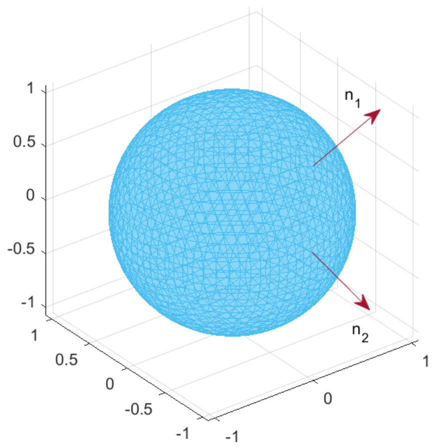
$$flujo = \iiint_H divF\,dV = \iiint_H (2+2y+2z)\,dV = \iint_D \left(2z+2yz+z^2\right)_{z=-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} dA$$

$$= \iint_D \left(4\sqrt{1-x^2-y^2} + 4y\sqrt{1-x^2-y^2}\right) dA = \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(4\sqrt{1-r^2} + 4r sen\,\theta\,\sqrt{1-r^2}\right) r d\theta dr$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} 4r\sqrt{1-r^2}\,d\theta dr = 4\pi\left[\frac{\left(1-r^2\right)^{3/2}}{3/2}\right]_{r=0}^{r=1} = \boxed{\frac{8\pi}{3}}$$

Nota: Se ha utilizado que $\int_0^{2\pi} sen\,\phi = 0$, el integrando es impar y periódico.

Sin utilizar el teorema, hay que calcular el flujo a través de la semiesfera superior y de la semiesfera inferior



-

- Flujo a través de la semiesfera superior

$$z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \qquad n_1 = \left(-f_x', -f_y', 1\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\right)$$

$$flujo1=\iint_D\left(2x,y^2,1-x^2-y^2\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},1\right)dA=$$

$$\iint_D\left(\frac{2x^2+y^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+1-x^2-y^2\right)dA$$

siendo D el disco unidad.

- Flujo a través de la semiesfera inferior

$$z=f\left(x,y\right)=-\sqrt{1-x^2-y^2}\qquad \mathbf{n}_2=\left(f_x',f_y',-1\right)=\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},1\right)$$

$$flujo2=\iint_D\left(2x,y^2,1-x^2-y^2\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},-1\right)dA=$$

-

$$\iint_D\left(\frac{2x^2+y^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}}-1+x^2+y^2\right)dA$$

siendo D el disco unidad.

Sumando ambas integrales

$$flujo1+flujo2=2\iint_D\left(\frac{2x^2+y^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)dA=2\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{2r^2\cos^2\theta+r^3sen^3\theta}{\sqrt{1-r^2}}\right)r\ dr d\theta=\boxed{\frac{8\pi}{3}}$$

Nota: Hay que tener en cuenta que

- $\int_0^{2\pi} sen^3\theta=0$ (impar y periódica)
- Además, $\int\frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}dr=\int r^2\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr \underset{\left\{\begin{array}{l}Int.partes\\ u=r^2\to du=2rdr\\ dv=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr\to v=-\sqrt{1-r^2}\end{array}\right\}}{=}$

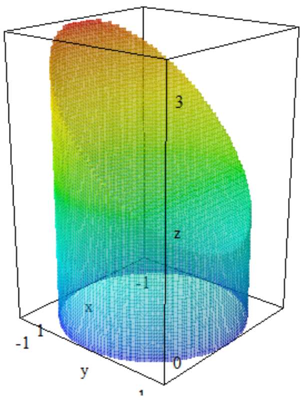
$$=-r^2\sqrt{1-r^2}+\int 2r\sqrt{1-r^2}dr=-r^2\sqrt{1-r^2}-\frac{2\left(1-r^2\right)^{3/2}}{3}=$$

$$=\sqrt{1-r^2}\left(-r^2-\frac{2\left(1-r^2\right)}{3}\right)=-\sqrt{1-r^2}\frac{\left(r^2+2\right)}{3}$$

35 El cilindro $x^2+y^2=1$ corta al plano $y+z=2$ en la curva C. Calcular la circulación del campo vectorial $\mathbf{F}=xy\,\mathbf{i}+yz\,\mathbf{j}+xz\,\mathbf{k}$ sobre C, utilizando obligatoriamente el teorema de Stokes y recorriendo la curva C en sentido antihorario (vista desde arriba).

Nota: Se deberá comprobar que se cumplen las hipótesis del Teorema de Stokes

Solución



Aplicando el Teorema de Stokes, la circulación del campo **F** a lo largo de la curva **C** será

$$circulación=\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S rot\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

donde S es la superficie interior a la curva C que se encuentra sobre el plano $y+z=2$.

La integral de superficie se calcula de la forma siguiente:

$$\iint_S rot\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_D rot\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dA$$

donde

- D es la proyección de S sobre el plano XY, es decir, el círculo unidad
- Como S es la porción del plano $z=f(x,y)=2-y$ limitada por C, el vector normal a la superficie es: $\mathbf{N}=\left(-f_x',-f_y',1\right)=\left(0,1,1\right)$
- $rot\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & yz & xz\end{vmatrix}=-y\,\mathbf{i}-z\,\mathbf{j}-x\,\mathbf{k}$

Por lo tanto,

$$circulación=\iint_D\left(-y,-2+y,-x\right)\cdot\left(0,1,1\right)dA=\iint_D\left(-2+y-x\right)dA=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(-2+r\operatorname{sen}\theta-r\cos\theta\right)r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(-1+\frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta-\frac{1}{3}\cos\theta\right)d\theta=-2\pi$$

Aunque el ejercicio no pide obtener directamente la integral de línea podemos calcularla para verificar el resultado:

$$circulación = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C xydx + yzdy + xzdz$$

siendo C la curva

$$x(t) = \cos t \qquad y(t) = \operatorname{sen} t \qquad z(t) = 2 - \operatorname{sen} t \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$x'(t) = -\operatorname{sen} t \qquad y'(t) = \cos t \qquad z'(t) = -\cos t$$

$$circulación = \int_0^{2\pi} \left(-\cos t \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} t\left(2 - \operatorname{sen} t\right)\cos t - \cos t\left(2 - \operatorname{sen} t\right)\cos t\right) dt = -2\pi$$

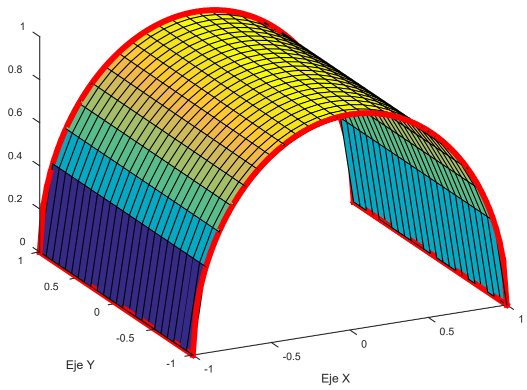
36

Sea S la parte del semicilindro $z = \sqrt{1 - x^2}$ comprendido entre $y = -1$, e $y = 1$. Consideramos el campo $F(x, y, z) = \left(y + z, x^2 + z^2, y\right)$.

