CAMPOS VECTORIALES. INTEGRALES DE LÍNEA

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Funciones reales de una y varias variables.
- Derivación de funciones de varias variables.
- Cálculo y propiedades de integrales definidas de una variable.
- Manejo de ecuaciones paramétricas de curvas.
- Dibujo de curvas con Matlab.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Los objetivos específicos de este tema son:

1. Saber escribir las ecuaciones paramétricas de curvas básicas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$. Saberlas utilizar para hallar los vectores tangente y normal a la curva.
2. Conocer las definiciones de campo escalar, campo vectorial y componentes de un campo vectorial.
3. Poder trazar una muestra de la gráfica de un campo vectorial sencillo. Saber explicar los conceptos de línea de flujo y equipotencial de un campo vectorial y obtener sus ecuaciones.
4. Saber calcular el gradiente, la divergencia, el rotacional y el laplaciano. Conocer sus propiedades básicas. Utilizar el operador nabla. Manejar expresiones que contengan producto vectorial, producto escalar y estos operadores.
5. Saber qué es un campo conservativo y la función potencial. Poder calcular la función potencial de un campo conservativo.
6. Entender la construcción del elemento diferencial de arco y su significado geométrico; saber calcularlo para curvas expresadas en cartesianas, paramétricas y polares.
7. Entender la definición de integral de un campo escalar sobre una curva y saber calcularla dada la curva y el campo. Hacer uso de sus propiedades.
8. Saber utilizar esta integral para calcular la longitud de una curva.
9. Conocer su significado geométrico como área de una cortina y sus aplicaciones físicas básicas: temperatura, masa. Saber utilizar esta integral para calcular promedios.
10. Entender la definición de integral de un campo vectorial sobre una curva orientada y saber calcularla dada la curva y el campo. Conocer la relación entre esta integral y la de campos escalares. Manejar el efecto del cambio de orientación de la curva sobre el signo de la integral.

11. Poder interpretar físicamente la integral de un campo vectorial sobre una curva como trabajo, circulación o flujo.

12. Poder explicar el teorema de Green en el plano y saber usarlo para calcular una integral de línea sobre una curva cerrada o para calcular una integral doble en una región limitada por una curva.

13. Saber explicar el teorema Fundamental de Integrales de línea y utilizarlo para calcular integrales de línea.

14. Identificar un campo conservativo, utilizando el test del rotacional, y hacer uso de este hecho en el cálculo de su integral de línea.

CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

1 Definiciones

Definición (**Campo escalar**).- Un campo escalar es una función real que asocia a cada punto $P \in A$ un número real.

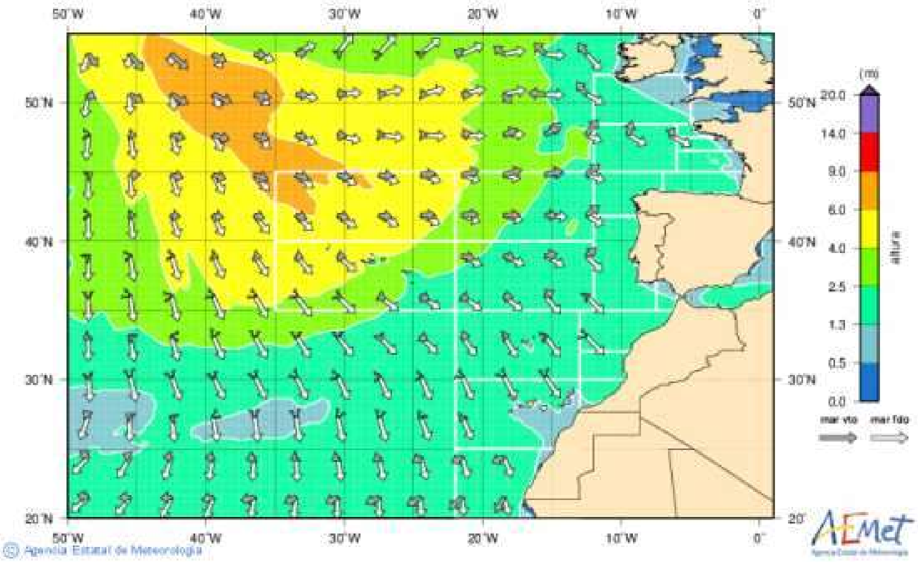
$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Definición (**Campo vectorial**).- Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una función

$$\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

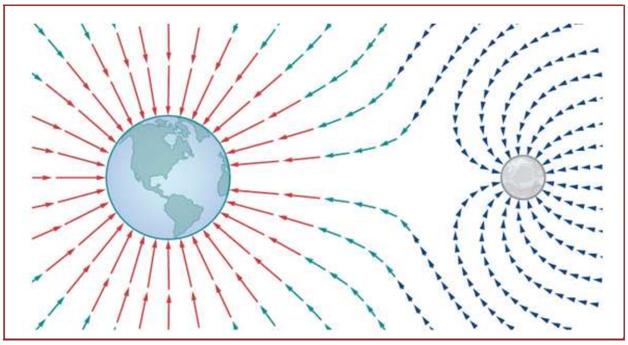
que asigna a cada punto $P \in A$ un vector $\mathbf{F}(P)$.

La imagen gráfica de un campo vectorial surge de asociar a cada punto del espacio un vector que tiene el origen en él.

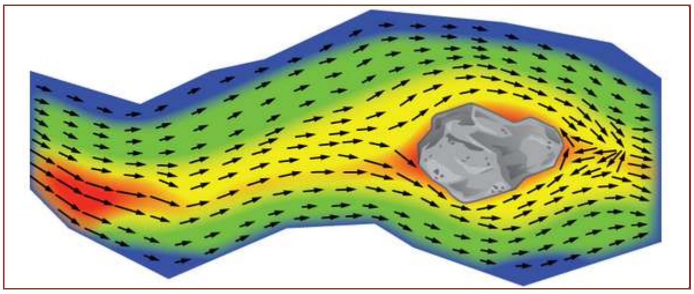


En este tema trabajaremos con campos escalares y vectoriales en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo: Un campo gravitacional ejercido por dos objetos astronómicos, como una estrella y un planeta o un planeta y una luna. En cualquier punto de la figura, el vector asociado a un punto da la fuerza gravitacional neta ejercida por los dos objetos sobre un objeto de masa unitaria. Los vectores de mayor magnitud en la figura son los más cercanos al objeto mayor. El objeto más grande tiene mayor masa, por lo que ejerce una fuerza gravitacional de mayor magnitud que el objeto más pequeño.



Ejemplo: Vector velocidad de un río en puntos de su superficie. El vector asociado a un punto determinado de la superficie del río da la velocidad del agua en ese punto. Como los vectores de la izquierda de la figura son de pequeña magnitud, el agua fluye lentamente en esa parte de la superficie. A medida que el agua se mueve de izquierda a derecha, se encuentra con algunos rápidos alrededor de una roca. La velocidad del agua aumenta y se produce un remolino en parte de los rápidos.

