CAMPOS VECTORIALES. INTEGRALES DE LÍNEA

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Funciones reales de una y varias variables.
- Derivación de funciones de varias variables.
- Cálculo y propiedades de integrales definidas de una variable.
- Manejo de ecuaciones paramétricas de curvas.
- Dibujo de curvas con Matlab.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A continuación se presentan los objetivos específicos del Tema 1, indicando en cada uno de ellos la bibliografía que le corresponde, los ejercicios propuestos y los ejercicios resueltos en estos apuntes, así como los ejercicios resueltos en el proyecto Giematic con contenidos del tema. Las abreviaturas que encabezan cada línea hacen referencia a los siguientes libros, documentos o bloques de enunciados y también actividades de la web del proyecto Giematic:

A) Tomo 3 de la Colección FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS, de Álvarez, Herrero y Ruiz.
B) CÁLCULO de varias variables, de Bradley y Smith; editorial Prentice Hall.
G1) CÁLCULO I. Teoría y Problemas de Análisis Matemático en una Variable, de García y otros; editorial GLAGSA.
G2) CÁLCULO II. Teoría y Problemas de funciones de varias variables, de García y otros; editorial GLAGSA.
M) CÁLCULO VECTORIAL, de Marsden y Tromba; editorial Addison-Wesley Ib.
P) CÁLCULO VECTORIAL. PROBLEMAS RESUELTOS[1], de Marsden y Tromba, por Pao y Soon; editorial Addison-Wesley Ib.
S) CALCULUS de una y varias variables. Volumen I, de Salas, Hille y Etgen; editorial Reverté.
EP) Enunciados de los ejercicios propuestos de este tema.
ER) Ejercicios resueltos de este tema.
EG) Ejercicios y actividades en la página del proyecto Giematic, cuya dirección es:
http://www.giematic.unican.es/integracion-linea/material-interactivo

1. Saber escribir las ecuaciones paramétricas de curvas básicas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$. Saberlas utilizar para hallar los vectores tangente y normal a la curva.

[1]Los enunciados de estos problemas resueltos están en **[M]**

B Cap. 9, Sec.4: Ejemplos 9.23, 9.24 y 9.29;

G1 Cap.10, Problema resuelto 1;

S Cap. 9, Sec.6: Ejemplos 1 a 5.

EP 17 y 19;

ER 5 y 6.

EG Ejercicios Preliminares. Integral de línea: Campos escalares. Ejercicios 1, 3, 5 y 6; Ejercicios Preliminares. Integral de línea: Campos vectoriales. Ejercicios 1 y 6.

2. Conocer las definiciones de campo escalar, campo vectorial y componentes de un campo vectorial.

A Cap.5, Sec.1: Ejemplo 5.1;

M Cap.3, Sec.3: Ejemplos 1 a 6;

EP 1, 2 y 3;

EG Ejercicios Preliminares. Campos. Ejercicios del 3 al 6.

3. Poder trazar una muestra de la gráfica de un campo vectorial sencillo. Saber explicar los conceptos de línea de flujo y equipotencial de un campo vectorial y obtener sus ecuaciones.

A Cap.5, Sec.1: Ejemplo 5.2;

B Cap.14, Sec.1: Ejemplo 14.1;

P Cap.3, Sec.Repaso: Ejercicio 15;

EP 6 y 8;

ER 1 y 3.

4. Saber calcular el gradiente, la divergencia, el rotacional y el laplaciano. Conocer sus propiedades básicas. Utilizar el operador nabla. Manejar expresiones que contengan producto vectorial, producto escalar y estos operadores.

A Cap.5, Sec.1: Ejemplos 5.3, 5.5;

B Cap.14, Sec.1: Ejemplos 14.2 a 14.4;

M Cap.3, Sec.4: Ejemplos 1, 3 a 5; Cap.3, Sec.5: Ejemplos 2, 3;

P Cap.3, Sec.4: Ejercicios 1b, 2b, 3b; Cap.3, Sec.5: Ejercicios 3(igualdad 9), 8; Cap.3, Sec.Repaso: Ejercicios 1b, 2b, 4b;

S Cap.17, Sec.8: Ejemplos 1 a 4;

EP 3, 4, 5 y 7;

ER 1.

EG Ejercicios Preliminares. Campos. Ejercicios 2, 8, 9 y 10.

5. Saber qué es un campo conservativo y la función potencial. Poder calcular la función potencial de un campo conservativo.

A Cap.5, Sec.1: Ejemplo 5.4;

P Cap.3, Sec.4: Ejercicio 6;

S Cap.15, Sec.8: Ejemplos 1 a 3;

EP 5, 8, 9, 23 y 24;

ER 2, 4 y 5.

6. **Entender la construcción del elemento diferencial de arco y su significado geométrico; saber calcularlo para curvas expresadas en cartesianas, paramétricas y polares.**

EP 10, 11, 12, 13, 14 y 15;

EG Ejercicios Preliminares. Integral de línea: Campos escalares. Ejercicio 11; Integral de línea: Campos escalares Ejercicio 2.

7. **Entender la definición de integral de un campo escalar sobre una curva y saber calcularla dada la curva y el campo. Hacer uso de sus propiedades.**

A Cap.5, Sec.2: Ejemplo 5.8; Cap.5, Sec.4: Ejercicio 5.7;

B Cap.14, Sec.2: Ejemplo 14.13;

M Cap.7, Sec.1: Ejemplo 1;

P Cap.7, Sec.1: Ejercicios 2b, 3b, 4a; Cap.7, Sec. Repaso: Ejercicios 1b, 2b, 19;

EP 12, 13, 14 y 15;

EG Ejercicios Preliminares. Integral de línea: Campos escalares. Ejercicios 9 a 12.

8. **Saber utilizar esta integral para calcular la longitud de una curva.**

A Cap.3, Sec.3: Ejemplos 3.9, 3.10, 3.11; Cap.3, Sec.9: Ejercicios 3.6, 3.7;

B Cap.9, Sec.4: Ejemplo 9.30;

G1 Cap.15: Problemas resueltos 7, 12, 13a;

M Cap.3, Sec.2: Ejemplos 1 a 3;

P Cap.3, Sec.2: Ejercicios 1b, 1g, 4;

S Cap.13, Sec.4: Ejemplos 1, 2;

EP 11, 13, 14 y 15;

EG Integral de línea: Campos escalares. Ejercicios 2 y 4.

9. **Conocer su significado geométrico como área de una cortina y sus aplicaciones físicas básicas: temperatura, masa. Saber utilizar esta integral para calcular promedios.**

A Cap.5, Sec.2: Ejemplos 5.9;

M Cap.7, Sec.1: Ejemplo 2;

P Cap.3, Sec.1: Ejercicios 10a;

S Cap.17, Sec.4: Ejemplo 2a;

EP 12, 13, 14 y 15;

EG Integral de línea: Campos escalares. Ejercicios 3 y 4; Integral de línea: Campos vectoriales. Ejercicios 4 y 6.

10. **Entender la definición de integral de un campo vectorial sobre una curva orientada y saber calcularla dada la curva y el campo. Conocer la relación entre esta integral y la de campos escalares. Manejar el efecto del cambio de orientación de la curva sobre el signo de la integral.**

A Cap.5, Sec.2: Ejemplos 5.10, 5.12;

B Cap.14, Sec.2: Ejemplos 14.8 a 14.11;

G2 Cap.14: Problemas resueltos 1 a 3;

M Cap.7, Sec.2: Ejemplos 1 a 4, 11;
P Cap.7, Sec.2: Ejercicios 1a, 2c, 7, 11; Cap.7, Sec.Repaso: Ejercicio 3ª;
S Cap.17, Sec.1: Ejemplos 2 a 4; Cap.17, Sec.4: Ejemplo 1;
EP 16, 17, 19, 21 y 22;
ER 6.
EG Ejercicios Preliminares. Integral de línea: Campos vectoriales. Ejercicios 1 a 4; Integral de línea: Campos vectoriales. Ejercicio 1.

11. Poder interpretar físicamente la integral de un campo vectorial sobre una curva como trabajo, circulación o flujo.

A Cap.5, Sec.2: Ejemplo 5.11;
B Cap.14, Sec.2: Ejemplo 14.12;
G2 Cap.14: Problema resuelto 16;
M Cap.7, Sec.2: Ejemplos 5, 6;
P Cap.7, Sec.Repaso: Ejercicio 5;
S Cap.17, Sec.1: Ejemplos 1,5,6;
EP 17, 20, 21 y 22;
EG Integral de línea: Campos vectoriales. Ejercicios 3 a 6.

12. Poder explicar el teorema de Green en el plano y saber usarlo para calcular una integral de línea sobre una curva cerrada o para calcular una integral doble en una región limitada por una curva.

A Cap.5, Sec.2: Ejemplos 5.13, 5.14;
B Cap.14, Sec.4: Ejemplos 14.20 a 14.22;
G Cap.14: Problemas resueltos 14, 15;
M Cap.8, Sec.1: Ejemplos 1, 2;
P Cap.8, Sec.1: Ejercicios 2, 3b, 5; Cap.8, Sec.Repaso: Ejercicios 14, 17;
S Cap.17, Sec.5: Ejemplos 1 a 4;
EP 18, 19, 20 y 21;
ER 8 y 9.
EG Ejercicios Preliminares. Integral de línea: Campos vectoriales. Ejercicio 9; Integral de línea: Campos vectoriales. Ejercicio 5.

13. Saber explicar el teorema Fundamental de Integrales de línea y utilizarlo para calcular integrales de línea.

A Cap.5, Sec.2: Ejemplo 5.15; Cap.5, Sec.4: Ejercicios 5.3, 5.4;
B Cap.14, Sec.3: Ejemplo 14.17;
M Cap.7, Sec.2: Ejemplo 9;
P Cap.8, Sec.Repaso: Ejercicio 13;
S Cap.17, Sec.5: Ejemplos 1 a 4;
EP 22, 23 y 24;
ER 4, 5, 7 y 10.
EG Integral de línea: Campos vectoriales. Ejercicio 4.

14. Identificar un campo conservativo, utilizando el test del rotacional, y hacer uso de este hecho en el cálculo de su integral de línea.

A	Cap.5, Sec.2: Ejemplo 5.16; Cap.5, Sec.3: Ejemplo 5.26; Cap.5, Sec.4: Ejercicio 5.1;
B	Cap.14, Sec.3: Ejemplos 14.15, 14.16, 14.19;
G2	Cap.14: Problemas resueltos 8, 9, 18;
M	Cap.8, Sec.3: Ejemplos 1 a 4;
P	Cap.8, Sec.3: Ejercicios 2, 3, 6, 9, 15b; Cap.8, Sec.4: Ejercicio 16; Cap.8, Sec.Repaso: Ejercicios 7, 20c;
S	Cap.17, Sec.2: Ejemplos 1, 2;
EP	22, 23 y 24;
ER	2, 4, 5, 7 y 10;
EG	Integral de línea: Campos vectoriales. Ejercicio 2.

CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

1 Definiciones

Definición (Campo escalar).- Un campo escalar es una función real que asocia a cada punto $P \in A$ un número real.