a) Dibujar la superficie en el rectángulo [-1,1]x[-1,1]
b) Comprobar que se verifica el Teorema de Stokes

Solución

```
syms x y
fsurf(x,y,sqrt(1-x^2),[-1 1 -1 1])
xlabel('Eje X')
ylabel('Eje Y')
```



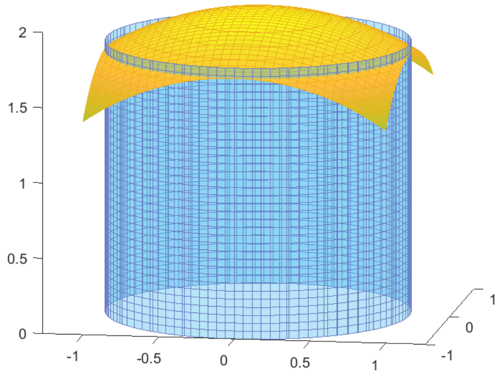
Se cumple $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S rot\mathbf{F} \cdot dS = -4$. Escribimos el códio matab para comprobarlo.

37

Calcula el flujo saliente del rotacional del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x\,z,\; y\,z, x\,y\right)$ a través de la superficie formada por la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ para $z \geq 0$.

Solución

Se trata de calcular el flujo del rotacional del campo **F** a través de la superficie S formada por la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2+y^2=1$.



Se aplicará el teorema de Stokes, donde la curva C frontera de S es la intersección de la esfera y el cilindro. La curva es

$$\left.\begin{matrix} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} z^2=3 \\ x^2+y^2=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=\cos t \\ y=sen\, t \\ z=\sqrt{3} \end{matrix} \quad t\in[0,2\pi]\right\}$$

$$\mathbf{r}(t)=\left(\cos t, sen\, t, \sqrt{3}\right) \qquad t\in[0,2\pi]$$

Como se pide el flujo saliente, la curva C se debe recorrer en sentido antihorario. Se tiene entonces,

$$flujo=\iint_S (\text{rot}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS=\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$$

Como

$$\mathbf{r}'(t)=\left(-sent,\cos t,\sqrt{3}\right)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))=\left(\sqrt{3}\cos t,\sqrt{3}sen\ t,0\right)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)=\left(\sqrt{3}\cos t,\sqrt{3}sen\ t,0\right)\cdot\left(-sen\,t,\cos t,0\right)=0$$

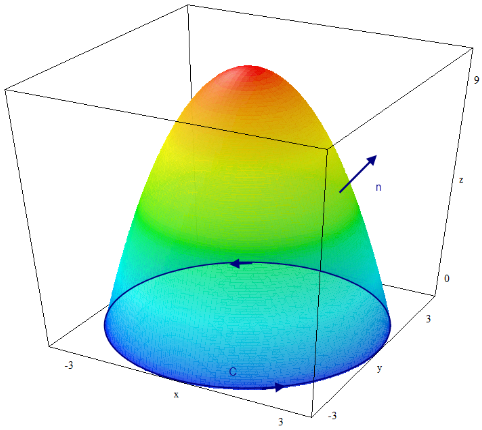
Por lo tanto, el flujo es 0.

38 Comprobar el Teorema de Stokes para el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z)=3y\,\mathbf{i}+4z\,\mathbf{j}-6x\,\mathbf{k}$$

y la parte de la superficie del paraboloide $z=9-x^2-y^2$ situada sobre el plano XY orientada hacia arriba. Comprueba además que se cumplen las condiciones para poder aplicar el Teorema de Stokes.

Solucion



La superficie S es el paraboloide de ecuación $z = f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$, superficie suave cuya curva frontera C es la circunferencia de centro (0,0) y radio 3. Para considerar la normal unitaria exterior se debe orientar C en sentido antihorario. La parametrización de esta curva C será:

$$C \equiv \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\,\mathrm{sen}\, t \\ z = 0 \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Calculamos $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (9\,\mathrm{sen}\, t, 0, -18\cos t) \cdot (-3\,\mathrm{sen}\, t, 3\cos t, 0)\, dt = \int_0^{2\pi} -27\,\mathrm{sen}^2\, t dt =$$

$$= -27 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = -27\pi$$

Calculamos $\iint_S (\mathrm{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$

Como $\mathrm{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y & 4z & -6x \end{vmatrix} = -4\mathrm{i} + 6\mathrm{j} - 3\mathrm{k}$, $\mathrm{n} = (-f'_x, -f'_y, 1) = (2x, 2y, 1)$

se tiene

$$\iint_S (\mathrm{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D (-4, 6, -3) \cdot (2x, 2y, 1)\, dxdy$$

Siendo D la proyección del paraboloide sobre el plano XY, es decir, el interior de la circunferencia de centro (0,0) y radio 3. Pasando a coordenadas polares

$$\iint_D (-4, 6, -3) \cdot (2x, 2y, 1)\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{3} (-8r\cos\theta + 12r\,\mathrm{sen}\,\theta - 3)\, r dr d\theta = -27\pi$$

39 Hallar el valor de la integral $\oint_C -y^2dx + zdy + xdz$, siendo C el triángulo situado en el plano $2x + 2y + z = 6$ intersecado por los planos coordenados.

Solución

Aplicando el Teorema de Stokes y llamando

- S al triángulo encerrado por C
- $\mathbf{F}(x,y,z) = -y^2\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

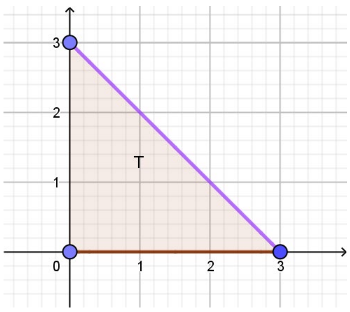
se tiene que:

$$\oint_C -y^2dx + zdy + xdz = \iint_S rot\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

Como $\quad \text{rot } \mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{j} \qquad \mathbf{N} = (2,2,1)$

se tiene

$$I = \oint_C -y^2dx + zdy + xdz = \iint_S rot\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_T (-4+2y)\, dA$$



$$I = \int_0^3 \int_0^{3-x} (-4+2y)\, dydx = \int_0^3 \left[-4y + y^2\right]_{y=0}^{y=3-x} dx = \int_0^3 \left[y(-4+y)\right]_{y=0}^{y=3-x} dx =$$

$$= \int_0^3 \left(-3 - 2x + x^2\right) dx = \left(-3x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right)_{x=0}^{x=3} = -9$$