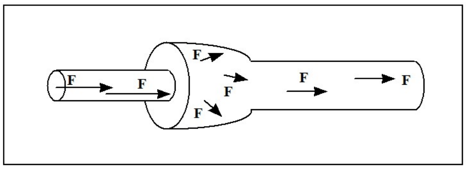


Si $\mathbf{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial llamaremos M, N y P a sus tres componentes escalares, es decir

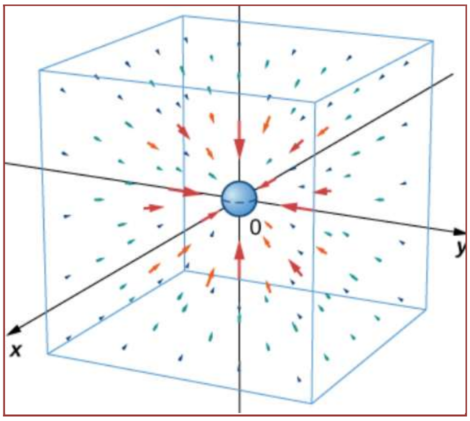
$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$$

Las propiedades de un campo vectorial en cuanto a continuidad o derivabilidad se establecen a partir de las propiedades que verifican sus componentes escalares. Por ejemplo, un campo vectorial es de clase C^r si cada una de sus componentes lo es (derivable con continuidad hasta orden r).

Ejemplos de campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$. La siguiente figura muestra el campo vectorial de velocidades del flujo en una tubería



La siguiente figura el campo gravitacional de Newton $\mathrm{F} = -Gm_1m_2\langle \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \rangle$



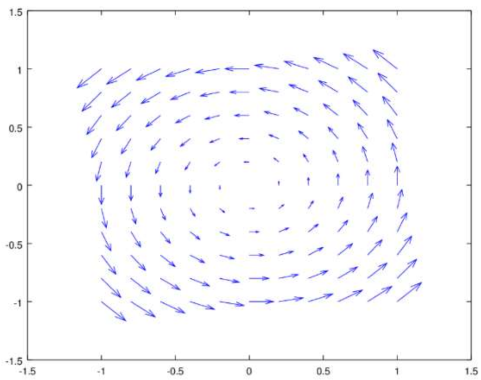
2 Representación de campos vectoriales con Matlab

Campos planos

quiver(x,y,u,v,escala)

Representa mediante flechas, una muestra del campo vectorial de componentes (u,v) en los puntos (x,y). El parámetro escala es opcional.

```
[x,y]=meshgrid(-1:.2:1);
quiver(x,y,-y,x);
```

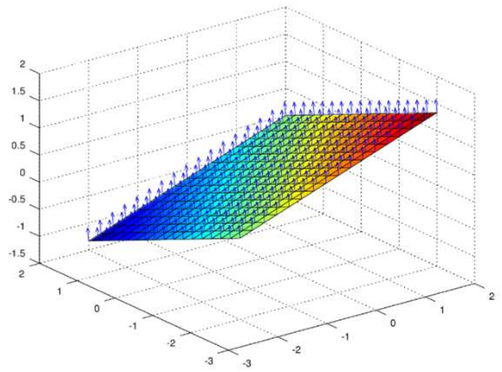


Campos en el espacio

quiver3(x,y,z,u,v,w,escala)

Representa mediante fechas, una muestra del campo vectorial de componentes (u,v,w) en los puntos (x,y,z). El parámetro **escala** es opcional

```
[X,Y] = meshgrid(-2:0.25:2);
U=-ones(size(X))/3;V=-ones(size(X))/3;W= ones(size(X));
quiver3(X,Y,(X-Y)/3,U,V,W);
hold on
surf(X,Y,(X-Y)/3);
hold off
```



Herramienta para dibujar campos planos
https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/escenas/campos/CamposPlanos.html

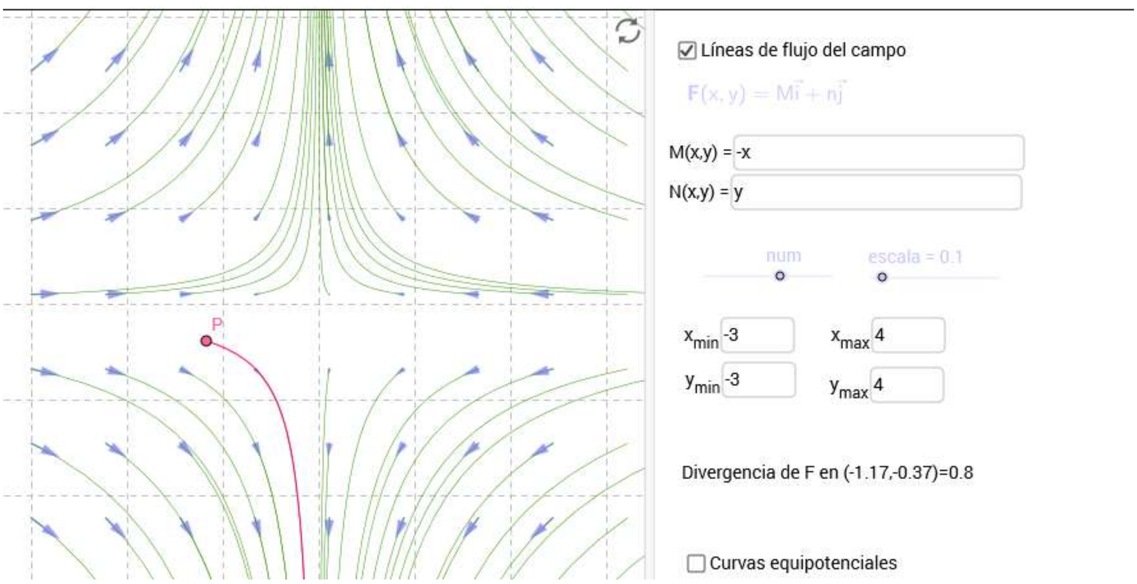
3 Línea de fuerza o de flujo

Definición (**Línea de fuerza o línea de flujo**).- Es una curva $\mathbf{r}(t)$ tal que

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$$

es decir, $\mathbf{F}$ produce el campo de velocidades de la curva $\mathbf{r}(t)$.

Geométricamente significa que el vector campo es tangente a la línea de fuerza en cada punto.



Herramienta para representar líneas de flujo
https://personales.unican.es/alvareze/geogebra/cvectorial.html

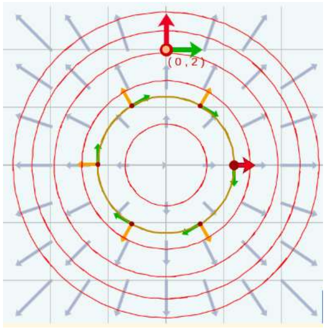
4 Operadores vectoriales

Definición (**Gradiente**).- Es el campo vectorial

$$\operatorname{grad}(f(x,y,z)) = \nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\mathbf{k}$$

IMPORTANTE RECORDAR:

- La relación entre la derivada direccional y el campo gradiente de un campo escalar diferenciable f es: $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$, siendo u un vector unitario.
- La derivada direccional "mide el cambio de f en la dirección de u".
- La derivada direccional es máxima en la dirección del gradiente.
- El gradiente en un punto es ortogonal a la curva de nivel que pasa por dicho punto.