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Definición (Campo vectorial).- Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una función

$$\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

que asigna a cada punto $P \in A$ un vector $\mathbf{F}(P)$.

La imagen gráfica de un campo vectorial surge de asociar a cada punto del espacio un vector que sale de él.

En este tema trabajaremos con campos escalares y vectoriales en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$.

Si $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial llamaremos M, N y P a sus tres componentes escalares, es decir

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

Las propiedades de un campo vectorial en cuanto a continuidad o derivabilidad se establecen a partir de las propiedades que verifican sus componentes escalares. Por ejemplo, un campo vectorial es de clase C^r si cada una de sus componentes lo es (derivable con continuidad hasta orden r).

2 Línea de fuerza o de flujo

Definición (Línea de fuerza o línea de flujo).- Es una curva $\mathbf{r}(t)$ *tal que*

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$$

es decir, $\mathbf{F}$ *produce el campo de velocidades de la curva* $\mathbf{r}(t)$.

Geométricamente significa que el vector campo es tangente a la línea de fuerza en cada punto

Ejemplos de campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$.

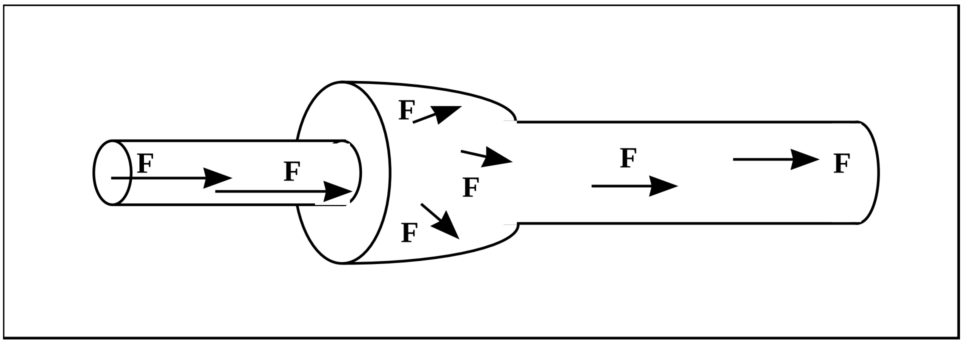


Figura 1.- Campo vectorial de velocidades del flujo en una tubería

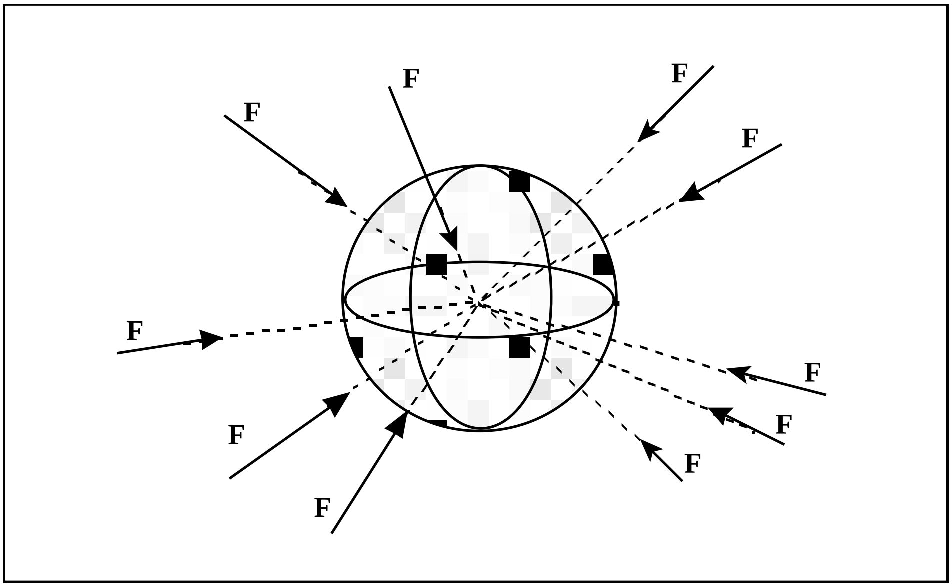


Figura 2.- Campo vectorial gravitacional de Newton

3 Operadores vectoriales

Definición (Gradiente).- Es el campo vectorial

$$\operatorname{grad}(f(x,y,z)) = \nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\mathbf{k}$$

IMPORTANTE RECORDAR:

- La relación entre la derivada direccional y el campo gradiente de un campo escalar diferenciable f es: $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$, siendo **u** un vector unitario.
- La derivada direccional "mide el cambio de f en la dirección de **u**".
- La derivada direccional es máxima en la dirección del gradiente.

Definición (Campo vectorial conservativo y función potencial).- $\mathbf{F}$ *es un campo vectorial conservativo si existe un campo escalar* f*, diferenciable, de forma que*
$\mathbf{F} = \nabla f$

Definición (Líneas equipotenciales).- Sea $\mathbf{F} = \nabla f(x,y)$*, siendo* $f(x,y)$ *diferenciable. Las líneas equipotenciales de* $\mathbf{F}$ *son las curvas que verifican* $f(x,y) = C$

Definición (Superficies equipotenciales).- Sea $\mathbf{F} = \nabla f(x,y,z)$*, siendo* $f(x,y,z)$ *diferenciable. Las superficies equipotenciales de* $\mathbf{F}$ *son las superficies que verifican*
$f(x,y,z) = C$

PROPIEDAD: Las líneas equipotenciales y las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de fuerza.

Definición (Divergencia).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$$

se define su divergencia como el campo escalar

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M, N *y* P.
Nótese que $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$

Definición (Rotacional).- Dado el campo vectorial

$$.\, \mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}\,.$$

se define su rotacional como el campo vectorial

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M, N *y* P.

Nótese que $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$

Definición (Laplaciano).- Es el campo escalar

$$\Delta f(x,y,z) = \mathrm{div}(\nabla f(x,y,z)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)$$

El laplaciano de f también se denota por $\nabla^2 f$.

TEOREMA.- Para cualquier función f, con derivadas parciales primeras y segundas continuas, se tiene

$$\mathrm{rot}\left(\nabla f\right) = \mathbf{0}$$

es decir, el rotacional de cualquier campo vectorial conservativo, cuya función potencial sea de clase C^2, es el vector cero.

*TEOREMA.- Para cualquier campo vectorial **F**, cuyas componentes sean funciones con derivadas parciales primeras y segundas continuas, se tiene*

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbf{F}) = 0$$

es decir, la divergencia del rotacional es cero.

INTEGRALES DE LÍNEA DE UN CAMPO ESCALAR

4 Definición

Siendo C una curva suave[2] y $f(x,y,z)$ una función continua sobre C la integral de línea de f sobre C es:

$$\int_C f\left(x,y,z\right) ds$$

Si la curva C es plana, la integral de línea es $\int_C f\left(x,y\right) ds$.

El cálculo de la integral de línea como una integral de una variable requiere expresar todas las variables en función de una sola. Empezaremos por definir la diferencial de arco y analizar su expresión según las diferentes ecuaciones de la curva.

Definición (Diferencial de arco).- Dada una curva C, se llama diferencial de arco a la longitud del arco elemental, que se define como

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}\,,\ \text{en}\ \mathbb{R}^2$$

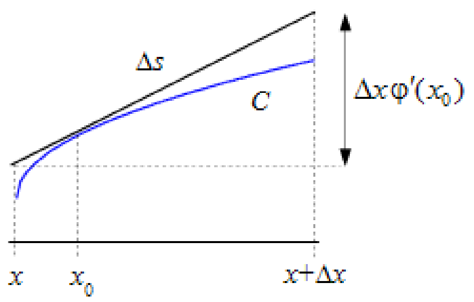
[2] Una curva en $\mathbb{R}^3$, dada por unas ecuaciones paramétricas $x = x\left(t\right),\ y = y\left(t\right),\ z = z\left(t\right)$, con $t \in I$, es suave (clase C^1) en I si las funciones $x\left(t\right),\ y\left(t\right),\ z\left(t\right)$ son continuas con derivada continua en I.

Una curva suave en $\mathbb{R}^2$ se define de forma análoga, prescindiendo de la componente $z\left(t\right)$.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \text{, en } \mathbb{R}^3$$

Dependiendo de la ecuación de la curva, esta diferencial toma distintas expresiones.

Curva plana en cartesianas



Curva dada por

$$y = \varphi(x) \quad \text{con} \quad x \in [a, b]$$

$$\Delta s = \sqrt{1 + \varphi'(x_0)^2}\,\Delta x$$

$$ds = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta s = \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}\,dx$$

Para la curva C dada por $y = \varphi(x)$, con φ continua con derivada continua, se busca una aproximación (Δs en la figura) para la longitud del arco correspondiente a un cambio (Δx en la figura) en la variable x. Para ello tomamos un punto x_0 cualquiera entre x y $x + \Delta x$ y trazamos por él la tangente a la curva. La longitud del segmento de tangente que se proyecta sobre $[x, x + \Delta x]$ es Δs y cuando Δx tiende a cero, Δs tiende a ds.

En este caso la integral de línea de la función $f(x, y)$ sobre C es,

$$\int_C f(x, y)ds = \int_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + \varphi'(x)^2}\, dx$$

Curva en paramétricas

- En $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, con $x(t)$ e $y(t)$ derivables con derivada continua. El elemento diferencial de arco es,

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = |\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt$$

- En $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, con $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ derivables con derivada continua. El elemento diferencial de arco es,

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt = |\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt$$

Por tanto, si la curva viene dada en paramétricas por $\mathbf{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, la integral de línea de f sobre C es,

- En $\mathbb{R}^2$: $\int_C f(x, y)ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$

- En $\mathbb{R}^3$: $\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt$

Curva plana en polares

La curva en polares $r = r(\theta),\ \ \theta \in [\theta_0, \theta_1]$, con r una función continua con derivada continua se puede expresar por las ecuaciones paramétricas

$$x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \ \ ,\ \ y(\theta) = r(\theta)\operatorname{sen}\theta,\ \ \theta \in [\theta_0, \theta_1]$$

Aplicando la definición del diferencial de arco para una curva en paramétricas y simplificando, se obtiene que para este caso

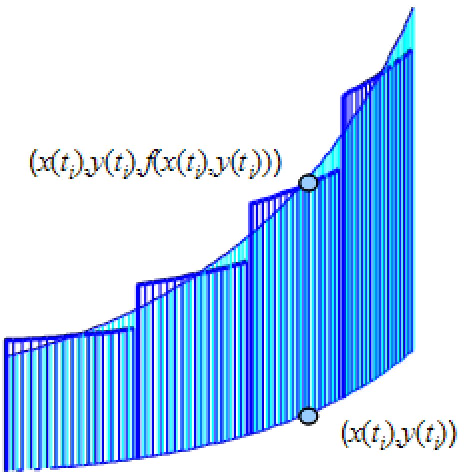
$$ds = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\,d\theta$$

Por tanto, la integral de línea de f sobre C es,

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\operatorname{sen}\theta)\sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\,d\theta$$

5 Interpretación geométrica

Si se consideran una curva plana C y la función $z = f(x,y)$ continua y no negativa sobre C, entonces la integral de f sobre C representa el área de la valla o cortina vertical apoyada sobre C y cuya altura en cada punto viene dada por $f(x,y)$ (ver figura 3).



$$\acute{A}rea = \lim_{\substack{\|C\|\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta s_k = \int_C f(x,y)ds$$

Figura 3.- Interpretación de la integral de un campo escalar sobre una curva.