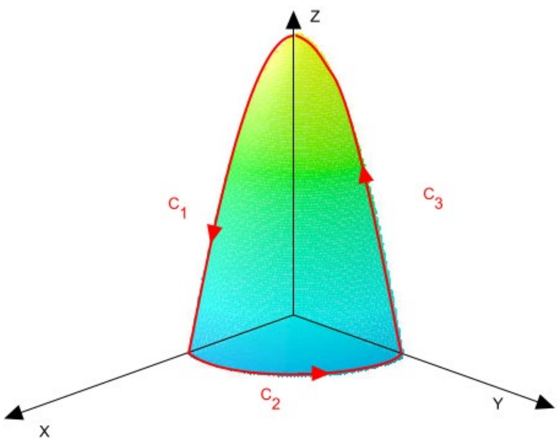
40 Verificar que se cumple el Teorema de Stokes considerando

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2z, x, y^2)$$

y S la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$ del primer octante ($z \geq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0$).

Solución

La superficie S es una porción de paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$



Se verifican las condiciones del Teorema de Stokes así que el flujo del rotacional del campo se puede calcular como una integral de línea sobre la frontera de la superficie

$$\iint_S rot\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_{\partial S}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds$$

Cálculo de la integral de superficie

$$\textbf{rot F}(x,y,z) = (2y,2,1)$$

Considerando el normal exterior y llamando D a la proyección de S sobre z=0 se tendrá:

$$\iint_S rot\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D (2y,2,1)\cdot(2x,2y,1)\,dA$$

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}(4xy+4y+1)\,dydx = \int_0^2\int_0^{\pi/2}\left(4r^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta+4r\,\text{sen}\,\theta+1\right)rd\phi dr$$

$$\int_0^{\pi/2}\left(r^4\cos\theta\,\text{sen}\,\theta+\frac{4r^3}{3}\text{sen}\,\theta+\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=2}d\theta = \int_0^{\pi/2}\left(16\cos\theta\,\text{sen}\,\theta+\frac{32}{3}\text{sen}\,\theta+2\right)d\theta = \pi+\frac{56}{3}$$

Calculo de la integral de línea

Como se puede comprobar la frontera de la superficie es una curva cerrada suave por partes que se puede escribir como

$$\int_{\partial S}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds = \int_{C_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds+\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds+\int_{C_3}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds$$

siendo C_1 la frontera de la superficie en el plazo XZ, C_2 la frontera de la superficie en el plazo z=0 y C_3 la frontera de la superficie en el plazo YZ.

Curva frontera C_1 (plano XZ)

$$\mathbf{r}(t) = (t,0,4-t^2)\quad t\in[0,2]\qquad \mathbf{r'}(t) = (1,0,-2t)$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}=\left(8-2t^2,\mathrm{t},0\right)\cdot\left(1,0,2t\right)=8-2t^2$$

$$\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds=\int_0^2\left(8-2t^2\right)dt=\frac{32}{3}$$

Curva frontera C_2 (plano z=0)

$$\mathbf{r}\left(t\right)=\left(2\cos\left(\mathrm{t}\right),2\,\mathrm{sen}\left(\mathrm{t}\right),0\right)\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\qquad \mathbf{r'}\left(t\right)=\left(-2\,\mathrm{sen}\left(\mathrm{t}\right),2\cos\left(\mathrm{t}\right),0\right)$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}=\left(0,2\cos\left(\mathrm{t}\right),4\,\mathrm{sen}^2\left(\mathrm{t}\right)\right)\cdot\left(-2\,\mathrm{sen}\left(t\right),2\cos\left(t\right),0\right)=4\cos^2\left(t\right)$$

$$\int_{C_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds=\int_0^{\pi/2}\cos^2\left(t\right)dt=\pi$$

Curva frontera C_3 (plano YZ)

$$\mathbf{r}\left(t\right)=\left(0,\mathrm{t},4-\mathrm{t}^2\right)\quad t\in\left[0,2\right]\qquad \mathbf{r'}\left(t\right)=\left(0,1,-2\,\mathrm{t}\right)$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}=\left(8-2\,\mathrm{t}^2,0,t^2\right)\cdot\left(0,1,-2\,\mathrm{t}\right)=-2t^3$$

$$\int_{C_3}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds=-\int_0^2-2t^3dt=8$$

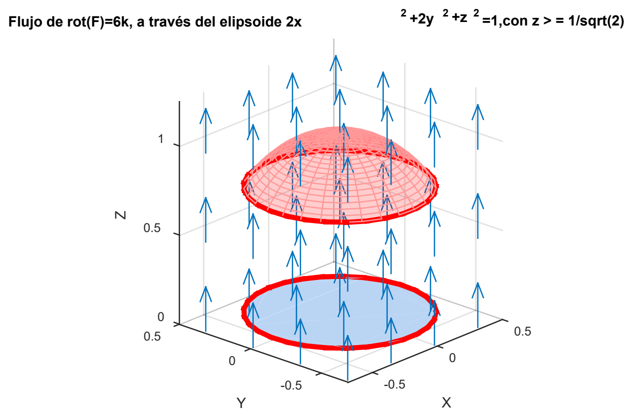
Luego,

$$\int_{C}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds=\frac{32}{3}+\frac{\pi}{4}+8=\frac{56}{3}+\pi$$

41

Comprobar que se verifica el Teorema de Stokes para el campo vectorial $\mathbf{E}(x,y,z)=-3y\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+z^4\mathbf{k}$ sobre la superficie S definida como el trozo del elipsoide $2x^2+2y^2+z^2=1$ que está por encima del plano $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Para comprobar el teorema es necesario calcular las integrales que aparecen en ambos miembros de la ecuación y obtener el mismo resultado por ambos métodos de cálculo.