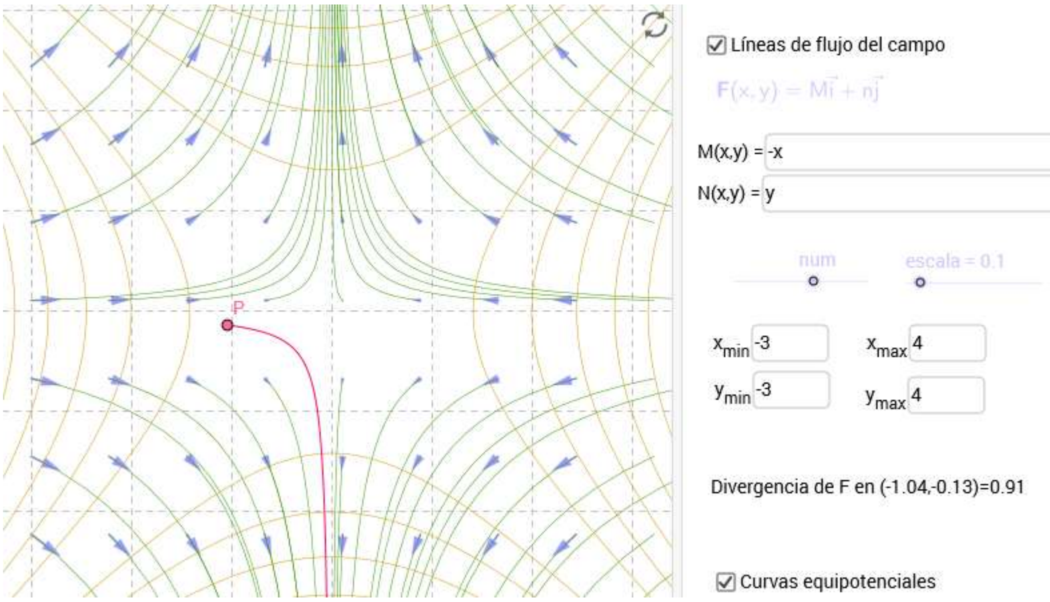
Herramienta para representar campos gradiente
https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/CamposGradientes-JS/index.html

Definición (**Campo vectorial conservativo y función potencial**).- $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo si existe un campo escalar f, diferenciable, de forma que
$\mathbf{F} = \nabla f$

Definición (**Líneas equipotenciales**).- Sea $\mathbf{F} = \nabla f(x,y)$, siendo $f(x,y)$ diferenciable. Las líneas equipotenciales de $\mathbf{F}$ son las curvas que verifican $f(x,y) = C$

Definición (**Superficies equipotenciales**).- Sea $\mathbf{F} = \nabla f(x,y,z)$, siendo $f(x,y,z)$ diferenciable. Las superficies equipotenciales de $\mathbf{F}$ son las superficies que verifican $f(x,y,z) = C$

PROPIEDAD: Las líneas equipotenciales y las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de fuerza.



Herramienta para representar líneas de flujo y curvas equipotenciales
https://personales.unican.es/alvareze/geogebra/cvectorial.html

Definición (**Divergencia**).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$$

se define su divergencia como el campo escalar

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M , N y P .
Nótese que $\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$

Definición (**Rotacional**).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}\,.$$

se define su rotacional como el campo vectorial

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M , N y P .

Nótese que $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$

Definición (**Laplaciano**).- Es el campo escalar

$$\Delta f(x,y,z) = \mathrm{div}(\nabla f(x,y,z)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)$$

El laplaciano de f también se denota por $\nabla^2 f$.

TEOREMA.- Para cualquier función f, con derivadas parciales primeras y segundas continuas, se tiene

$$\mathrm{rot}\left(\nabla f\right) = \mathbf{0}$$

es decir, el rotacional de cualquier campo vectorial conservativo, cuya función potencial sea de clase C^2, es el vector cero.

TEOREMA.- Para cualquier campo vectorial $\mathbf{F}$, cuyas componentes sean funciones con derivadas parciales primeras y segundas continuas, se tiene

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbf{F}) = 0$$

es decir, la divergencia del rotacional es cero.

INTEGRALES DE LÍNEA DE UN CAMPO ESCALAR

5 Definición

Siendo *C* una curva suave[1] y $f(x,y,z)$ una función continua sobre *C* la integral de línea de f sobre *C* es:

$$\int_C f\left(x,y,z\right) ds$$

Si la curva *C* es plana, la integral de línea es $\int_C f\left(x,y\right) ds$.

El cálculo de la integral de línea como una integral de una variable requiere expresar todas las variables en función de una sola. Empezaremos por definir la diferencial de arco y analizar su expresión según las diferentes ecuaciones de la curva.

Definición (**Diferencial de arco**).- Dada una curva C, se llama diferencial de arco a la longitud del arco elemental, que se define como

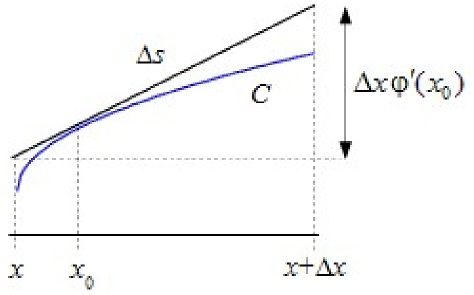
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}\ , \text{ en } \mathbb{R}^2$$

[1] Una curva en $\mathbb{R}^3$, dada por unas ecuaciones paramétricas $x = x\left(t\right),\ y = y\left(t\right),\ z = z\left(t\right)$, con $t \in I$, es suave (clase C^1) en I si las funciones $x\left(t\right),\ y\left(t\right),\ z\left(t\right)$ son continuas con derivada continua en I. Una curva suave en $\mathbb{R}^2$ se define de forma análoga, prescindiendo de la componente $z\left(t\right)$.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\ , \text{ en } \mathbb{R}^3$$

Dependiendo de la ecuación de la curva, esta diferencial toma distintas expresiones.

Curva plana en cartesianas



Curva dada por

$$y = \varphi(x) \quad \text{con} \quad x \in [a,b]$$

$$\Delta s = \sqrt{1+\varphi'(x_0)^2}\,\Delta x$$

$$ds = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta s = \sqrt{1+\varphi'(x)^2}\,dx$$

Para la curva C dada por $y=\varphi(x)$, con φ continua con derivada continua, se busca una aproximación (Δs en la figura) para la longitud del arco correspondiente a un cambio (Δx en la figura) en la variable x. Para ello tomamos un punto x_0 cualquiera entre x y $x+\Delta x$ y trazamos por él la tangente a la curva. La longitud del segmento de tangente que se proyecta sobre $[x, x+\Delta x]$ es Δs y cuando Δx tiende a cero, Δs tiende a ds.