JUSTIFICACIÓN

Sean $x = x(t),\ \ y = y(t)$ con $t \in [a,b]$ unas ecuaciones paramétricas de C. Se divide el intervalo $[a,b]$ en n intervalos (partición de $[a,b]$), lo que también divide el arco C en n pequeños subarcos (partición de C). Sobre cada subarco k se toman las siguientes aproximaciones :

- Δs_k como la longitud del subarco

- el valor de f en cualquier punto $\left(x_k, y_k\right)$ del subarco.

Con esto, la suma de Riemann de f sobre C

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta s_k$$

aproxima el área de la valla vertical apoyada sobre C, y su límite cuando $\|C\| \to 0$, tiende a la integral de línea cuyo valor será precisamente el área de dicha valla.

6 Propiedades

P1 (Linealidad).- La integral de una combinación lineal de funciones es la combinación lineal de las integrales.

P2 (Aditividad de la curva de integración).- La integral sobre una curva que sea unión de varias es la suma de las integrales sobre cada una de ellas; por ejemplo, para la unión de dos curvas:

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(x,y,z)ds = \int_{C_1} f(x,y,z)ds + \int_{C_2} f(x,y,z)ds$$

P3 (Independencia de la parametrización).- El valor de la integral no cambia con la parametrización elegida para la curva.

P4 (Independencia de la orientación).- El signo de la integral no cambia con la orientación fijada en la curva.

7 Aplicaciones

Longitud de una curva.- Si para una curva C plana se integra el campo constante $f(x,y) = 1$ o si para la curva C en el espacio se integra el campo constante $f(x,y,z) = 1$, se obtendrá la longitud de C.

$$longitud(C) = \int_C ds$$

Área de una valla.- Como se justificó en la interpretación geométrica, el área de la valla construida sobre C, con altura f en cada punto es la integral de f sobre C.

Masa y densidad media de un alambre.- Si C tiene la forma de un alambre, o elemento de una única dimensión significativa, y el campo f da el valor de la densidad lineal en cada punto del alambre, es decir $f\left(x,y,z\right) = \delta\left(x,y,z\right)$, será

$$masa\ total(C) = \int_C \delta\left(x,y,z\right) ds$$

$$densidad\ media(C) = \frac{\int_C \delta\left(x,y,z\right) ds}{\int_C ds}$$

Temperatura media de un alambre.- Si C tiene la forma de un alambre, o elemento de una única dimensión significativa, y el campo f da el valor de la temperatura en cada punto del alambre, es decir $f\left(x,y,z\right)=T\left(x,y,z\right)$, tendremos

$$temperatura\ media(C)=\frac{\int_C T\left(x,y,z\right)ds}{\int_C ds}$$

8 Integral de línea sobre una curva en R³

A) Si la curva C viene dada por unas ecuaciones paramétricas: $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$ con $t\in\left[a,b\right]$, la integral se calcula de la siguiente forma:

$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_a^b f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+y'(t)^2}\ dt$$

B) Si la curva C viene dada como intersección de dos superficies en cartesianas:

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

se intentará parametrizar la curva, escribiendo las variables $x,\ y,\ z$ en función de t de forma que se cumplan las ecuaciones de las superficies.

Si no es posible parametrizar, se elegirá una variable independiente entre $x,\ y,\ z$ y se pondrán las otras dos variables en función de la elegida, utilizando las ecuaciones de las superficies. Supongamos que se ha elegido la variable x como independiente. De las ecuaciones de las superficies despejaríamos $y=y(x),\ z=z(x)$, que sustituidas en la integral de línea conducirían a una integral en la variable x:

$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_{x_0}^{x_1} f\left(x,y(x),z(x)\right)\sqrt{1+y'(x)^2+z'(x)^2}\ dx$$

INTEGRAL DE LÍNEA DE UN CAMPO VECTORIAL

9 Definición

La integral del campo vectorial $\mathbf{F}$ sobre la curva C es la integral del campo escalar $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Los dos elementos que intervienen en la integral de un campo vectorial a lo largo de una curva son:

- La curva orientada C, definida por su vector de posición $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, que comienza en $A(x(a),y(a),z(a))$ y termina en $B(x(b),y(b),z(b))$, cumpliendo $x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2\neq 0$ para todo $t\in[a,b]$ (curva suave). En cada punto de la curva se define el vector tangente unitario, $\mathbf{T}(t)=\dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\left|\mathbf{r}'(t)\right|}$.
- El campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ definido y continuo sobre C.

Si el campo es plano, el vector $\mathbf{F}$ en cada punto de la curva se puede descomponer en sus componentes tangencial y normal:

$\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}=$ componente tangencial a la curva

$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=$ componente normal a la curva

Otras expresiones de la integral de línea:

- Si C viene dada por la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t)$ con $t\in\left[a,b\right]$, se puede expresar

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right)\cdot\mathbf{r}'(t)dt=\int_a^b \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right)\cdot\mathbf{T}(t)\left|\mathbf{r}'(t)\right|dt=\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$$

- Tomando $\mathbf{F}=(M,N,P)$ y $d\mathbf{r}=(dx,\ dy,\ dz)$ y haciendo el producto escalar de estos dos vectores se obtiene la forma diferencial de la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_C Mdx+Ndy+Pdz$$

10 Interpretación física: Trabajo

Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerzas en el espacio, entonces una partícula que se mueva a lo largo de una curva mientras actúa sobre ella $\mathbf{F}$, realizará un trabajo W. Para calcular este trabajo se hace una partición de la curva C y se calcula el trabajo parcial realizado por $\mathbf{F}$ para mover una partícula sobre un subarco cualquiera de la partición. El trabajo total será la suma de los trabajos sobre todos los subarcos considerados en C.

En la figura 4 se ilustran los elementos que intervienen en este cálculo.

Si la curva viene dada por $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$, conforme t varía sobre un pequeño intervalo, de t a $t+\Delta t$, la partícula se mueve de $\mathbf{r}(t)$ a $\mathbf{r}(t+\Delta t)$, luego el vector desplazamiento es

$$\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$$

con lo que es posible calcular el trabajo para ir de $\mathbf{r}(t)$ a $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ por

$$\Delta w=\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right)\cdot\Delta\mathbf{r}$$

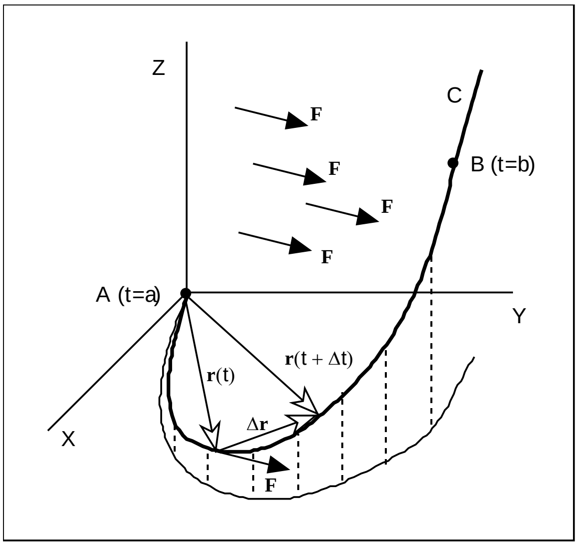


Figura 4.- Interpretación de la integral de un campo vectorial sobre una curva.

Si subdividimos el arco $\widehat{AB}$ o curva C en n partes iguales (partición con n subarcos), entonces el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ se puede aproximar por la suma de Riemann

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(c_k)\right) \cdot \Delta\mathbf{r}, \text{ con } c_k \in \left[t_{k-1}, t_k\right]$$

Cuando $\left\|C\right\| \to 0$, $\left(n \to \infty\right)$, esta aproximación coincide con el trabajo real realizado por $\mathbf{F}$ al recorrer la trayectoria C, siendo

$$W = \lim_{\substack{\left\|C\right\| \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(c_k)\right) \Delta\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

11 Aplicaciones

Trabajo.- Ya hemos visto que el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}$ para desplazar una partícula de masa unidad a lo largo de la curva C es la integral de la componente tangencial del campo, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$, sobre la curva, puesto que sólo realiza trabajo la componente tangencial a la curva:

$$Trabajo = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

Circulación.- Se llama así a la cantidad total de fluido que rodea una curva cerrada C; se calcula con la integral de línea del campo de velocidades, **V**, del fluido a lo largo de la curva:

$$Circulación = \oint_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{T} ds$$

Flujo.- Para calcular la cantidad de fluido, sujeto al campo de velocidades **V**, que atraviesa un elemento unidimensional (un alambre, por ejemplo), se integrará la componente de **V** normal a la curva C que dibuja el alambre, es decir:

$$Flujo = \int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds$$

12 Cálculo de la integral de un campo vectorial sobre una curva

- Si la curva C viene dada por su ecuación vectorial $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ o por unas ecuaciones paramétricas: $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$ con $t\in[a,b]$, la integral se calcula de la siguiente forma:

$$\int_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r}=\int_C Mdx+Ndy+Pdz=$$

$$=\int_a^b\Big(\big(M(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)+\big(N(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t)+\big(P(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big)dt$$

- Si la curva C viene dada como intersección de dos superficies en cartesianas:

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$$

se intentará parametrizar la curva, escribiendo las variables $x,\ y,\ z$ en función de t de forma que se cumplan las ecuaciones de las superficies.

Si no es posible parametrizar, se elegirá una variable independiente entre $x,\ y,\ z$ y se pondrán las otras dos variables en función de la elegida, utilizando las ecuaciones de las superficies. Supongamos que se ha elegido la variable x como independiente. De las ecuaciones de las superficies despejaríamos $y=y(x),\ z=z(x)$, que sustituídas en la integral de línea conducirían a una integral en la variable x:

$$\int_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r}=\int_C Mdx+Ndy+Pdz=$$

$$=\int_a^b\Big(\big(M(x,y(x),z(x)\big)+\big(N(x,y(x),z(x)\big)y'(x)+\big(P(x,y(x),z(x)\big)z'(x)\Big)dx$$

13 Teorema de Green en el plano

TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO.-

- *Hipótesis: los elementos que intervienen en este teorema son*
  - *la curva C que es cerrada, simple, suave por partes[3] y orientada positivamente[4];*
  - *la región D del plano encerrada por la curva C;*
  - *un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y)=(M(x,y),N(x,y))$ de clase C^1 sobre D y C;*
- *Tesis: bajo estas hipótesis se verifica que*

$$\oint_C M\,dx+N\,dy=\iint_D\left(N'_x-M'_y\right)dA$$

OBSERVACIÓN.- Tomando los vectores tangente y normal unitarios siguientes,

[3]Una curva es suave por partes si es unión finita de curvas suaves.
[4]Una curva está orientada positivamente si se recorre dejando el recinto a su izquierda.

$$\mathbf{T} = \frac{\dfrac{dx}{dt}\mathbf{i} + \dfrac{dy}{dt}\mathbf{j}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}} \quad , \quad \mathbf{n} = \frac{\dfrac{dy}{dt}\mathbf{i} - \dfrac{dx}{dt}\mathbf{j}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}}$$

y aplicando la tesis del teorema de Green, pueden obtenerse las siguientes igualdades:

i) $$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds = \iint_D (\operatorname{rot}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dA$$

ii) $$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \iint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA$$

Estas expresiones constituyen, respectivamente, la tesis del teorema de Stokes en el plano y del teorema de la divergencia de Gauss en el plano. Se deja al alumno la obtención de ambas expresiones.