Solución




```
Código Matlab:
% Dibuja una muestra del campo vectorial rotF=(0,0,6)
x=linspace(-2/3,1/3,4);y=x;z=linspace(0,1,3);
[X,Y,Z]=meshgrid (x,y,z);
U=0*ones(size(X));V=0*ones(size(X));W=6*ones(size(X));
quiver3(X,Y,Z,U,V,W); hold on
% Dibuja el elipsoide 2x^2+2y^2+z^2=1, para z>=1/sqrt(2),en
paramétricas
f=linspace(0,pi/4,20); % ángulo phi
t=linspace(0,2*pi,30); % ángulo theta
[F,T]=meshgrid(f,t); a=1/sqrt(2);
h1=surf(a*sin(F).*cos(T),a*sin(F).*sin(T),cos(F));
set(h1,'FaceColor','red','FaceAlpha',0.2,'EdgeColor','r')
% Dibuja las circunferencias intersección del elipsoide con z=a y
con z=0
h2=plot3(sin(t)/2,cos(t)/2,a*ones(size(t)),'r');
set(h2,'LineWidth',3);
h3=fill(sin(t)/2,cos(t)/2,'b');
set(h3,'LineWidth',3); axis equal;
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z');
title('Flujo de rot(F)=6k, a través del elipsoide
2x^2+2y^2+z^2=1,con z > = 1/sqrt(2)');
hold off
```

El campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = -3y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + z^4\mathbf{k}$ es de clase C¹ en $\mathbb{R}^3$. El elipsoide S es una superficie suave, limitada por la curva C, orientada en el mismo sentido que la superficie S.

El elipsoide $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, tiene semiejes $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ y 1 lo cual se comprueba escribiendo

su ecuación en la forma $$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + z^2 = 1$$

Según el teorema de Stokes, se cumplirá

$$I = \oint_C -3y\,dx + 3x\,dy + z^4 dz = \iint_S \left(\operatorname{rot}\mathbf{F}\right)\cdot \mathbf{n}\,dS$$

a) Cálculo de la integral de línea.

Se obtiene la ecuación de la curva C como la intersección del elipsoide y el plano $z=1/\sqrt{2}$, y posteriormente, se parametriza. Como

$$C \equiv \left\{ \begin{array}{c} 2x^2+2y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad 2x^2+2y^2+\frac{1}{2}=1 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=\frac{1}{4}$$

C es la circunferencia de radio $\frac{1}{2}$, en el plano $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Su parametrización es:

$$C \equiv \left\{ x=\frac{1}{2}\cos t; \quad y=\frac{1}{2}\operatorname{sen} t; \quad z=\frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \quad t\in\left[0,2\pi\right]$$

$$\left\{ dx=-\frac{1}{2}sent; \quad dy=\frac{1}{2}\cos t; \quad dz=0 \right\}$$

Por lo tanto, la integral de línea será:

$$\oint_C -3ydx+3xdy+z^4dz=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{3}{2}\operatorname{sen} t\right)\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} tdt\right)+\left(\frac{3}{2}\cos t\right)\left(\frac{1}{2}\cos tdt\right)=\int_0^{2\pi}\frac{3}{4}dt=\frac{3\pi}{2}$$

b) Cálculo de la integral de superficie.

Hallamos previamente $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ y el vector $\mathbf{n}$, sabiendo que la ecuación implícita de S es $F\left(x,y,z\right)=2x^2+2y^2+z^2-1=0$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -3y & 3x & z^4 \end{vmatrix}=6\mathbf{k}$$

el vector $\mathbf{n}$ será uno de los dos siguientes:

$$\mathbf{n}=\pm\frac{-f_x'\mathbf{i}-f_y'\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{1+\left(f_x'\right)^2+\left(f_y'\right)^2}}$$

Tomamos el vector que tiene la tercera componente mayor que cero ya que el vector $\mathbf{n}$ apunta hacia arriba.

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{F}\right)\cdot\mathbf{n}=\left(6\mathbf{k}\right)\cdot\frac{-f_x'\,\mathbf{i}-f_y'\,\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{1+f_x'^{\,2}+f_y'^{\,2}}}=\frac{6}{\sqrt{1+f_x'^{\,2}+f_y'^{\,2}}}$$

$$I=\iint_S\left(\operatorname{rot}\mathbf{F}\right)\cdot\mathbf{n}dS=\iint_S\frac{6}{\sqrt{1+f_x'^{\,2}+f_y'^{\,2}}}dS$$

Sustituyendo el diferencial de superficie, $dS=\sqrt{1+f_x'^{\,2}+f_y'^{\,2}}dxdy$, y considerando D la proyección de S sobre el plano XY, se tendrá:

$$I=\iint_S \frac{6}{\sqrt{1+f_x'^{\,2}+f_y'^{\,2}}}\,dS=6\iint_D dxdy$$

$$I=6\quad área\left(D\right)=\frac{3\pi}{2}$$

ya que S_{xy} es el círculo de radio $\frac{1}{2}$.

42 Utilizar el teorema de Stokes para calcular $\oint_C 2ydx+3xdy-z^2dz$, siendo C la circunferencia de ecuaciones paramétricas

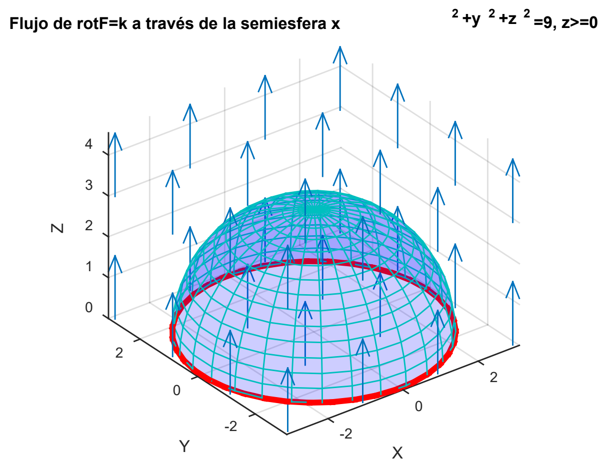
$$C\equiv\left\{x=3\cos t,\ y=3\operatorname{sen} t,\ z=0,\ 0\le t\le 2\pi\right\}$$

Solución

El teorema de Stokes puede aplicarse sobre cualquier superficie S que tenga por borde la curva C anterior, siendo S suave o suave a trozos, estando S orientada según la orientación de C. El campo vectorial que interviene en este caso, $\mathbf{F}(x,y,z)=2y\mathbf{i}+3x\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$, es de clase C1 en todo $\mathbb{R}^3$, luego verificará

$$I=\oint_C 2ydx+3xdy-z^2dz=\iint_S\left(\operatorname{rot}\mathbf{F}\right)\cdot\mathbf{n}dS$$

```
% Dibuja una muestra del campo rotF=k
x=linspace(-3,3,4);y=x;z=linspace(0,3,2);[X,Y,Z]=meshgrid (x,y,z);
U=0*ones(size(X));V=0*ones(size(X));W=ones(size(X));
quiver3(X,Y,Z,U,V,W); hold on

% Dibuja la semiesfera x^2+y^2+z^2=9, en z>=0
f=linspace(0,pi/2,15); % ángulo phi
t=linspace(0,2*pi,30); % ángulo theta
[F,T]=meshgrid(f,t);
h1=surf(3*sin(F).*cos(T),3*sin(F).*sin(T),3*cos(F));
set(h1,'FaceColor','blue','FaceAlpha',0.2,'EdgeColor','b')

% Dibuja la circunferencia x^2+y^2=9
t=linspace(0,2*pi,40);
h2=plot(3*cos(t),3*sin(t),'r');
set(h2,'LineWidth',3); axis equal
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel('Z');
title('Flujo de rotF=k a través de la semiesfera x^2+y^2+z^2=9, z>=0');
hold off
```



Hallamos $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ siendo $\mathbf{F} = 2y\mathrm{i} + 3x\mathrm{j} - z^2\mathrm{k}$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} = \mathbf{k}$$

Tomamos como S la semiesfera que tiene por ecuación implícita $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con $z \geq 0$, es decir, $z = f\left(x, y\right) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Esta superficie tiene como curva frontera C.