En este caso la integral de línea de la función $f(x,y)$ sobre *C* es,

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'(x)^2}\,dx$$

Curva en paramétricas

- En $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, con $x(t)$ e $y(t)$ derivables con derivada continua. El elemento diferencial de arco es,

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = |\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt$$

- En $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, con $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ derivables con derivada continua. El elemento diferencial de arco es,

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt = |\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt$$

Por tanto, si la curva viene dada en paramétricas por $\mathbf{r}(t)$ con $t \in [a,b]$, la integral de línea de f sobre C es,

- En $\mathbb{R}^2$: $\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$
- En $\mathbb{R}^3$: $\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt$

Curva plana en polares

La curva en polares $r = r(\theta)$, $\theta \in \left[\theta_0, \theta_1\right]$, con r una función continua con derivada continua se puede expresar por las ecuaciones paramétricas

$$x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \quad , \quad y(\theta) = r(\theta)\operatorname{sen}\theta, \quad \theta \in \left[\theta_0, \theta_1\right]$$

Aplicando la definición del diferencial de arco para una curva en paramétricas y simplificando, se obtiene que para este caso

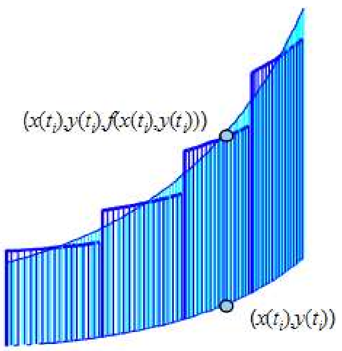
$$ds = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\, d\theta$$

Por tanto, la integral de línea de f sobre C es,

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\operatorname{sen}\theta)\sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\, d\theta$$

6 Interpretación geométrica

Si se consideran una curva plana *C* y la función $z = f(x,y)$ continua y no negativa sobre *C*, entonces la integral de f sobre C representa el área de la valla o cortina vertical apoyada sobre C y cuya altura en cada punto viene dada por $f(x,y)$ (ver figura 3).



$$\text{Área} = \lim_{\substack{\|C\|\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta s_k = \int_C f(x,y)ds$$

JUSTIFICACIÓN

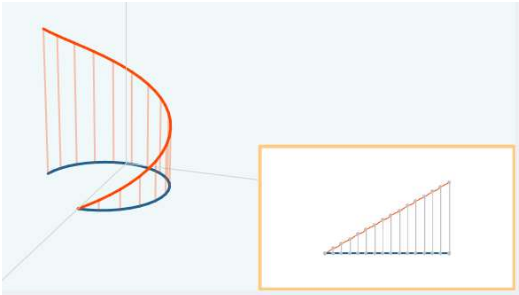
Sean $x = x(t)$, $y = y(t)$ con $t \in [a,b]$ unas ecuaciones paramétricas de *C*. Se divide el intervalo $[a,b]$ en n intervalos (partición de $\left[a,b\right]$), lo que también divide el arco C en n pequeños subarcos (partición de C). Sobre cada subarco k se toman las siguientes aproximaciones :

- Δs_k como la longitud del subarco
- el valor de f en cualquier punto $\left(x_k, y_k\right)$ del subarco.

Con esto, la suma de Riemann de f sobre C

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta s_k$$

aproxima el área de la valla vertical apoyada sobre C, y su límite cuando $\|C\| \to 0$, tiende a la integral de línea cuyo valor será precisamente el área de dicha valla.



Herramienta para mostrar la interpretación de la integral de línea de un campo escalar
https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/IntegraLineaCEscalar-JS/index.html

7 Propiedades

P1 (Linealidad).- La integral de una combinación lineal de funciones es la combinación lineal de las integrales.

P2 (Aditividad de la curva de integración).- La integral sobre una curva que sea unión de varias es la suma de las integrales sobre cada una de ellas; por ejemplo, para la unión de dos curvas:

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(x,y,z)ds = \int_{C_1} f(x,y,z)ds + \int_{C_2} f(x,y,z)ds$$

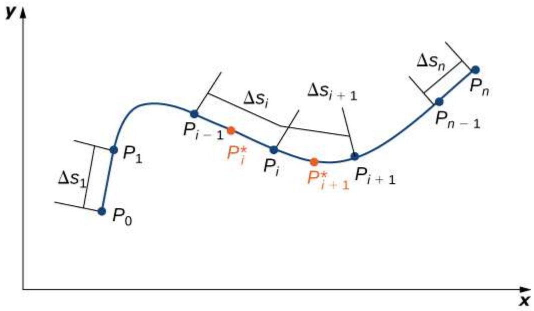
P3 (Independencia de la parametrización).- El valor de la integral no cambia con la parametrización elegida para la curva.

P4 (Independencia de la orientación).- El signo de la integral no cambia con la orientación fijada en la curva.

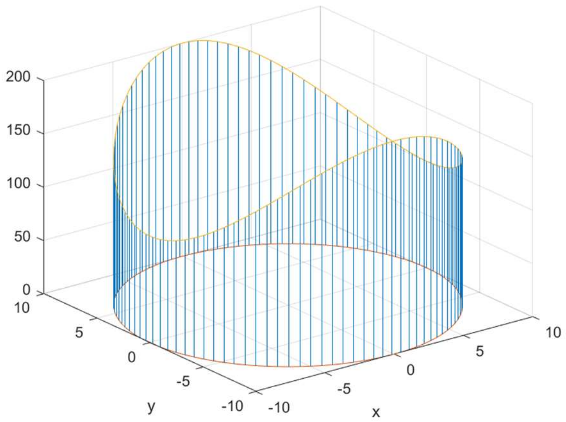
8 Aplicaciones

Longitud de una curva.- Si para una curva C plana se integra el campo constante $f(x,y)=1$ o si para la curva C en el espacio se integra el campo constante $f(x,y,z)=1$, se obtendrá la longitud de C.

$$longitud(C) = \int_C ds$$



Área de una valla.- Como se justificó en la interpretación geométrica, el área de la valla construida sobre C, con altura f en cada punto es la integral de f sobre C .