Aplicación del Teorema de Green al cálculo de un área plana

El área de la región plana *D*, que es interior a la curva *C*, se puede calcular mediante la integral de línea:

$$A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

El teorema de Green que hemos enunciado se ha establecido para una curva suave *C* que forma la frontera de la región *D* del plano. ¿Qué ocurre si la frontera de la región D no es una única curva, sino la unión de varias? ¿Cómo se generaliza el teorema de Green a este tipo de regiones?

TEOREMA DE GREEN GENERALIZADO.- Sean C_0 y C_1 dos curvas simples cerradas orientadas positivamente, suaves por partes tales que no se cortan, estando C_1 encerrada por C_0. Sea D la región anular entre C_0 y C_1. Si M y N son funciones de clase C¹ en un abierto que contiene a D, entonces

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dA = \oint_{C_0}\left(Mdx + Ndy\right) - \oint_{C_1}\left(Mdx + Ndy\right)$$

La demostración de este teorema se basa en descomponer la región D, como se muestra en la figura 5, y aplicar el conocido teorema de Green a cada una de las partes.

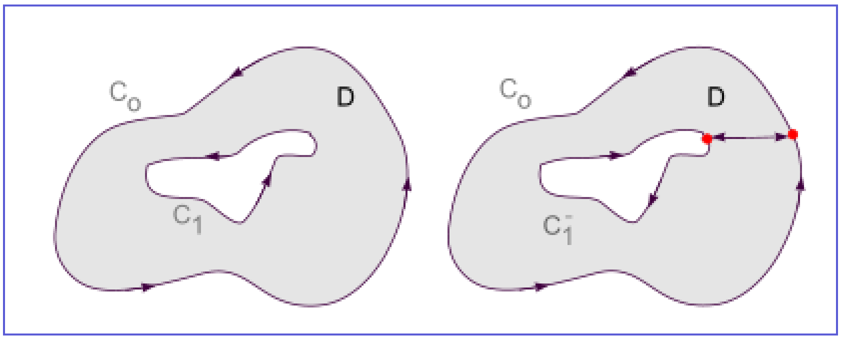


Figura 5.- Teorema de Green generalizado

13 Teorema fundamental de integrales de línea

TEOREMA FUNDAMENTAL DE INTEGRALES DE LÍNEA.- Si f es de clase C¹ en un subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ y C es una curva suave en D dada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ con $a \le t \le b$, entonces

$$\int_C \nabla f \, d\mathbf{r} = f\left(\mathbf{r}(b)\right) - f\left(\mathbf{r}(a)\right)$$

COROLARIO.- Si f es de clase C¹ en un subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ y C es una curva cerrada suave en D, entonces $\oint_C \nabla f \, d\mathbf{r} = 0$

Es decir, el Teorema Fundamental de integrales de línea establece que para un campo conservativo, el valor de la integral es independiente de la trayectoria o bien, que la integral sobre curvas cerradas sea cero. Para aplicar este teorema se necesita un criterio de evaluación de existencia de gradiente, que se formula en el siguiente teorema.

14 Teorema sobre campos conservativos

TEOREMA SOBRE CAMPOS CONSERVATIVOS.-

- *Hipótesis: los elementos que intervienen en este teorema son*

- *un dominio D simplemente conexo (ver después definiciones) de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.*
- *un campo vectorial $\mathbf{F}$ de clase C^1 en D.*

- *Tesis: bajo estas hipótesis se verifica que las siguientes condiciones son equivalentes*[5]

A) *Es nula la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de cualquier curva cerrada suave por partes contenida en D;*

B) *La integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de las curvas contenidas en D es independiente de la trayectoria, sólo depende de cuáles sean los puntos inicial y final;*

C) *El campo $\mathbf{F}$ es conservativo (existe función potencial f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$);*

D) *El rotacional de $\mathbf{F}$ es cero en todos los puntos de D.*

IMPORTANTE.- Las cuatro condiciones del teorema de independencia en $\mathbb{R}^3$, siguen siendo equivalentes aunque el campo vectorial no sea de clase C¹ en un número finito de puntos del dominio en que esté definido, pues siempre podríamos aislar esos puntos excepcionales mediante pequeñas esferas, por ejemplo, y considerar el nuevo dominio resultante, que será simplemente conexo si lo era el inicial.

Definición (Dominio en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$).- Es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ (cualquier punto se puede rodear por un círculo o esfera abiertos contenidos en el conjunto) y conexo (cualquier par de puntos del conjunto se pueden unir por una curva toda ella contenida en el conjunto).

[5]Si una de ellas es cierta, también será cierta cualquiera de las otras.

Definición (Dominio simplemente conexo en $\mathbb{R}^2$).- Un dominio de $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo si toda curva simple cerrada encierra únicamente puntos del conjunto. Dicho de otro modo, no tiene "agujeros".

Definición (Dominio simplemente conexo en $\mathbb{R}^3$).- Un dominio de $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo si toda curva simple cerrada es la frontera de una superficie suave contenida en el conjunto. Dicho de otro modo, no puede "enhebrarse".

Ejercicios propuestos

1 Dibuja los campos que se indican en los puntos de la forma (a,b), $(2a,b)$, $(a,2b)$ y $(2a,2b)$ tomando para a y b los valores $-1,0,1$:

a) $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

b) $\mathbf{F}(x,y) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

2 En cada uno de los siguientes casos, encuentra la forma más general de un campo vectorial en el plano cumpliendo las características que se indican:

(a) Apunte en todos los puntos verticalmente hacia arriba y tenga magnitud constante;

(b) Apunte en todos los puntos verticalmente hacia abajo y su magnitud sea proporcional a la distancia al origen de coordenadas;

(c) Apunte horizontalmente hacia la izquierda en el primer y cuarto cuadrantes y hacia la derecha en el segundo y tercer cuadrantes, siendo su magnitud proporcional a la distancia al eje oY.

3 Sea $\mathbf{r}$ el campo vectorial de los vectores de posición y r el campo escalar de sus normas, es decir,

$\mathbf{r}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad , \quad r = |\,\mathbf{r}\,|$

Calcula ∇r y $\operatorname{div}(r\mathbf{r})$.

Solución: $\nabla r = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ $\qquad \operatorname{div}(r\mathbf{r}) = 4r$

4 Demuestra que los operadores divergencia y rotacional son lineales.

b) Demuestra las siguientes igualdades:

1. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{div}\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla f$
2. $\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{G}$
3. $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$
4. $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{rot}\mathbf{F} + (\nabla f \times \mathbf{F})$

5 Halla el campo escalar $f(x,y,z)$ tal que $f(0,2,\pi/2) = 3$ y

$\nabla f(x,y,z) = (\operatorname{sen} y, x\cos y + \operatorname{sen} z, y\cos z)$

Solución: $f(x,y,z) = x\operatorname{sen} y + y\operatorname{sen} z + 1$

6 Calcula las líneas equipotenciales de los siguientes campos vectoriales gradiente y comprueba que las líneas de flujo son, respectivamente, $xy = k$ e $y = kx$:

a) $\mathbf{F}(x,y) = (-x,y)$ $\qquad$ b) $\mathbf{F}(x,y) = (x,y)$

Representa con Matlab una muestra de los campos anteriores junto con sus líneas de flujo y equipotenciales, en el cuadrado $[-4,4]\times[-4,4]$.

Solución: a) Líneas de flujo: $xy = k$; Líneas equipotenciales: $y^2 - x^2 = C$

b) Líneas de flujo: $y = kx$; Líneas equipotenciales: $y^2 + x^2 = C$

7 Representa con Matlab una muestra del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 + xy, y^2)$ y su divergencia, sobre el cuadrado $[-4,4]\times[-4,4]$.

b) Inventa un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y)$ cuya divergencia sea el campo escalar $f(x,y)=x^2+y^2$ y representa ambos con Matlab sobre el cuadrado $\left[-4,4\right]\times\left[-4,4\right]$.

Solución: b) $\mathbf{F}(x,y)=\dfrac{x^3}{3}\mathbf{i}+\dfrac{y^3}{3}\mathbf{j}$ ó

$\mathbf{F}(x,y)=xy^2\mathbf{i}+yx^2\mathbf{j}$

8

(a) Representa con Matlab el campo escalar $f(x,y)=xy$. En otra figura representa su gradiente, así como las lineas equipotenciales (curvas de nivel del campo escalar) y las líneas de flujo del gradiente de ecuación $x^2-y^2=C$, sobre el cuadrado $\left[-4,4\right]\times\left[-4,4\right]$.

b) Halla el campo escalar $f(x,y)$ cuyas curvas de nivel o equipotenciales sean $-x^2-2y^2=k$ y crea un fichero análogo al del apartado anterior para que represente en una figura $z=f(x,y)$ y en otra figura su gradiente, las curvas equipotenciales y las líneas de flujo del gradiente, cuya ecuación es $y=Cx^2$. Haz la representación en el cuadrado $\left[-4,4\right]\times\left[-4,4\right]$.

Nota: Es importante recordar que las curvas equipotenciales de un campo escalar son ortogonales a las líneas de flujo de su gradiente; comprueba este hecho en las figuras que has obtenido en este ejercicio.

Solución: b) $f(x,y)=-x^2-2y^2$

9

Veremos en este ejercicio un ejemplo de cómo los vectores de un campo gradiente ∇f en el espacio son ortogonales a las superficies equipotenciales o superficies de nivel del campo escalar f.

a) Dado el campo vectorial $\mathbf{F}=(x+y,x,1)$, calcula su función potencial.

b) Para el campo anterior, calcula y representa con Matlab la superficie de nivel que pasa por el punto $P(1,1,1)$ junto con una muestra del campo vectorial actuando sobre ella, en el cuadrado $\left[-2,2\right]\times\left[-2,2\right]$.