El vector $\mathbf{n}$ a S será uno de los dos siguientes:

$$\mathbf{n} = \pm \frac{-f_x^{'}\mathbf{i} - f_y^{'}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + f_x^{'2} + f_y^{'2}}}$$

Tomamos como vector normal $\mathbf{n}$ el que tiene la tercera componente mayor que cero ya que está dirigido hacia arriba.

Se tendrá que:

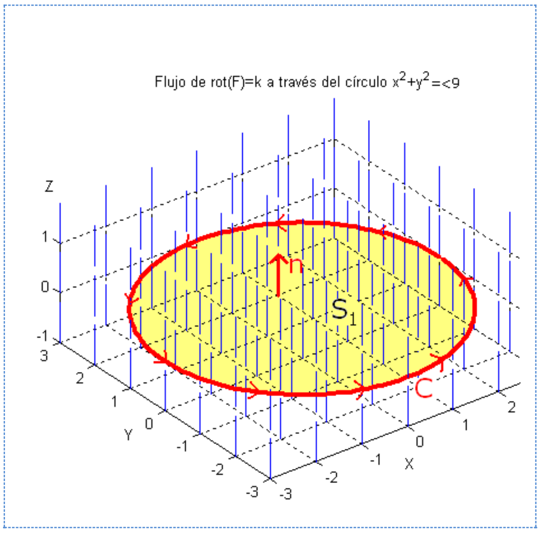
$$I = \iint_S \left(\operatorname{rot}\mathbf{F}\right) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D \left(\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{-f_x^{'}\ \mathbf{i} - f_y^{'}\ \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x^{'2} + f_x^{'2} + 1}}\right) \sqrt{f_x^{'2} + f_x^{'2} + 1}\ dxdy = \iint_D dxdy$$

siendo D la proyección de S sobre el plano XY que es el círculo de radio 3, por lo tanto,

$$I = \iint_D dxdy = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$$

También se podría haber utilizado como superficie para aplicar el teorema de Stokes, S_1, el círculo de radio 3, contenido en el plano $z = 0$, pues también tiene por borde la curva C. En este caso, el vector unitario perpendicular a S_1, orientado según la orientación de la curva C es $\mathbf{k}$, resultando

$$I = \iint_{S_1} \left(\operatorname{rot}\mathbf{F}\right) \cdot \mathbf{n} dS_1 = \iint_{S_1} \left(\mathbf{k}\right) \cdot \left(\mathbf{k}\right) dxdy = \iint_{S_1} dxdy = \acute{a}rea\ S_1 = 9\pi$$



Código Matlab:

```
% Dibuja una muestra del campo
rotF=k
x=-3:3;y=-3:3;z=-1:1;
[X,Y,Z]=meshgrid (x,y,z);
U=0*ones(size(X));V=0*ones(size
(X));W=ones(size(X));
quiver3(X,Y,Z,U,V,W); hold on

%  Dibuja  la  circunferencia
x^2+y^2=9 en z=0
t=0:0.05:2*pi;
h2=plot(3*cos(t),3*sin(t),'r');
set(h2,'LineWidth',3);     axis
equal
xlabel('X');ylabel('Y');zlabel(
'Z');
title('Flujo  de  rot(F)=k  a
través del círculo x^2+y^2=9');
hold off
```

43

Se consideran:

- Las superficies

$$S_1 \equiv z = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad S_2 \equiv z = 2 \qquad S_3 \equiv z = 1$$

- H el sólido encerrado por las tres superficies del punto anterior.
- C la curva del espacio

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k} \quad t \in [0,\pi]$$

- La función temperatura T que en cada punto es proporcional a la distancia al plano z=0.
- El campo $\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

Se pide, **calcular**:

a) El trabajo realizado por **F** a lo largo de la curva **C**.
b) El área superficial de H.
c) El área de la cortina vertical determinada por la curva **C** y su proyección sobre el plano $z = 0$.
d) El valor promedio de T sobre H.

Solución a)

Se tiene que

$$W = \int_C \mathrm{F}\cdot d\mathrm{r} = \int_a^b \mathrm{F}(\mathrm{r}(t))\cdot \mathrm{r}'(t)\,dt$$

$$W = \int_C \mathrm{F}\cdot d\mathrm{r} = \int_0^o (\cos t, sent, t^2)\cdot(-sent, \cos t, 2t)\,dt$$

$$= \int_0^\pi \left(-\cos t\, sen\, t + \cos t\, sent + 2t^3\right)dt = \int_0^\pi 2t^3 dt = \frac{\pi^4}{2}$$

Otra forma:

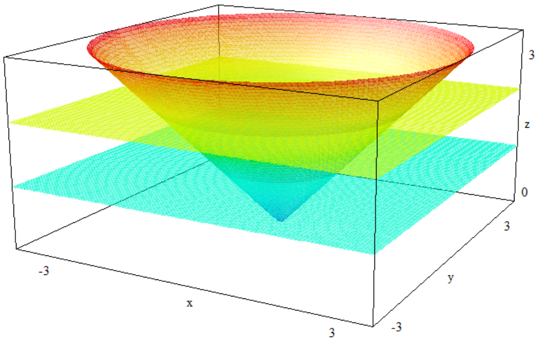
El campo es conservativo siendo su función potencial $= f\left(x,y,z\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$ por lo que el valor de la integral se podría haber calculado como:

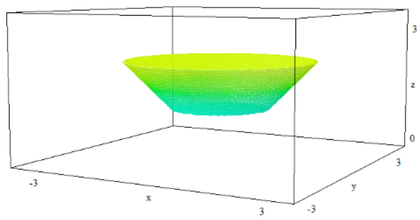
$$W = \int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} = f\left(\mathrm{r}\left(\pi\right)\right) - f\left(\mathrm{r}\left(0\right)\right) = f\left(\cos\pi, sen\pi, \pi^2\right) - f\left(\cos 0, sen 0, 0\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\pi^4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^4}{2}$$

Solución b)

H es el interior de un tronco de cono.