Masa y densidad media de un alambre.- Si C tiene la forma de un alambre, o elemento de una única dimensión significativa, y el campo f da el valor de la densidad lineal en cada punto del alambre, es decir $f\left(x,y,z\right)=\delta\left(x,y,z\right)$, será

$$masa\ total(C)=\int_C \delta\left(x,y,z\right)ds \qquad\qquad densidad\ media(C)=\frac{\int_C \delta\left(x,y,z\right)ds}{\int_C ds}$$

Temperatura media de un alambre.- Si C tiene la forma de un alambre, o elemento de una única dimensión significativa, y el campo f da el valor de la temperatura en cada punto del alambre, es decir $f\left(x,y,z\right)=T\left(x,y,z\right)$, tendremos

$$temperatura\ media(C)=\frac{\int_C T\left(x,y,z\right)ds}{\int_C ds}$$

9 Integral de línea sobre una curva en R³

A) Si la curva *C* viene dada por unas ecuaciones paramétricas: $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$ con $t\in\left[a,b\right]$, la integral se calcula de la siguiente forma:

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt$$

B) Si la curva *C* viene dada como intersección de dos superficies en cartesianas:

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

se intentará parametrizar la curva, escribiendo las variables $x,\ y,\ z$ en función de *t* de forma que se cumplan las ecuaciones de las superficies.

Si no es posible parametrizar, se elegirá una variable independiente entre $x,\ y,\ z$ y se pondrán las otras dos variables en función de la elegida, utilizando las ecuaciones de las superficies. Supongamos que se ha elegido la variable x como independiente. De las ecuaciones de las superficies despejaríamos $y = y(x),\ z = z(x)$, que sustituidas en la integral de línea conducirían a una integral en la variable x:

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_{x_0}^{x_1} f\left(x,y(x),z(x)\right)\sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}\ dx$$

INTEGRAL DE LÍNEA DE UN CAMPO VECTORIAL

10 Definición

La integral del campo vectorial $\mathbf{F}$ sobre la curva C es la integral del campo escalar $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$:

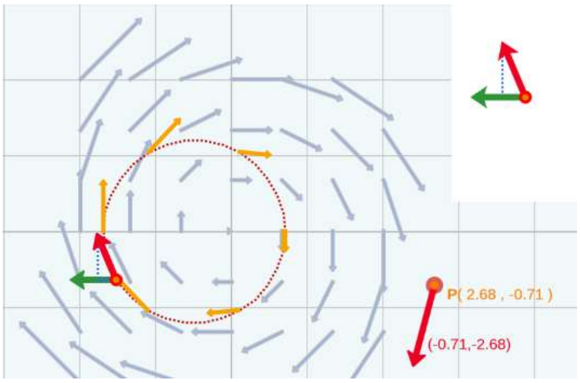
$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. Los dos elementos que intervienen en la integral de un campo vectorial a lo largo de una curva son:

- La curva orientada C, definida por su vector de posición $\mathbf{r}(t) = (x(t),y(t),z(t))$, que comienza en $A(x(a),y(a),z(a))$ y termina en $B(x(b),y(b),z(b))$, cumpliendo $x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$ (curva suave). En cada punto de la curva se define el vector tangente unitario, $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\left|\mathbf{r}'(t)\right|}$.
- El campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ definido y continuo sobre C.

Si el campo es plano, el vector $\mathbf{F}$ en cada punto de la curva se puede descomponer en sus componentes tangencial y normal:

$\mathbf{F}\cdot\mathbf{T} =$ componente tangencial a la curva

$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} =$ componente normal a la curva



Herramienta para mostrar la componente tangencial y normal de un campo vectorial
https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/CamposVectorialesPlanos-JS/index.html

Otras expresiones de la integral de línea:

- Si C viene dada por la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t)$ con $t \in [a,b]$, se puede expresar

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(t) \left|\mathbf{r}'(t)\right| dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

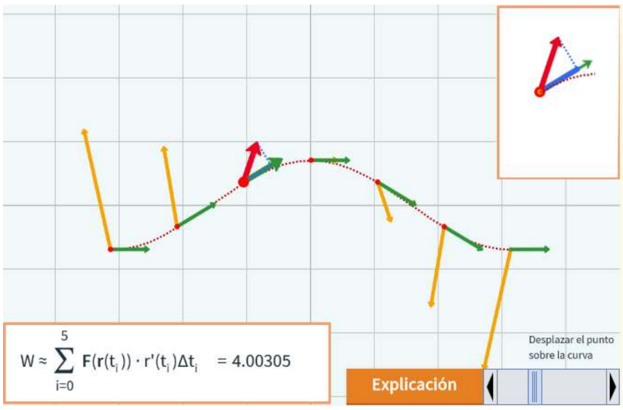
- Tomando $\mathbf{F} = (M, N, P)$ y $d\mathbf{r} = (dx,\ dy,\ dz)$ y haciendo el producto escalar de estos dos vectores se obtiene la forma diferencial de la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C Mdx + Ndy + Pdz$$

11 Interpretación física: Trabajo

Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerzas en el espacio, entonces una partícula que se mueva a lo largo de una curva mientras actúa sobre ella $\mathbf{F}$, realizará un trabajo W. Para calcular este trabajo se hace una partición de la curva C y se calcula el trabajo parcial realizado por $\mathbf{F}$ para mover una partícula sobre un subarco cualquiera de la partición. El trabajo total será la suma de los trabajos sobre todos los subarcos considerados en C.

En la siguiente figura se ilustran los elementos que intervienen en este cálculo.



Herramienta para mostrar la interpretación de la integral de línea de un campo vectorial
https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/IntegralLineaCVectorial-JS/index.html

Si la curva viene dada por $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$, conforme t varía sobre un pequeño intervalo, de t a $t+\Delta t$, la partícula se mueve de $\mathbf{r}(t)$ a $\mathbf{r}(t+\Delta t)$, luego el vector desplazamiento es

$$\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$$

con lo que es posible calcular el trabajo partir de $\mathbf{r}(t)$ a $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ por

$$\Delta w=\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right)\cdot\Delta\mathbf{r}$$

Si subdividimos el arco $\overset{\frown}{AB}$ o curva C en n partes iguales (partición con n subarcos), entonces el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ se puede aproximar por la suma de Riemann

$$W\approx\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(c_k)\right)\cdot\Delta\mathbf{r},\ \text{con}\ \ c_k\in\left[t_{k-1},t_k\right]$$

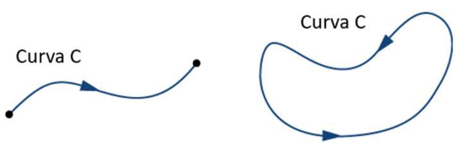
Cuando $\left\|C\right\|\to 0$, $\left(n\to\infty\right)$, esta aproximación coincide con el trabajo real realizado por $\mathbf{F}$ al recorrer la trayectoria C, siendo

$$W=\lim_{\substack{\|C\|\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(c_k)\right)\Delta\mathbf{r}=\int_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