Solución: a) $f=x^2/2+xy+z+C$

b) $x^2/2+xy+z=\dfrac{5}{2}$

10

Determina el elemento diferencial de arco de las siguientes curvas:

a) $x\,y=1$ b) $\left(y-1\right)^3=2\left(x+3\right)^2$

c) $x\left(t\right)=a\cos^3 t,\quad y\left(t\right)=a\,\mathrm{sen}^3\,t,$ *a* es un número real

d) $x\left(t\right)=\sqrt{3}\,t^2,\quad y\left(t\right)=3t-t^3/3$

e) $r=e^{\theta/2}$ f) $r=4\cos\theta$

Solución:

$ds=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}\,dx$ ò $ds=\sqrt{1+\dfrac{1}{y^4}}\,dy$;

b) $ds=\sqrt{1+\dfrac{2^{8/3}}{9}\left(x+3\right)^{-2/3}}\,dx$;

c) $ds=3\left|a\right|\left|\cos t\,\mathrm{sen}\,t\right|dt$

d) $ds=\left(t^2+3\right)dt$

e) $ds=\dfrac{\sqrt{5}}{2}e^{\theta/2}\,d\theta$ f) $ds=4\,d\theta$

11

Para las curvas del ejercicio anterior, halla la longitud del arco correspondiente al dominio indicado para la variable. En los casos a) y b) utiliza Matlab para calcularlo; en los casos restantes calcúlalo a mano. Dibuja el arco en cada caso.

a) $x\in\left[1,4\right]$ b) $x\in\left[-2,3\right]$

c) $t\in\left[0,2\pi\right],\ (a=1)$

d) $t\in\left[-3,3\right]$ e) $\theta\in\left(-\infty,0\right]$ f) $\theta\in\left[0,\pi\right]$

Solución:

a) L = 3,1502 ; b) L = 5,7950 ;

c) L = $6\left|a\right|$; d) L = 36

e) L = $\sqrt{5}$; f) L = 4π

12

Halla, haciendo uso de integración, el área de la cortina vertical comprendida entre el plano $z=0$ y el arco de espiral dado por

$x(t)=\cos t\ ,\ y(t)=\mathrm{sen}\,t\ ,\ z(t)=2t\ ,$

$0\le t\le 2\pi$

Solución: Área $=4\pi^2$

13 Un alambre se extiende formando el segmento recto entre los puntos $P(1,-1,1)$ y $Q(3,1,5)$. Su densidad de masa en cada punto (x,y,z) viene dada por la función $\delta(x,y,z)=|x\,y\,z|$. Halla la masa del alambre.

Solución: $\text{Masa}=7\sqrt{6}$

14 Un alambre tiene la forma dada por el arco de hélice elíptica

$C: \quad x(t)=3\cos t, \quad y(t)=4\log(t/\pi),$
$z(t)=6\,\text{sen}\,t, \quad t\in[\pi,5\pi]$

Si en cada punto del alambre la temperatura es $T(x,y,z)=xz+y$. Se pide:

a) Plantea a mano la integral que da la longitud de la curva C. Resuelve la integral con Matlab aproximándola mediante una suma de Riemann de punto medio con 10 intervalos y comprueba la calidad de la aproximación utilizando cálculo simbólico.
b) Repite lo mismo para la integral de la función temperatura sobre el alambre.
c) Calcula la temperatura media del alambre.
d) Encuentra los puntos del alambre que se encuentran a la temperatura media.
e) Prepara un fichero en Matlab para representar el alambre, resaltando sobre él los puntos que se encuentran a temperatura media.
Solución:

$$T_{total}=\int_{\pi}^{5\pi}\left(18\cos t\,\text{sen}\,t+4\log(t/\pi)\right)\sqrt{9+27\cos^2 t+16/t^2}\,dt\,;$$

$$\text{longitud}=\int_{\pi}^{5\pi}\sqrt{9+27\cos^2 t+16/t^2}\,dt\,;$$

c) $T_{media}=\dfrac{T_{total}}{\text{longitud}}$

$f(t)=9\,\text{sen}\,2t+4\log(t/\pi)=T_m$, tiene 9 raíces entre π y 5π, que pueden calcularse con Matlab utilizando la instrucción `fzero(funcion,z0)`, que da el cero de "`funcion`" más cercano a `z0`.

15 Sea C el arco de curva

$x(t)=t^2 \quad , \quad y(t)=t \quad , \quad z(t)=3 \quad ,$
$con \quad 0<t<1$

a) Plantea la integral para calcular la longitud de C.
b) Plantea la integral para calcular la y promedio a lo largo de C.
c) Resuelve con Matlab las dos integrales anteriores.
Solución: a) L

$(C)=(\log(2+\sqrt{5})+2\sqrt{5})/4$; b)

$y_{promedio}=(5\sqrt{5}-1)/(6\sqrt{5}+3\log(2+\sqrt{5}))$

16 Halla la integral de línea

$$I=\oint_C\frac{dx-dy}{x+y}$$

tomada a lo largo del contorno del cuadrado cuyos vértices son los puntos $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ y $D(0,-1)$ y que se recorre en sentido contrario a las agujas del reloj.
Solución: $I=-4$

17 Sea $\mathbf{V}(x,y)=(x+y)\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}$ el campo de velocidades de un fluido y C la circunferencia de radio R centrada en el origen.
a) Representa el campo $\mathbf{V}$ en ocho puntos repartidos uniformemente por la circunferencia. ¿El fluido tiende a entrar o a salir?
b) El flujo saliente total de un campo vectorial $\mathbf{V}$ viene dado por $\oint_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,ds$ donde $\mathbf{n}$ es la normal unitaria de C que apunta hacia fuera. Calcula el flujo saliente total para el campo de este ejercicio y confirma así la respuesta del primer apartado.
Solución: Flujo $=\pi R^2$

18 Utiliza el teorema de Green para calcular el área de la superficie plana S limitada por las curvas $y=4x$ e $y=2x^2$.
Solución: $I=8/3$

19 Sea C el contorno del triángulo cuyos vértices están en los puntos $A(1,1)$, $B(2,2)$ y $C(1,3)$ recorrida en sentido positivo.
a) Utiliza el teorema de Green en el cálculo de la integral $I=\oint_C 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2\,dy$
b) Comprueba el resultado del apartado anterior haciendo la integral directamente.

Solución: $I = -4/3$

20 El campo de velocidades de un fluido es $\mathbf{V}(x,y) = \left(-y^3 + e^{-x}\right)\mathbf{i} + \left(x^2 + \log(y+1)\right)\mathbf{j}$ y un alambre inmerso en ese campo tiene la forma del borde de la región encerrada entre las curvas $x = a\,y^2$ e $y = a\,x^2$ (a es un número real positivo).

a) Halla la circulación, C, de $\mathbf{V}$ alrededor del alambre utilizando el teorema de Green. Puedes hacerlo a mano y comprobar el resultado con Matlab.

b) ¿Hay algún valor de a para el que la circulación C sea nula?

c) Utilizando Matlab, determina el valor de a para el cual $C = 0.1$. En este cálculo puedes usar el comando que calcula las raíces de un polinomio; por ejemplo:

```
>> p=[2 0 1 -3]; %define el polinomio p(x) = 2x^3+x-3
>> roots(p)  % calcula las raíces de p(x)
```

Solución: a) $C = \dfrac{3\left(7a+6\right)}{70a^4}$; b) C no se anula para ningún valor de a.

c) De las raíces del polinomio $7a^4 - 21a - 18$, solo una es real, $a = 1.6573$, ésta es la solución.

21 Un alambre se curva para que tenga la forma de un lazo de la curva $r = \operatorname{sen} 2\theta$ con $\theta \in \left[0, \pi/2\right]$. Un fluido se mueve según el campo de velocidades $\mathbf{V}(x,y) = \left(x^2 - y^2\right)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$

a) Halla la circulación, C, de $\mathbf{V}$ alrededor del alambre utilizando el teorema de Green. La segunda integral se resuelve fácilmente con el cambio de variable $t = \operatorname{sen}\theta$.

b) Puedes utilizar Matlab para hallar directamente la integral de línea, comprobando el resultado anterior. Para ello, utiliza las siguientes ecuaciones paramétricas

$x = \operatorname{sen} 2t \cos t$, $y = \operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} t$, $t \in \left[0, \pi/2\right]$

Solución: a) $C = \dfrac{16}{35}$ positivo.

22 Halla el trabajo realizado por el campo $\mathbf{F}\left(x,y\right) = \dfrac{y}{1+x^2}\mathbf{i} + \operatorname{arctg}\left(x\right)\mathbf{j}$ para mover una partícula de masa unidad sobre el arco de circunferencia unidad comprendido entre las rectas $y = -\sqrt{2}x$ e $y = x$ para $x > 0$, tomado en sentido antihorario.

Solución: $W = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{6\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

23 Una partícula de masa unidad, sujeta al campo de fuerzas $\mathbf{F}\left(x,y\right) = 2e^{2x}\operatorname{sen} y\mathbf{i} + e^{2x}\cos y\mathbf{j}$ sale del punto $P\left(0, \pi/2\right)$. Determina el punto de llegada, Q, sabiendo que está situado en el eje $y = \pi/4$ y que el trabajo realizado es $W = 2$.

Solución: $Q\left(\dfrac{1}{2}\log\left(3\sqrt{2}\right), \dfrac{\pi}{4}\right)$

24 Encuentra el valor de la integral $I = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ siendo el campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{z}{x^2 y} - \frac{z}{x^2+z^2}\right)\mathbf{i} + \frac{z}{xy^2}\mathbf{j} + \left(\frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}\right)\mathbf{k}$$

y C cualquier curva suave que comienza en el punto $P\left(1, \dfrac{1}{3}, 1\right)$ y termina en $Q\left(2, \dfrac{1}{2}, 2\right)$, estando toda ella contenida en el primer octante.

Solución: $I = 1$

Test de autoevaluación

1 ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

A) Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^2, entonces $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{F}) = 0$.

B) Si f es un campo escalar de clase C^2, entonces $\operatorname{div}(\nabla f) = 0$.

C) Si f es un campo escalar de clase C^2, entonces $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$.

D) Ninguna de las anteriores.

2 Siendo $\mathbf{F}$ el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x}{y}\mathbf{i} + \frac{y}{z}\mathbf{j} + \frac{z}{x}\mathbf{k}$, se verifica que:

A) $\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{xy+yz+xz}{xyz}$.

B) $\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{x+y+z}{xyz}$.

C) $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$.

D) Ninguna de las anteriores.

3 Las curvas equipotenciales del campo $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j}$ son:

A) $x^2y - y^2 = C$.

B) $x^2y - \frac{y^3}{3} = C$.

C) No existen.

D) Ninguna de las anteriores

4 Dado el campo vectorial $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$, se puede afirmar que:

A) No existe $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{G}$, es decir, **F** no es el rotacional de otro campo vectorial.

B) Existe $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{G}$, es decir, **F** es el rotacional de otro campo vectorial.

C) $\operatorname{div}\mathbf{F} = 2xy$.

D) Ninguna de las anteriores.

5 Sea el campo vectorial de velocidades $\mathbf{V} = 2x\mathbf{i} + z\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$, decir cuáles de las siguientes ecuaciones definen una línea de flujo de dicho campo.

A) $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}e^{2t}\mathbf{i} + \log|t|\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

B) $y^2 + 2y - 4x + 1 = 0$

C) $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + \log|t|\,\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$

D) Ninguna de las anteriores.

6 Los puntos en los cuales el gradiente de la función $U(x,y,z) = 2x^2y - xz^2$ es un vector paralelo al plano YOZ, verifican:

A) $x = 0$

B) $4xy = z^2$

C) No existen tales puntos.