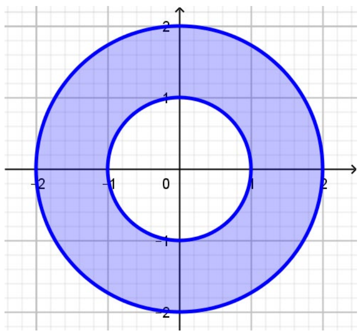




- El área superficial correspondiente a z=2 es un círculo de radio 2, su área es 4π .
- El área superficial correspondiente a z=1 es un círculo de radio 1, su área es π
- El área superficial de la parte del cono comprendida entre z=1 y z=2 es

$$A_3 = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(f_x'\right)^2 + \left(f_y'\right)^2}\, dx\, dy$$

donde se ha considerado que $D = \left\{\left(x,y\right) / 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$ es la corona circular de radios 1 y 2



y que $f\left(x,y\right) = \sqrt{x^2 + y^2}$ definida sobre D representa la superficie S.

$$A_3 = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\, dx\, dy =$$

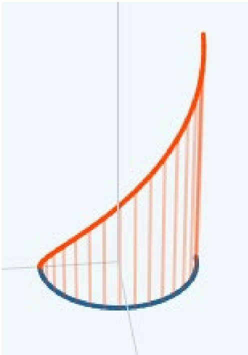
$$= \iint_D \sqrt{1+1}\, dx\, dy = \sqrt{2}\ \acute{a}rea(D) = \sqrt{2}\left(4\pi - \pi\right) = 3\sqrt{2}\pi$$

Por lo tanto, el área superficial de H es

$$A_H = 4\pi + \pi + 3\sqrt{2}\pi = \left(5+3\sqrt{2}\right)\pi$$

Solución c)

Considerando C_1 la proyección de C sobre el plano z=0, el área de la cortina vertical es



$$\acute{A}rea = \int_{C_1} f\left(x,y\right) ds = \int_0^{\pi} z\left(t\right)\sqrt{x'\left(t\right)^2 + y'\left(t\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} t^2 \sqrt{\left(-sent\right)^2+\left(\cos t\right)^2}\, dt = \int_0^{\pi} t^2\ dt = \frac{\pi^3}{3}$$

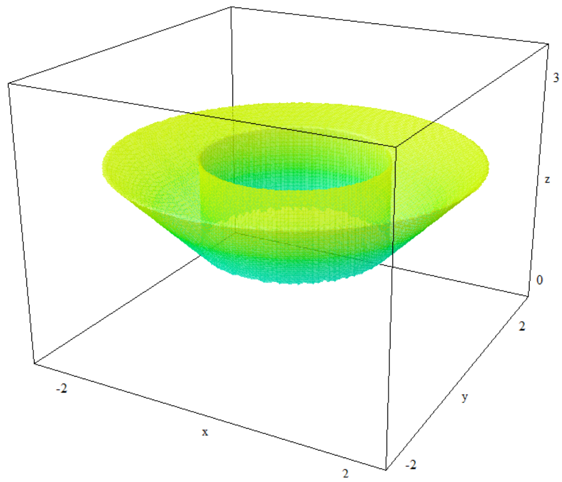
Solución d)

El valor medio de la temperatura sobre H es:

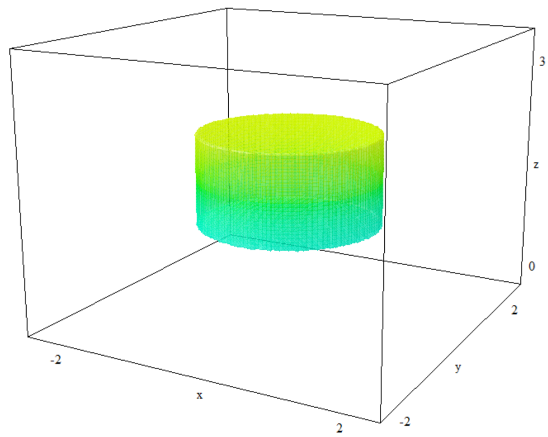
$$T_m = \frac{\iiint_H T\left(x,y,z\right) dV}{\iiint_H dV} = \frac{\iiint_H kz\ dV}{\iiint_H dV}$$

El conjunto H se puede expresar en coordenadas cilíndricas como $H = H_1 \cup H_2$ donde

$$H_1 \equiv \left(r,\theta,z\right) \qquad 1 \le r \le 2\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi \quad ,\quad r \le z \le 2$$



$$H_2 \equiv \left(r,\theta,z\right) \qquad 0 \le r \le 1 \,,\, 0 \le \theta \le 2\pi \quad , \quad 1 \le z \le 2$$



La temperatura total sobre H es

$$\iiint_H kz\ dV = \iiint_{H_1} kz\ dV + \iiint_{H_2} kz\ dV = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_r^2 kzr\ dz\, d\theta\, dr + \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_1^2 kzr\ dz\, d\theta\, dr$$

$$\int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_r^2 kz\, r\ dz\, d\theta\, dr = 2\pi k \int_1^2 \left(\frac{z^2}{2}\right)_{z=r}^{z=2} rdr = 2\pi k \int_1^2 \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) rdr = \frac{9k\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_1^2 k\, zr\ dz\, d\theta\, dr = 2\pi k \left(\frac{1}{2} - 0\right)\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi k}{2}$$

$$T_{total} = \frac{9k\pi}{4} + \frac{3\pi k}{2} = \frac{15\pi k}{4}$$

El volumen de H es

$$V\left(H\right) = \iiint_H \ dV = \iiint_{H_1} dV + \iiint_{H_2} dV = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_r^2 \ dz\, d\theta\, dr + \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_1^2 \ dz\, d\theta\, dr$$

$$\int_1^2\int_0^{2\pi}\int_r^2 r\ dz\,d\theta\,dr = 2\pi\int_1^2\left(2-r\right)rdr = \frac{4\pi}{3}$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_1^2 r\ dz\,d\theta\,dr = 2\pi\int_0^1\left(2-\frac{1}{2}\right)rdr = 2\pi\frac{1}{2} = \pi$$

$$V\left(H\right) = \iiint_H\ dV = \frac{4\pi}{3} + \pi = \frac{7\pi}{3}$$

Finalmente, la temperatura media es

$$T_{media} = \frac{T_{total}}{Vol\left(H\right)} = \frac{\frac{15\pi k}{4}}{\frac{7\pi}{3}} = \frac{45k}{28}$$

Material de consulta

Libro Interactivo. Parte II Capítulo 7.
Laboratorios y Unidades didácticas con videos explicativos: enlace
Autora: Elena E. Álvarez

Cálculo III. Gilbert Strang y Edwin Herman. Publicado bajo licencia CC BY-NC-SA 4.0[2]
https://openstax.org/details/books/calculus-volume-3

[2] Las imágenes con marco color rojo están tomadas de este libro.