12 Aplicaciones

Trabajo.- Ya hemos visto que el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}$ para desplazar una partícula de masa unidad a lo largo de la curva C es la integral de la componente tangencial del campo, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$, sobre la curva, puesto que sólo realiza trabajo la componente tangencial a la curva:

$$Trabajo=\int_C\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds$$



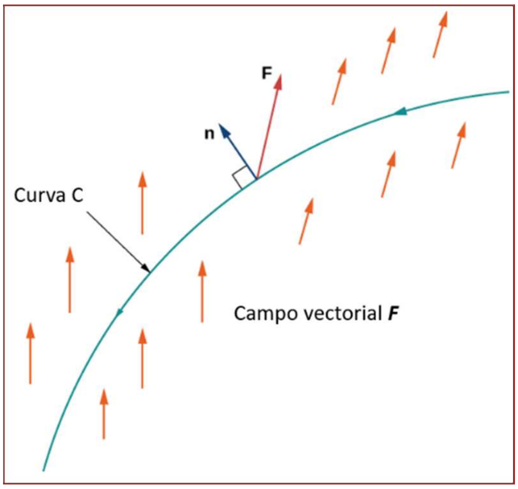
(a) Curva orientada (b) Curva cerrada

Circulación.- Se llama así a la cantidad total de fluido que rodea una curva cerrada C; se calcula con la integral de línea del campo de velocidades, V, del fluido a lo largo de la curva:

$$Circulación=\oint_C\mathbf{V}\cdot\mathbf{T}ds$$

Flujo.- Para calcular la cantidad de fluido, sujeto al campo de velocidades F, que atraviesa un elemento unidimensional (un alambre, por ejemplo), se integrará la componente de V normal a la curva C que dibuja el alambre, es decir:

$$Flujo = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$



13 Cálculo de la integral de un campo vectorial sobre una curva

- Si la curva *C* viene dada por su ecuación vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ o por unas ecuaciones paramétricas: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ con $t \in [a,b]$, la integral se calcula de la siguiente forma:

$$\int_C \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int_C M dx + N dy + P dz =$$

$$= \int_a^b \Big(\big(M(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + \big(N(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + \big(P(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big) dt$$

- Si la curva *C* viene dada como intersección de dos superficies en cartesianas: $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$

se intentará parametrizar la curva, escribiendo las variables $x,\ y,\ z$ en función de t de forma que se cumplan las ecuaciones de las superficies.

Si no es posible parametrizar, se elegirá una variable independiente entre $x,\ y,\ z$ y se pondrán las otras dos variables en función de la elegida, utilizando las ecuaciones de las superficies. Supongamos que se ha elegido la variable *x* como independiente. De las ecuaciones de las superficies despejaríamos $y = y(x),\ z = z(x)$, que sustituyendo en la integral de línea conducirían a una integral en la variable x:

$$\int_C \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int_C M dx + N dy + P dz =$$

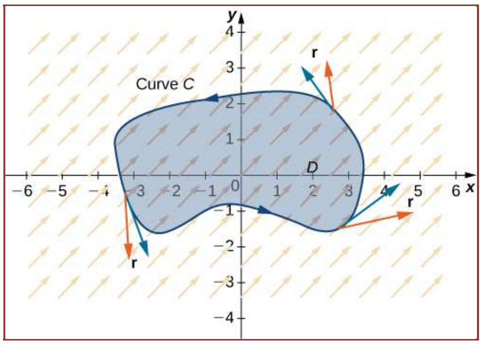
$$= \int_a^b \Big(\big(M(x,y(x),z(x)\big) + \big(N(x,y(x),z(x)\big)y'(x) + \big(P(x,y(x),z(x)\big)z'(x)\Big) dx$$

14 Teorema de Green en el plano

TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO.-

- Hipótesis: los elementos que intervienen en este teorema son
  - la curva C que es cerrada, simple, suave por partes[2] y orientada positivamente[3];
  - la región D del plano encerrada por la curva C;
  - un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ de clase C^1 sobre D y C;
- Tesis: bajo estas hipótesis se verifica que

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_D \left(N'_x - M'_y\right) dA$$



OBSERVACIÓN. Tomando los vectores tangente y normal unitarios siguientes,

$$\mathbf{T} = \frac{\dfrac{dx}{dt}\mathbf{i} + \dfrac{dy}{dt}\mathbf{j}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}}, \qquad \mathbf{n} = \frac{\dfrac{dy}{dt}\mathbf{i} - \dfrac{dx}{dt}\mathbf{j}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}}$$

y aplicando la tesis del teorema de Green, pueden obtenerse las siguientes igualdades:

i) $$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_D (\operatorname{rot}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dA$$

ii) $$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA$$

Estas expresiones constituyen, respectivamente, la tesis del teorema de Stokes en el plano y del teorema de la divergencia de Gauss en el plano. Se deja al alumno la obtención de ambas expresiones.

Aplicación del Teorema de Green al cálculo de un área plana

El área de la región plana *D*, que es interior a la curva *C*, se puede calcular mediante la integral de línea:

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

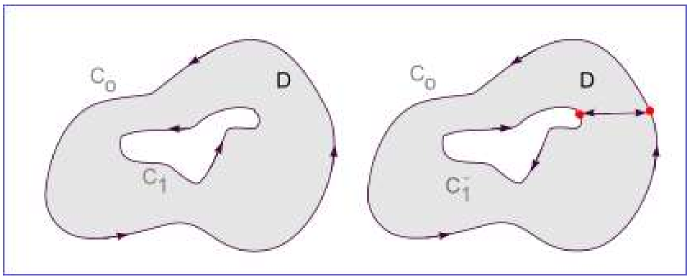
[2]Una curva es suave por partes si es unión finita de curvas suaves.
[3]Una curva está orientada positivamente si se recorre dejando el recinto a su izquierda.

El teorema de Green que hemos enunciado se ha establecido para una curva suave *C* que forma la frontera de la región *D* del plano. ¿Qué ocurre si la frontera de la región D no es una única curva, sino la unión de varias? ¿Cómo se generaliza el teorema de Green a este tipo de regiones?

TEOREMA DE GREEN GENERALIZADO.- Sean C_0 y C_1 dos curvas simples cerradas orientadas positivamente, suaves por partes tales que no se cortan, estando C_1 encerrada por C_0. Sea D la región anular entre C_0 y C_1. Si M y N son funciones de clase C^1 en un abierto que contiene a D, entonces

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \oint_{C_0} \left(Mdx + Ndy\right) - \oint_{C_1} \left(Mdx + Ndy\right)$$

La demostración de este teorema se basa en descomponer la región D, como se muestra en la figura 5, y aplicar el conocido teorema de Green a cada una de las partes.



15 Teorema fundamental de integrales de línea

TEOREMA FUNDAMENTAL DE INTEGRALES DE LÍNEA.- Si f es de clase C^1 en un subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ y C es una curva suave en D dada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ con $a \le t \le b$, entonces

$$\int_C \nabla f\, d\mathbf{r} = f\left(\mathbf{r}(b)\right) - f\left(\mathbf{r}(a)\right)$$

COROLARIO.- Si f es de clase C^1 en un subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ y C es una curva cerrada suave en D, entonces $\oint_C \nabla f\, d\mathbf{r} = 0$

Es decir, el Teorema Fundamental de integrales de línea establece que, para un campo conservativo, el valor de la integral es independiente de la trayectoria o bien, que la integral sobre curvas cerradas sea cero. Para aplicar este teorema se necesita un criterio de evaluación de existencia de gradiente, que se formula en el siguiente teorema.