D) Ninguna de las anteriores.

7 Responder en qué caso las líneas de código Matlab realizan la operación correctamente:

A) Dibuja una muestra del campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ escalado, en el rectángulo [0,4]x[0,4], en la figura 1:

```
x=0:.5:4;y=0:.5:4;
U=y;V=-x;
figure(1);
quiver(x,y,U,V)
```

B) Calcula el gradiente de la función $z = f(x,y) = x\,y$:

```
syms x y
z=x*y;
[px,py]=gradient(z)
```

C) Dibuja la divergencia del vector $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$, sobre el dominio [-4,4]x[-4,4]:

```
[X,Y]=meshgrid(-4:.5:4);
U=X.^2;V=Y.^2;
surf(X,Y,divergence(X,Y,U,V))
```

D) Ninguna de las anteriores.

8 La integral que representa la longitud de arco de la curva $x = e^{-y}$ en el intervalo $0 \le y \le 2$, es:

A) $\int_0^2 \sqrt{1+e^y}\,dy$

B) $\int_0^2 \sqrt{1+e^{2x}}\, dx$

C) $\int_{e^{-2}}^1 \frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}\, dx$

D) Ninguna de las anteriores.

9 Sea C la hélice que tiene las ecuaciones paramétricas $x = 5\cos t,\ \ y = 5\,\mathrm{sen}\, t,\ \ z = t$ con $t \in [0, 4\pi]$

La densidad en cada punto de la hélice es $\delta(x,y,z) = 4\pi - z$, siendo la temperatura en cada punto $T(x,y,z) = \sqrt{z}$. Decir cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera:

A) La longitud del arco es 20π.

B) La masa del alambre vale $8\sqrt{26}\pi$.

C) La temperatura media del alambre es $\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$.

D) Ninguna de las anteriores.

10 Si $f(x,y) \neq 0$, entonces el trabajo realizado por el campo $\mathbf{F} = f(x,y)^2(\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$ a lo largo del primer cuadrante de la circunferencia unidad, recorrida en sentido antihorario, es

A) 0
B) Positivo.
C) Negativo.
D) Ninguna de las anteriores.

11 El valor de la integral $\int_C y\,dx + x\,dy$, siendo C la curva definida por

$\mathbf{r}(t) = \frac{t^4}{4}\mathbf{i} + \mathrm{sen}^3 \frac{\pi t}{2}\mathbf{j},\quad t \in [0,1]$, es:

A) $1/4$
B) 0
C) $-1/4$
D) Ninguna de las anteriores.

12 El valor de la integral $\oint_C y\,dx + e^{\mathrm{sen}\, y^2}\, dy$, siendo C la circunferencia de ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$, recorrida en sentido antihorario, es:

A) 0
B) π
C) $-\pi$
D) Ninguna de las anteriores.

13 ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ es un dominio simplemente conexo?

A) $D = \left\{(x,y) \,/\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\right\}$

B) $D = \left\{(x,y) \,/\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\right\}$

C) $D = \left\{(x,y) \,/\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \ge 1\right\}$

D) Ninguna de las anteriores.

Soluciones del Test:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C	A	B	A	C	B	C	C	C	C	A	C	B

Ejercicios resueltos

1 Obtener el gradiente del campo escalar $V(x,y,z) = k\frac{Q}{r}$, o potencial eléctrico creado por la carga Q en un punto situado a una distancia $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Sabiendo que el campo eléctrico en dicho punto es $\mathbf{E}(x,y,z) = -\mathrm{grad}\,\mathbf{V}$, dibujar una muestra representativa de vectores del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = e\,\mathbf{E}(x,y,z)$ o fuerza eléctrica que actúa sobre una carga e situada en la posición dada por el vector $\mathbf{r}(x,y,z)$. Considerar los casos: $Q\,e>0$ y $Q\,e<0$.

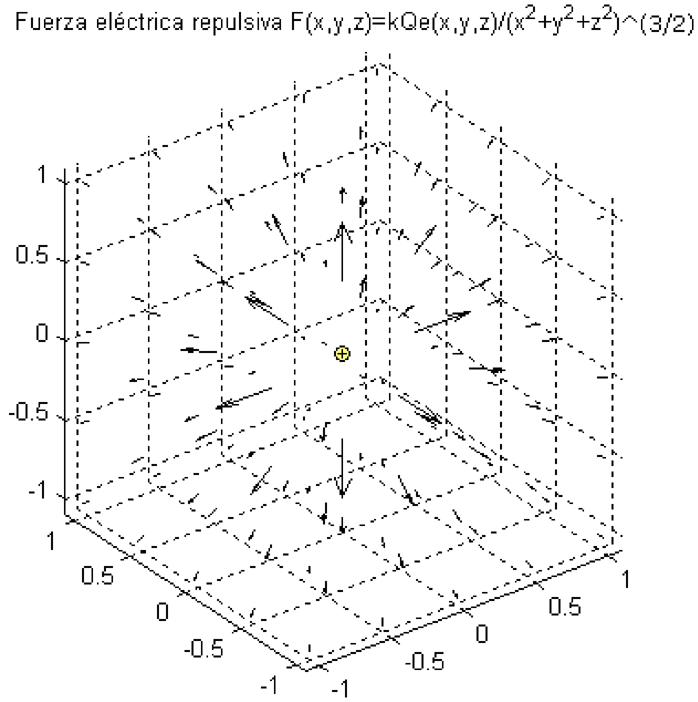
Solución

$V(x,y,z)=k\dfrac{Q}{r}$, calculamos el gradiente de V,

$$\operatorname{grad}\ V(x,y,z)=kQ\cdot\left\{\frac{\partial\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial z}\mathbf{k}\right\}$$

$$\operatorname{grad}\ V(x,y,z)=-\frac{kQ}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\left\{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}\right\}=-\frac{kQ\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=e\,\mathbf{E}\left(x,y,z\right)=-e\operatorname{grad}\ V=\frac{k\,Q\,e\,\mathbf{r}}{r^3}$$



Caso 1: $Q\,e>0$

El vector $\mathbf{F}$ tiene el mismo módulo para todos los puntos situados sobre una superficie esférica centrada en el origen, siendo su dirección y sentido los del vector de posición $\mathbf{r}$. Al acercarnos al origen aumenta el módulo del vector $\mathbf{F}$ (fuerza repulsiva).

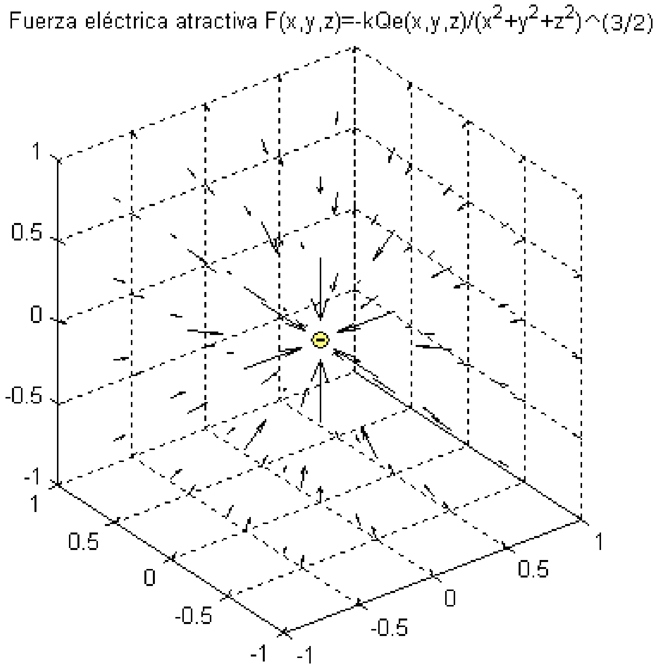
Código Matlab:

```
function fuerzaelectrica
% function cvectorial dibuja una muestra del campo vectorial
```

```
% F(x,y,z)=-kQe(x,y,z)/(x^2+y^2+z^2)^(3/2)
% en la caja [-1,1]x[-1,1]x[-1,1]
[X,Y,Z]=meshgrid(-1:0.5:1,-1:0.5:1,-1:0.5:1);
% red sobre la que se dibujará el campo vectorial
U=X./(X.^2+Y.^2+Z.^2).^(3/2); % primera componente del campo
V=Y./(X.^2+Y.^2+Z.^2).^(3/2); % segunda componente del campo
W=Z./(X.^2+Y.^2+Z.^2).^(3/2); % tercera componente del campo
quiver3(X,Y,Z,U,V,W,'k') % dibujo de los vectores escalados
axis equal
title('Fuerza eléctrica repulsiva
F(x,y,z)=kQe(x,y,z)/(x^2+y^2+z^2)^(3/2)')
```

Caso 2: $Q\,e < 0$

La fuerza $\mathbf{F}$ tiene las mismas propiedades que en el ejemplo anterior, salvo que el sentido es opuesto al del vector de posición $\mathbf{r}$. Luego la fuerza $\mathbf{F}$ es atractiva.



2 Estudiar si los campos vectoriales siguientes son o no conservativos, obteniendo, cuando exista, la función potencial correspondiente:

a) $\mathbf{E}(x,y) = (e^x y^2 + 3x^2 y)\mathbf{i} + (2y\,e^x + x^3)\mathbf{j}$ b) $\mathbf{E}(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2}\mathbf{i} - \dfrac{2y}{x}\mathbf{j}$

c) $\mathbf{E}(x,y,z) = 2\,x\,y\,z\mathbf{i} + (x^2 z + 2y\,e^z)\mathbf{j} + (x^2 y + y^2\,e^z)\mathbf{k}$

Solución

Las componentes del campo vectorial $\mathbf{E}(x,y)$ son funciones continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas (son funciones de clase C^1) en todo $\mathbb{R}^2$. En consecuencia, se verifica

$$\mathbf{E}(x,y) \text{ conservativo } \Leftrightarrow \quad \text{rot}\left(\mathbf{E}\right) = \mathbf{0}$$

calculamos el rotacional de $\mathbf{E}$

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E}\right)=\nabla\times\mathbf{E}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ e^{x}y^{2}+3x^{2}y & 2ye^{x}+x^{3} & 0\end{vmatrix}=\left(2ye^{x}+3x^{2}-2ye^{x}-3x^{2}\right)\mathbf{k}=\mathbf{0}$$

Luego el campo $\mathbf{E}(x,y)$ es conservativo $\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{2}$. Para hallar la función potencial $f(x,y)$, tendremos en cuenta que verifica $\operatorname{grad} f(x,y)=\mathbf{E}(x,y)$, es decir

$$\left\{\begin{array}{ll}1) & \dfrac{\partial f}{\partial x}=e^{x}y^{2}+3x^{2}y\\ 2) & \dfrac{\partial f}{\partial y}=2ye^{x}+x^{3}\end{array}\right\}$$, integrando la ecuación 1) respecto de x, resulta

$$f\left(x,y\right)=\int\left(e^{x}y^{2}+3x^{2}y\right)\cdot dx=e^{x}y^{2}+x^{3}y+g\left(y\right)$$

derivamos respecto de y la expresión anterior y aplicamos la ecuación 2),

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}=2e^{x}y+x^{3}+g'\left(y\right)=2e^{x}y+x^{3}\quad\Rightarrow\quad g'\left(y\right)=0\quad\Rightarrow\quad g\left(y\right)=C$$

Luego $f\left(x,y\right)=e^{x}y^{2}+x^{3}y+C$

b) El campo $\mathbf{E}(x,y)=\dfrac{y^{2}}{x^{2}}\mathbf{i}-\dfrac{2y}{x}\mathbf{j}$ es de clase C¹ en $\mathbb{R}^{2}-\left\{x=0\right\}$, debido a que las componentes del campo vectorial no están definidas cuando el denominador vale 0.