Ecuaciones de algunas superficies frecuentes

<table>
<tr>
<td>

PLANO

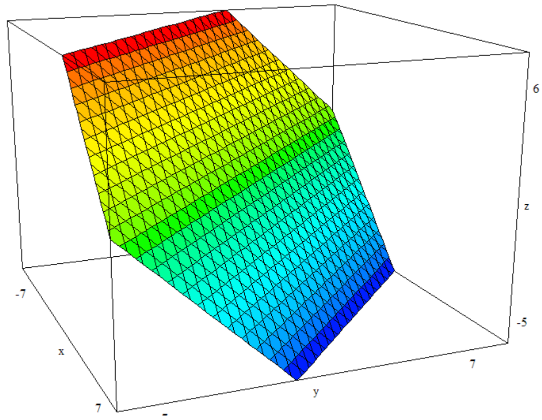
Cartesianas

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Paramétricas

$$\begin{aligned} x &= x_o + ua_1 + vb_1 \\ y &= y_o + ua_2 + vb_2 \\ z &= z_o + ua_3 + vb_3 \end{aligned}$$

</td>
<td>



$$\begin{cases} x = 1 - v \\ y = -u \qquad u \in I, \; v \in J \\ z = u + v \end{cases}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

ESFERA

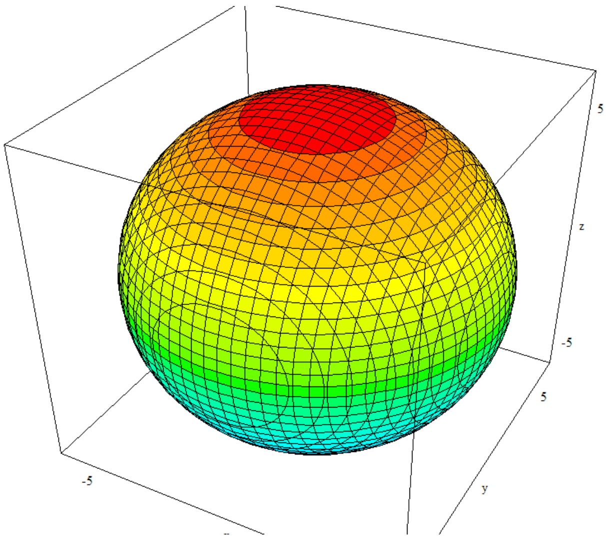
Cartesianas

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Paramétricas

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} u \cos v \\ y &= r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z &= r \cos u \end{aligned}$$

</td>
<td>



$$\begin{cases} x = 5 \operatorname{sen} u \cos v \\ y = 5 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = 5 \cos u \end{cases}$$

$$0 \le u \le \pi, \quad 0 \le v \le 2\pi$$

</td>
</tr>
</table>

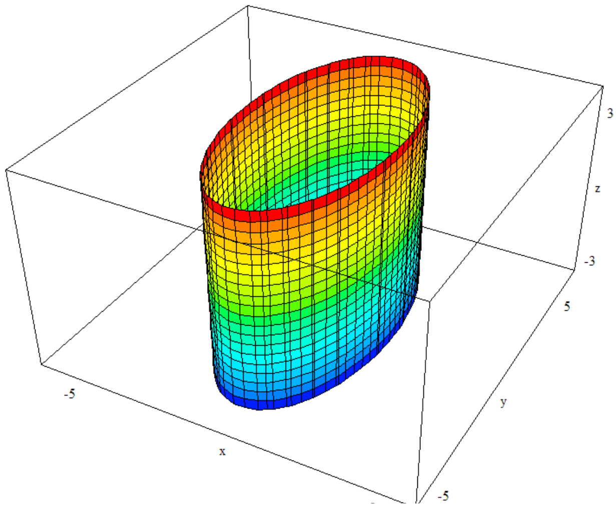
CILINDRO ELÍPTICO

Cartesianas

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Paramétricas

$$x = a\ \cos u$$
$$y = b\ \operatorname{sen} u$$
$$z = v$$



$$\begin{cases} x = 2\cos u \\ y = 4\operatorname{sen} u \qquad 0 \le u < 2\pi, \quad v \in I \\ z = v \end{cases}$$

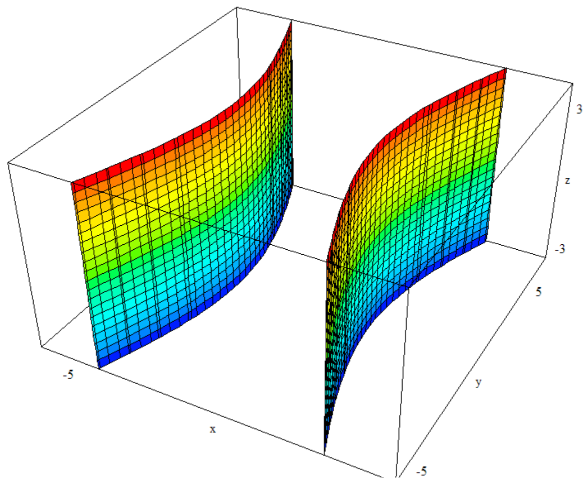
CILINDRO HIPERBÓLICO

Cartesianas

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Paramétricas

$$x = a\cosh u$$
$$y = b\operatorname{senh} u$$
$$z = v$$



$$\begin{cases} x = 2\cosh u \\ y = 4\operatorname{senh} u \qquad (u,v) \in D \\ z = v \end{cases}$$

<table>
<tr>
<td>

CILINDRO PARABÓLICO

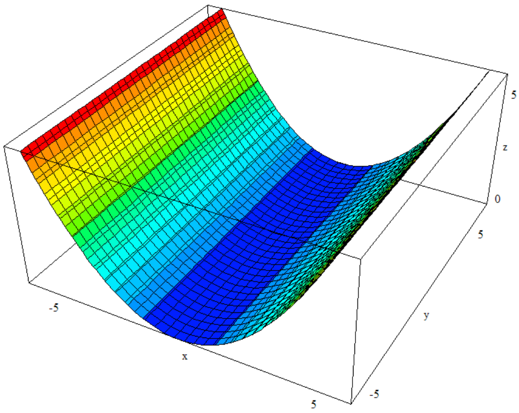
Cartesianas

$$z = \frac{x^2}{a}$$

Paramétricas

$$x = u$$
$$y = v$$
$$z = \frac{u^2}{a}$$

</td>
<td>



$$x = u, \quad y = v, \quad z = \frac{u^2}{4}, \qquad (u, v) \in D$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