16 Teorema sobre campos conservativos

TEOREMA SOBRE CAMPOS CONSERVATIVOS.-

- Hipótesis: los elementos que intervienen en este teorema son

- un dominio D simplemente conexo (ver después definiciones) de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.
- un campo vectorial $\mathbf{F}$ de clase C^1 en D.

- Tesis: bajo estas hipótesis se verifica que las siguientes condiciones son equivalentes[4]

A) Es nula la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de cualquier curva cerrada suave por partes contenida en D;

B) La integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de las curvas contenidas en D es independiente de la trayectoria, sólo depende de cuáles sean los puntos inicial y final;

C) El campo $\mathbf{F}$ es conservativo (existe función potencial f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$);

D) El rotacional de $\mathbf{F}$ es cero en todos los puntos de D.

IMPORTANTE.- Las cuatro condiciones del teorema de independencia en $\mathbb{R}^3$, siguen siendo equivalentes aunque el campo vectorial no sea de clase C^1 en un número finito de puntos del dominio en que esté definido, pues siempre podríamos aislar esos puntos excepcionales mediante pequeñas esferas, por ejemplo, y considerar el nuevo dominio resultante, que será simplemente conexo si lo era el inicial.

Definición (**Dominio** en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$).- Es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ (cualquier punto se puede rodear por un círculo o esfera abiertos contenidos en el conjunto) y conexo (cualquier par de puntos del conjunto se pueden unir por una curva toda ella contenida en el conjunto).

Definición (**Dominio simplemente conexo** en $\mathbb{R}^2$).- Un dominio de $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo si toda curva simple cerrada encierra únicamente puntos del conjunto. Dicho de otro modo, no tiene "agujeros".

Definición (**Dominio simplemente conexo** en $\mathbb{R}^3$).- Un dominio de $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo si toda curva simple cerrada es la frontera de una superficie suave contenida en el conjunto. Dicho de otro modo, no puede "enhebrarse".

Ejercicios propuestos

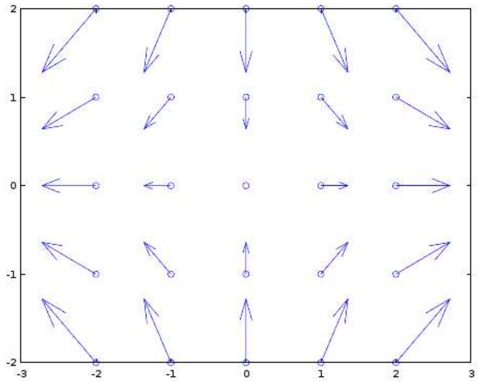
1 Dibuja los campos que se indican en los puntos de la forma (a,b), $(2a,b)$, $(a,2b)$ y $(2a,2b)$ tomando para a y b los valores $-1,0,1$:

a) $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

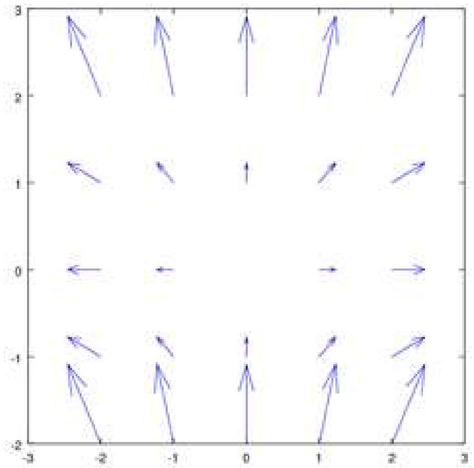
b) $\mathbf{F}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$

Solución apartado a)

[4]Si una de ellas es cierta, también será cierta cualquiera de las otras.



Apartado b)



2

En cada uno de los siguientes casos, encuentra la forma más general de un campo vectorial en el plano cumpliendo las características que se indican:

(a) Apunte en todos los puntos verticalmente hacia arriba y tenga magnitud constante;

(b) Apunte en todos los puntos verticalmente hacia abajo y su magnitud sea proporcional a la distancia al origen de coordenadas;

(c) Apunte horizontalmente hacia la izquierda en el primer y cuarto cuadrantes y hacia la derecha en el segundo y tercer cuadrantes, siendo su magnitud proporcional a la distancia al eje 0Y.

3

Sea $\mathbf{r}$ el campo vectorial de los vectores de posición y r el campo escalar de sus normas, es decir,

$$\mathbf{r}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad , \quad r = |\,\mathbf{r}\,|$$

Calcula ∇r y $\operatorname{div}(r\mathbf{r})$.

Solución: $\nabla r = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ $\qquad \operatorname{div}(r\mathbf{r}) = 4r$

4

Demuestra que los operadores divergencia y rotacional son lineales.

b) Demuestra las siguientes igualdades:

1. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div}\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla f$
2. $\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{G}$
3. $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$
4. $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{rot}\mathbf{F} + (\nabla f \times \mathbf{F})$

5

Halla el campo escalar $f(x,y,z)$ tal que $f(0,2,\pi/2) = 3$ y

$\nabla f(x,y,z) = (\operatorname{sen} y, x\cos y + \operatorname{sen} z, y\cos z)$

Solución: $f(x,y,z) = x\operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} z + 1$

6

Calcula las líneas equipotenciales de los siguientes campos vectoriales gradiente y comprueba que las líneas de flujo son, respectivamente, $xy = k$ e $y = kx$:

a) $\mathbf{F}(x,y) = (-x, y)$ $\qquad$ b) $\mathbf{F}(x,y) = (x,y)$

Representa con Matlab una muestra de los campos anteriores junto con sus líneas de flujo y equipotenciales, en el cuadrado $[-4,4]\times[-4,4]$.

Solución: a) Líneas de flujo: $xy = k$; Líneas equipotenciales: $y^2 - x^2 = C$

b) Líneas de flujo: $y = kx$; Líneas equipotenciales: $y^2 + x^2 = C$

7

Representa con Matlab una muestra del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 + xy, y^2)$ y su divergencia, sobre el cuadrado $[-4,4]\times[-4,4]$.

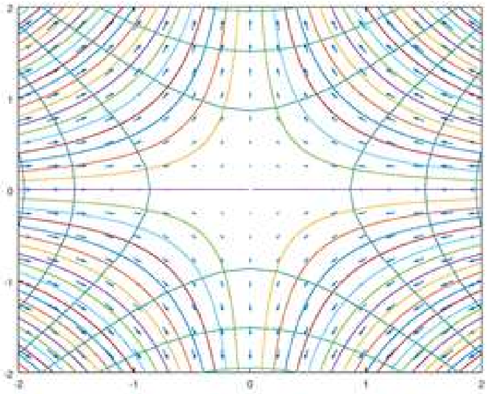
b) Inventa un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y)$ cuya divergencia sea el campo escalar $f(x,y) = x^2 + y^2$ y representa ambos con Matlab sobre el cuadrado $[-4,4]\times[-4,4]$.