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E}\right)=\nabla\times\mathbf{E}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{y^{2}}{x^{2}} & \dfrac{-2y}{x} & 0\end{vmatrix}=\left(\frac{2y}{x^{2}}-\frac{2y}{x^{2}}\right)\mathbf{k}=\mathbf{0},$$

luego $\mathbf{E}$ es conservativo en $\mathbb{R}^{2}-\left\{x=0\right\}$. La función potencial verifica

$$\left\{\begin{array}{ll}1) & \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y^{2}}{x^{2}}\\ 2) & \dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{2y}{x}\end{array}\right\}$$, integrando la ecuación 2) respecto de y, resulta

$$f\left(x,y\right)=\int-\frac{2y}{x}dy=-\frac{y^{2}}{x}+g\left(x\right)$$

sustituyendo esta función en la ecuación 1) se obtiene

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}=\frac{y^{2}}{x^{2}}+g'\left(x\right)=\frac{y^{2}}{x^{2}}\quad\Rightarrow\quad g'\left(x\right)=0\quad\Rightarrow\quad g\left(x\right)=C\qquad,$$

Luego la función potencial será $f\left(x,y\right)=-\dfrac{y^{2}}{x}+C$, válida $\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{2}-\left\{x=0\right\}$

c) En este caso, el campo $\mathbf{E}(x,y,z)$ es de clase C¹ en todo $\mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E}\right)=\nabla\times\mathbf{E}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xyz & x^2z+2ye^z & x^2y+y^2e^z\end{vmatrix}=\left(x^2+2ye^z-x^2-2ye^z\right)\mathbf{i}+$$
$$+\left(2xy-2xy\right)\mathbf{j}+\left(2xz-2xz\right)\mathbf{k}=\mathbf{0}$$

El campo es conservativo. La función potencial $f(x,y,z)$ verifica

$$\left.\begin{cases}1) & \dfrac{\partial f}{\partial x}=2xyz\\ 2) & \dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2z+2ye^z\\ 3) & \dfrac{\partial f}{\partial z}=x^2y+y^2e^z\end{cases}\right\}$$, integrando la ecuación 1) respecto de x, queda

$$f\left(x,y,z\right)=\int 2xyz\,dx=x^2yz+h\left(y,z\right)$$

sustituyendo en la ecuación 2) se obtiene

$$\frac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial y}=x^2z+h_y'\left(y,z\right)=x^2z+2ye^z \quad\Rightarrow\quad h\left(y,z\right)=\int 2ye^z dy=y^2e^z+g\left(z\right)$$

Sustituyendo la última expresión de $f(x,y,z)$ en la ecuación 3) resulta

$$\frac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial z}=x^2y+y^2e^z+g'\left(z\right)=x^2y+y^2e^z \quad\Rightarrow\quad g'\left(z\right)=0 \quad\Rightarrow\quad g\left(z\right)=C$$

La función potencial será $f\left(x,y,z\right)=x^2yz+y^2e^z+C$, válida $\forall\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3$

3 Obtener la ecuación de las líneas de fuerza y las líneas equipotenciales del campo vectorial plano $\mathbf{F}(x,y)=y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$.

Solución

Planteando y resolviendo la ecuación diferencial de las líneas de fuerza, se tiene:

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}\Rightarrow xdx=ydy\Rightarrow x^2-y^2=C$$

Que es una familia de hipérbolas de ejes $y=x,\ \ y=-x$.

Las líneas equipotenciales se pueden hallar por dos métodos:

- Como trayectorias ortogonales a las líneas de fuerza
- Como curvas donde la función potencial es constante.

El primer método lo dejaremos para cuando veamos ecuaciones diferenciales, aquí utilizaremos la función potencial.

El cálculo de la función potencial es inmediato: $f(x,y)=xy$

Las líneas equipotenciales son pues la familia de hipérbolas de ecuación: $xy = k$

Los ejes de esta familia son $y = 0, \ x = 0$.

4 Dados los puntos $A(0, \ 2, \ 0)$, $B\left(\sqrt{2},1,1\right)$ y la integral

$$I = \int_{\widehat{AB}} (yz + y - 1)dx + (xz + x)dy + (xy + 3z^2)dz$$

Se pide:

a. Estudiar si la integral I depende del camino recorrido.

b. Determinar la función potencial $f\left(x, y, z\right)$, si existe.

c. Determinar el valor de I entre los puntos A y B anteriores.

Solución

a) La funciones $M = yz + y - 1, \ \ N = xz + x, \ \ P = xy + 3z^2$ (son las componentes del campo vectorial $\mathbf{F}$) al igual que sus derivadas parciales primeras son continuas en todo $\mathbb{R}^3$ por ser polinomios. Para que la integral sea independiente del camino el campo vectorial ha de ser conservativo, es decir, su rotacional igual al vector $\mathbf{0}$.

$$\textbf{rot } \mathbf{F}(x,y,z) = \nabla \times \mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

en este caso:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = z + 1 = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0,$$

luego el rotacional es $\mathbf{0}$ por ser nulas cada una de sus componentes; por tanto, la integral no depende del camino recorrido sino solamente de los puntos inicial y final.

b) Por ser el rotacional nulo, existe función potencial y podemos escribir:

$$I = \int_{AB} (yz + y - 1)dx + (xz + x)dy + (xy + 3z^2)dz$$
$$= \int_{AB} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \int_{AB} df = f(B) - f(A)$$

Identificando $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yz + y - 1$, integrando parcialmente con respecto a x (teniendo en cuenta que z e y son constantes):

$$f\left(x,y,z\right)=xyz+xy-x+\mathrm{h}\left(y,z\right)$$

imponiendo la condición

$$\frac{\partial f}{\partial y}=xz+x+h_y^{'}(y,z) \quad\Rightarrow\quad h_y^{'}(y,z)=0 \quad\Rightarrow\quad h(y,z)=g(z)$$

de momento tenemos $f\left(x,y,z\right)=xyz+xy-x+g\left(z\right)$; estableciendo la última condición

$$\frac{\partial f}{\partial z}=xy+3z^2=xy+g'(z)\Rightarrow g'(z)=3z^2\Rightarrow g(z)=z^3+C$$

Por tanto,

$$f\left(x,y,z\right)=xyz+xy-x+z^3+C$$

c) $I=\int_{AB}(yz+y-1)\,dx+(xz+x)dy+(xy+3z^2)dz=f\left(B\right)-f\left(A\right)=$

$$=f\left(\sqrt{2},1,1\right)-f\left(0,\ 2,\ 0\right)=\sqrt{2}+1$$

5 Dada la integral curvilínea $I=\int_C\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$, se pide:

a. Determinar, si existe, la función potencial indicando los puntos en los que no es válida (puntos singulares).

b. Calcular I a lo largo de cualquier curva cerrada que no rodee al punto (0,0).

c. Determinar I a lo largo de cualquier curva cerrada que rodee al punto (0,0) recorrida en sentido positivo.

d. El valor de I a lo largo del segmento rectilíneo que une $A\left(2,0\right)$ con $B\left(0,1\right)$.

Solución

a) Si existe la función potencial $U\left(x,y\right)$, su diferencial igualará a la función subintegral, es decir,

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy$$

Para campos vectoriales en el plano, que sean de clase C^1, se verifica

$$\mathbf{E}(x,y)\text{ conservativo}\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{rot}\left(\mathbf{E}\right)=\mathbf{0}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\partial M\left(x,y\right)}{\partial y}=\frac{\partial N\left(x,y\right)}{\partial x}$$

En este caso se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas, $\dfrac{\partial M\left(x,y\right)}{\partial y}=\dfrac{\partial N\left(x,y\right)}{\partial x}$, que, ya que ambas son iguales a $\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

El problema se plantea en el punto (0,0) ya que en él las funciones *M(x,y)* y *N(x,y)* no son continuas y hay que tener cuidado al usar la función potencial.

Determinemos ya la citada función potencial $U(x,y)$. Tenemos que

$$\frac{\partial U}{\partial x} \equiv M(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{y^2\left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]}$$

e integrando con respecto de x (considerando y como constante) se obtiene

$$U(x,y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + f(y)$$

ya que la constante de integración será función de y, que hemos considerado constante en la integración. Por otra parte:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} + f'(y) \equiv N(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad f'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(y) = C$$

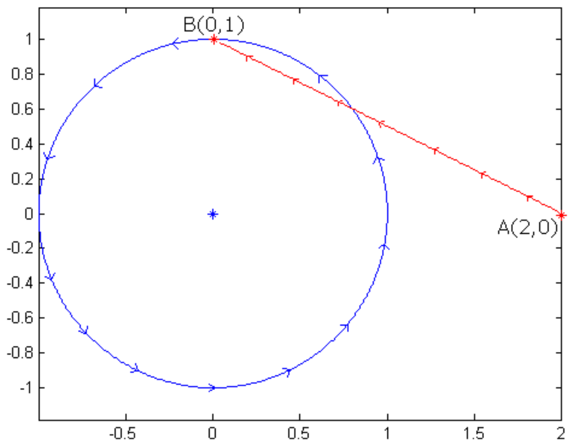
Luego

$$U(x,y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C$$

b) Se puede aplicar la función potencial ya que el conjunto conexo correspondiente a la curva considerada no incluye el origen (0,0), y como al ser cerrada coinciden los puntos inicial y final, la integral a lo largo de cualquier curva cerrada que no rodee al origen es nula, esto es $I = 0$.

c) Para este caso no se puede aplicar la función potencial ya que el conjunto conexo correspondiente a la curva considerada sí incluye el origen (0,0), pero por existir función potencial, la integral a lo largo de cualquier curva cerrada que rodee al origen será independiente del tipo de curva que se trate (aplicación del Teorema de Green generalizado). Así, tomando por comodidad la circunferencia de centro el origen y radio unidad que se muestra en la figura, si hacemos el cambio

$$\begin{cases} x = \cos t & \rightarrow \quad dx = -\operatorname{sen} t\,dt \\ y = \operatorname{sen} t & \rightarrow \quad dy = \cos t\,dt \end{cases}$$



al sustituir en la función subintegral,

$$\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = dt$$

la integral curvilínea se convierte en la integral de la función unidad. Es decir,

$$I = \int_0^{2\pi} dt = \left[t\right]_0^{2\pi} \quad \Rightarrow \quad I = 2\pi$$

d) En este caso se puede aplicar la función potencial ya que el conjunto conexo correspondiente al arco AB no incluye el origen (0,0); por tanto:

$$\int_{AB} dU(x,y) = U_B - U_A = U(0,1) - U(2,0) = \left[-\operatorname{arctg}\frac{0^+}{1} + C\right] - \left[-\operatorname{arctg}\frac{2}{0^+} + C\right] = -0 + \frac{\pi}{2}$$

luego $\quad I = \dfrac{\pi}{2}$

6 Obtener la integral $I = \int_{AB} (1-2y)dx + 2xdy$, a lo largo de las trayectorias siguientes, desde el punto A(1,0) hasta el punto B(0,2), parametrizando en cada caso la curva:

a. el arco de la elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

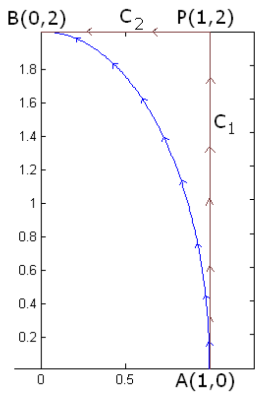
b. la línea poligonal que tiene por vértices los puntos (1,0), (1,2) y (0,2).