CONO

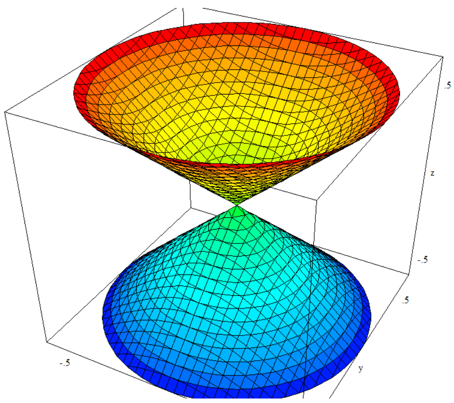
Cartesianas

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Paramétricas

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \quad & 0 \le v \le 2\pi, \ u \in I \\ z = u \end{cases}$$

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

ELIPSOIDE

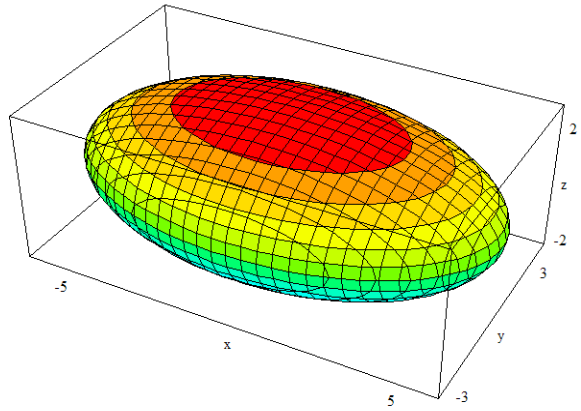
Cartesianas

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Paramétricas

$$x = a \operatorname{sen} u \cos v$$
$$y = b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$
$$z = c \cos u$$

</td>
<td>



$$\begin{cases} x = 5 \operatorname{sen} u \cos v \\ y = 3 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = 2 \cos u \end{cases}$$

$$0 \le u \le \pi, \quad 0 \le v \le 2\pi$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

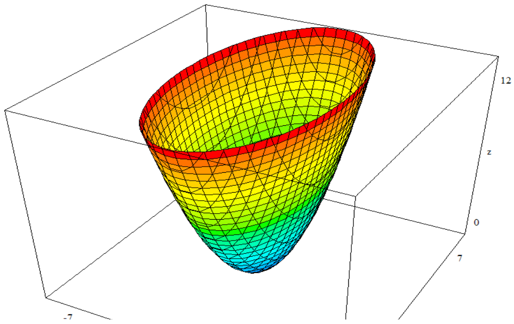
PARABOLOIDE ELIPTICO

Cartesianas

Paramétricas

$$\begin{cases} x = au \cos v \\ y = bu \operatorname{sen} v \\ z = \pm u^2 \end{cases}$$

</td>
<td>



$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = 2u \operatorname{sen} v \qquad u \in I, \ 0 \le v < 2\pi \\ z = u^2 \end{cases}$$

</td>
</tr>
</table>

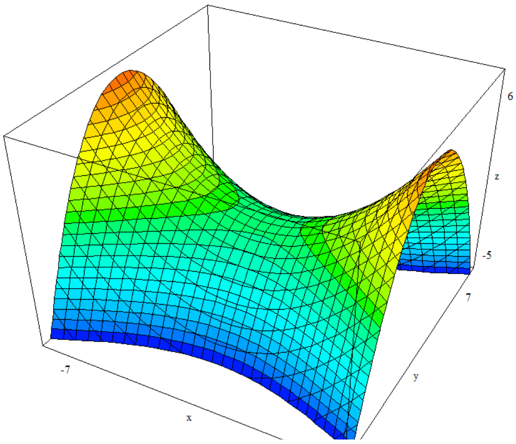
PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Cartesianas

$$z = \pm\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

Paramétricas

$$\begin{cases} x = au\cosh v \\ y = bu\,\mathrm{senh}\, v \\ z = \pm u^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = 3u\cosh v \\ y = 2u\,\mathrm{senh}\, v \qquad u \in I,\ \ v \in J \\ z = u^2 \end{cases}$$

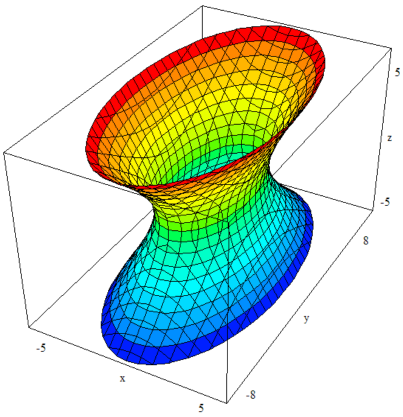
HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA

Cartesianas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Paramétricas

$$\begin{cases} x = a\cosh u \cos v \\ y = b\cosh u\,\mathrm{sen}\, v \\ z = c\,\mathrm{senh}\, u \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = 2\cosh u \cos v \\ y = 4\cosh u\,\mathrm{sen}\, v \qquad -\infty < u < \infty,\ \ 0 \le v \le 2\pi \\ z = 3\,\mathrm{senh}\, u \end{cases}$$

<table>
<tr>
<td>

HIPERBOLOIDE DE

DOS HOJAS

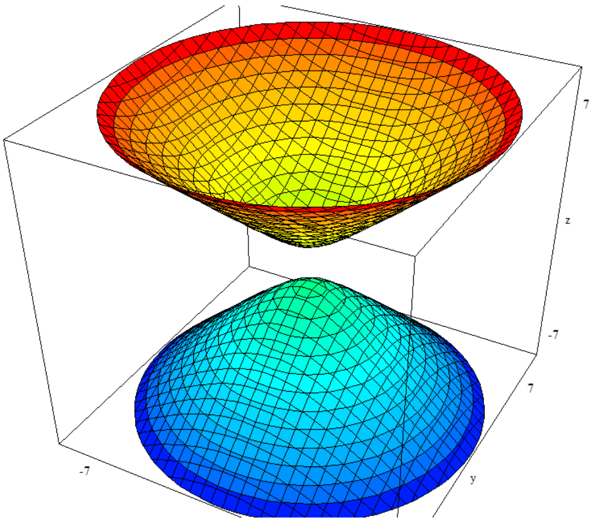
Cartesianas

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Paramétricas

$$\begin{cases} x = a\,\text{senh}\,u\cos v \\ y = b\,\text{senh}\,u\,\text{sen}\,v \\ z = c\cosh u \end{cases}$$

</td>
<td>



$$\begin{cases} x = \text{senh}\,u\cos v \\ y = \text{senh}\,u\,\text{sen}\,v \\ z = \cosh u \end{cases}$$

$$-\infty < u < \infty,\ \ 0 \le v \le 2\pi$$

</td>
</tr>
</table>