Solución

El arco de elipse de semiejes 1 y 2, en el primer cuadrante, se parametriza así,

$$C \equiv \begin{cases} x = \cos t & \rightarrow \quad dx = -\operatorname{sen} t dt \\ y = 2\operatorname{sen} t & \rightarrow \quad dy = 2\cos t dt \end{cases}$$

$$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$



$$I = \int_0^{\pi/2} (1 - 4\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t dt) + 4\cos^2 t\; dt = \int_0^{\pi/2} (-\operatorname{sen} t + 4)dt = \left[\cos t + 4t\right]_0^{\pi/2} = 2\pi - 1$$

La línea poligonal es una curva suave a trozos que se considera la unión de dos segmentos rectilíneos suaves, $C = C_1 \cup C_2$, que se parametrizan por separado,

$$C_1 = \overline{AP} \equiv \begin{cases} x = 1 \rightarrow & dx = 0 \\ y = t \rightarrow & dy = dt \end{cases} \quad 0 \le t \le 2;$$

$$C_2 = \overline{PB} \equiv \begin{cases} x = -t \rightarrow & dx = -dt \\ y = 2 \rightarrow & dy = 0 \end{cases} \quad -1 \le t \le 0$$

$$I=\int_{C_1}(1-2y)dx+2xdy+\int_{C_2}(1-2y)dx+2xdy=\int_0^2 2dt+\int_{-1}^0 3dt=7$$

7 Evaluar la integral $\int_{AB} yzdx+xzdy+xydz$, a lo largo de la circunferencia intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ con el plano $y+z=a$, desde el punto $A\left(0,\mathrm{a},0\right)$ hasta el punto $B\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$, recorrida en sentido antihorario.

Solución

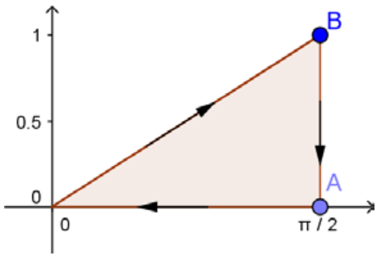
El campo vectorial $\mathbf{E}(x,y,z)=y\,z\mathbf{i}+x\,z\mathbf{j}+x\,y\mathbf{k}$ que se integra es conservativo, pues verifica $\mathrm{rot}\left(\mathbf{E}\right)=\mathbf{0}$. La función potencial es $f\left(x,y,z\right)=x\,y\,z+C$, válida $\forall\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3$. En virtud del Teorema Fundamental de las Integrales Curvilíneas, se verifica

$$\int_{AB} yzdx+xzdy+xydz=f\left(B\right)-f\left(A\right)=f\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)-f\left(0,\mathrm{a},0\right)=-\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$$

8 Utilizando obligatoriamente el teorema de Green en el plano, evaluar la integral

$$\oint_C (y-\operatorname{sen}x)dx+\cos x\,dy\,,$$

siendo C el triángulo de la figura.



Solución

El campo vectorial

$$\mathbf{E}\left(x,y\right)=(y-\operatorname{sen}x)\mathbf{i}+\cos x\,\mathbf{j}$$

es de clase C[1] en todo el plano. Aplicando el teorema de Green, se obtiene el valor de la circulación del campo vectorial $\mathbf{E}(x,y)$ en sentido antihorario

$$\oint_C (y-\operatorname{sen}x)dx+\cos x\,dy=\iint_\Omega\left(\frac{\partial\cos x}{\partial x}-\frac{\partial\left(y-\operatorname{sen}x\right)}{\partial y}\right)dA=\iint_\Omega\left(-\operatorname{sen}x-1\right)dA$$

luego la circulación en sentido horario será

$$I=\oint_C (y-\operatorname{sen}x)dx+\cos x\,dy=-\iint_\Omega\left(-\operatorname{sen}x-1\right)dA=\int_0^{\pi/2}\left(\operatorname{sen}x+1\right)\int_0^{2x/\pi}dydx$$

La recta que une el origen con el punto B tiene por ecuación $y = \dfrac{2}{\pi}x$, como muestran los límites de integración. Integrando respecto de y, resulta $I = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\left(\operatorname{sen} x + 1\right)dx$. Integramos por partes la primera función,

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x dx = \begin{Bmatrix} u = x \to du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x dx \to v = -\cos x \end{Bmatrix} = \left[-x\cos x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx =$$
$$= \left[-x\cos x + \operatorname{sen} x\right]_0^{\pi/2} = 1$$

$$I = \frac{2}{\pi}\left\{1 + \int_0^{\pi/2} x dx\right\} = \frac{2}{\pi}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right\} = \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{4}$$

9 Aplicar el teorema de Green en el plano, comprobando previamente que es posible, para evaluar la integral $L = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$, siendo $\mathbf{E}(x,y) = (y - x^2e^x)\mathbf{i} + (\cos(2y^2) - x)\mathbf{j}$; la curva C es el rectángulo de vértices (0,1), (1,1), (1,4) y (0,4), recorrido en sentido antihorario.

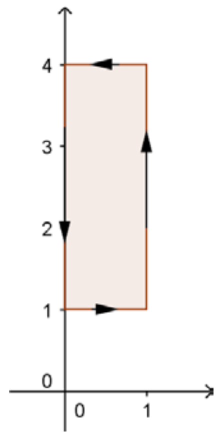
Solución

El campo vectorial

$$\mathbf{E}(x,y) = (y - x^2e^x)\mathbf{i} + (\cos(2y^2) - x)\mathbf{j}$$

es de clase C[1] en todo el plano.

Aplicando el teorema de Green, se obtiene



$$I = \oint_C (y - x^2e^x)dx + (\cos 2y^2 - x)dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial\left(\cos 2y^2 - x\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(y - x^2e^x\right)}{\partial y}\right)dA =$$
$$= \iint_\Omega (-2)dA = -2\left(\text{área } \Omega\right) = -6$$

10 Sea el campo vectorial $\mathbf{E}(x,y) = \dfrac{1}{y}\mathbf{i} - \dfrac{x}{y^2}\mathbf{j}$. Estudiar si $\mathbf{E}(x,y)$ es conservativo, indicando el campo de validez de la función potencial, si existe. Calcular el trabajo realizado por dicho campo para trasladar una partícula a lo largo de las siguientes curvas:

- C_1, la curva cerrada de ecuación $x^2 + (y-2)^2 = 1$, recorrida en sentido antihorario.
- C_2, el triángulo de vértices A(0,-1), B(0,-2) y C(1,-1), recorrido en sentido antihorario.
- C_3, el arco de la parábola $y = x^2 + 1$, desde el punto A(0,1) hasta el punto B(2,5).

- C_4, el segmento rectilíneo que va desde el punto A(0,1) hasta el punto B(2,5).

Solución:

El campo vectorial $\mathbf{E}(x,y) = \frac{1}{y}\mathbf{i} - \frac{x}{y^2}\mathbf{j}$ no está definido para $y = 0$, es decir sobre los puntos del eje OX, ya que en sus componentes se plantearía división por cero. El campo es de clase C1 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{y=0\}$. Probamos si cumple la condición necesaria para que sea conservativo, es decir la igualdad de las derivadas parciales primeras para que el rotacional sea nulo,

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= \frac{1}{y} \\ N(x,y) &= -\frac{x}{y^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x} &= -\frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= -\frac{1}{y^2} \end{aligned}\right\}$$

son iguales, luego $\mathbf{E}(x,y)$ es conservativo $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{y=0\}$. Hallamos la función potencial $f(x,y)$, que verifica

$$\left\{\begin{aligned} &1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \\ &2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \end{aligned}\right\}$$

integrando la ecuación 1) respecto de x, resulta

$$f(x,y) = \int \frac{1}{y}\,dx = \frac{x}{y} + g(y)$$

sustituyendo esta función en la ecuación 2) se obtiene

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + g'(y) = -\frac{x}{y^2} \quad \Rightarrow \quad g'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(y) = C \quad ,$$

Luego la función potencial será $f(x,y) = \frac{x}{y} + C$, válida $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{y=0\}$

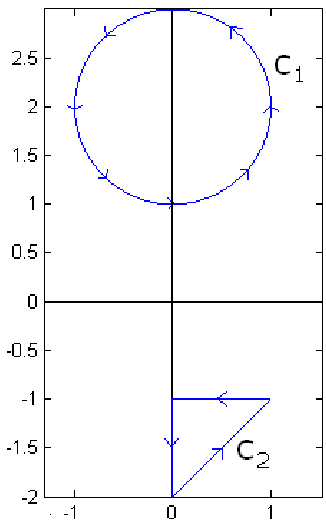
El Teorema Fundamental de las Integrales de Línea garantiza que el trabajo realizado por el campo vectorial $\mathbf{E}(x,y)$ a lo largo de cualquier curva cerrada en un conjunto simplemente conexo donde el campo sea conservativo, es nulo.

En consecuencia, como las curvas C_1 y C_2 son cerradas y no tocan al eje y = 0, se verifica

$$Trabajo = \oint_{C_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

Código Matlab:

```
t=0:0.01:2*pi; x=cos(t);y=2+sin(t);
plot(x,y); axis equal
hold on
x=0:0.01:1;y1=-2+x;y2=-1*ones(size(x));
plot(x,y1,x,y2)
y=-2:0.01:-1;x=0*ones(size(y));
plot(x,y)
```



Las curvas C_3 y C_4 son abiertas. Ambas pueden incluirse dentro de un conjunto simplemente conexo donde el campo $\mathbf{E}(x,y)$ es conservativo; luego, aplicando el Teorema Fundamental de las Integrales Curvilíneas, el trabajo no depende del camino recorrido para ir del punto A(0,1) al punto B(2,5), solo depende de la función potencial en los puntos inicial y final

$$Trabajo = \int_{C_3} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_4} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = f\left(B\right) - f\left(A\right) =$$
$$= f\left(2,5\right) - f\left(0,1\right) = \frac{2}{5}$$

Código Matlab:

```
x=0:0.01:2;y1=x.^2+1;y2=1+2*x;
plot(x,y1,'b',x,y2,'m')
axis equal
```