Solución: b) $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{x^3}{3}\mathbf{i} + \dfrac{y^3}{3}\mathbf{j}$ ó

$\mathbf{F}(x,y) = xy^2\mathbf{i} + yx^2\mathbf{j}$

8

(a) Representa con Matlab el campo escalar $f(x,y) = xy$. En otra figura representa su gradiente, así como las lineas equipotenciales (curvas de nivel del campo escalar) y las líneas de flujo del gradiente de ecuación $x^2 - y^2 = C$, sobre el cuadrado $\left[-4,4\right]\times\left[-4,4\right]$.



b) Halla el campo escalar $f(x,y)$ cuyas curvas de nivel o equipotenciales sean $-x^2 - 2y^2 = k$ y crea un fichero análogo al del apartado anterior para que represente en una figura $z = f(x,y)$ y en otra figura su gradiente, las curvas equipotenciales y las líneas de flujo del gradiente, cuya ecuación es $y = Cx^2$. Haz la representación en el cuadrado $\left[-4,4\right]\times\left[-4,4\right]$.

Nota: Es importante recordar que las curvas equipotenciales de un campo escalar son ortogonales a las líneas de flujo de su gradiente; comprueba este hecho en las figuras que has obtenido en este ejercicio.

Solución: b) $f(x,y) = -x^2 - 2y^2$

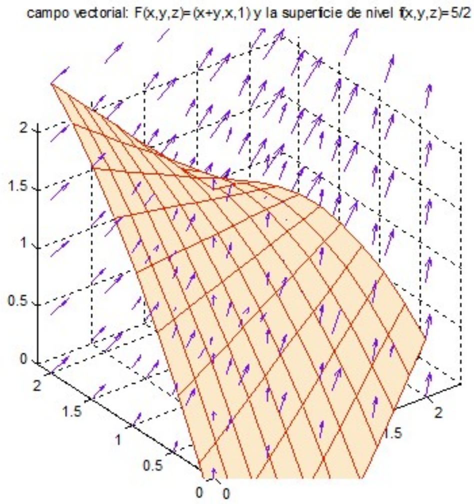
9 Veremos en este ejercicio un ejemplo de cómo los vectores de un campo gradiente ∇f en el espacio son ortogonales a las superficies equipotenciales o superficies de nivel del campo escalar f.

a) Dado el campo vectorial $\mathbf{F} = (x+y, x, 1)$, calcula su función potencial.

b) Para el campo anterior, calcula y representa con Matlab la superficie de nivel que pasa por el punto $P(1,1,1)$ junto con una muestra del campo vectorial actuando sobre ella, en el cuadrado $\left[-2,2\right]\times\left[-2,2\right]$.

Solución: a) $f = x^2/2 + xy + z + C$

b) $x^2/2 + xy + z = \dfrac{5}{2}$



10 Determina el elemento diferencial de arco de las siguientes curvas:

a) $x\,y = 1$ b) $\left(y-1\right)^3 = 2\left(x+3\right)^2$

c) $x\left(t\right) = a\cos^3 t,\quad y\left(t\right) = a\,\mathrm{sen}^3 t,\quad a$ es un número real

d) $x\left(t\right) = \sqrt{3}\,t^2,\quad y\left(t\right) = 3t - t^3/3$

e) $r = e^{\theta/2}$ f) $r = 4\cos\theta$

Solución:

$ds = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^4}}\,dx$ ò $ds = \sqrt{1 + \dfrac{1}{y^4}}\,dy$;

b) $ds = \sqrt{1 + \dfrac{2^{8/3}}{9}\left(x+3\right)^{-2/3}}\,dx$;

c) $ds = 3\left|a\right|\left|\cos t\,\mathrm{sen}\,t\right|dt$

d) $ds = \left(t^2 + 3\right)dt$

e) $ds = \dfrac{\sqrt{5}}{2}e^{\theta/2}\,d\theta$ f) $ds = 4\,d\theta$

11 Para las curvas del ejercicio anterior, halla la longitud del arco correspondiente al dominio indicado para la variable. En los casos a) y b) utiliza Matlab para calcularlo; en los casos restantes calcúlalo a mano. Dibuja el arco en cada caso.

a) $x \in \left[1,4\right]$ b) $x \in \left[-2,3\right]$

c) $t \in \left[0,2\pi\right],\ (a = 1)$

d) $t \in \left[-3,3\right]$ e) $\theta \in \left(-\infty,0\right]$ f) $\theta \in \left[0,\pi\right]$

Solución:

a) L = 3,1502 ; b) L = 5,7950 ;
c) L = $6|a|$; d) L = 36
e) L = $\sqrt{5}$; f) L = 4π

12 Halla, haciendo uso de integración, el área de la cortina vertical comprendida entre el plano $z=0$ y el arco de espiral dado por $x(t)=\cos t$, $y(t)=\operatorname{sen} t$, $z(t)=2t$, $0\le t\le 2\pi$

Solución: Área $=4\pi^2$

13 Un alambre se extiende formando el segmento recto entre los puntos $P(1,-1,1)$ y $Q(3,1,5)$. Su densidad de masa en cada punto (x,y,z) viene dada por la función $\delta(x,y,z)=|x\,y\,z|$. Halla la masa del alambre.

Solución: $\text{Masa}=7\sqrt{6}$

14 Un alambre tiene la forma dada por el arco de hélice elíptica

$$C:\quad x(t)=3\cos t,\quad y(t)=4\log\left(t/\pi\right),$$
$$z(t)=6\operatorname{sen} t,\qquad t\in[\pi,5\pi]$$

Si en cada punto del alambre la temperatura es $T(x,y,z)=xz+y$. Se pide:

a) Plantea a mano la integral que da la longitud de la curva *C*. Resuelve la integral con Matlab aproximándola mediante una suma de Riemann de punto medio con 10 intervalos y comprueba la calidad de la aproximación utilizando cálculo simbólico.
b) Repite lo mismo para la integral de la función temperatura sobre el alambre.
c) Calcula la temperatura media del alambre.
d) Encuentra los puntos del alambre que se encuentran a la temperatura media.
e) Prepara un fichero en Matlab para representar el alambre, resaltando sobre él los puntos que se encuentran a temperatura media.

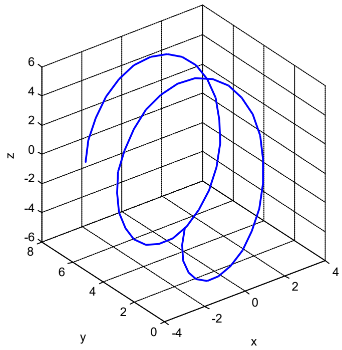
Solución:

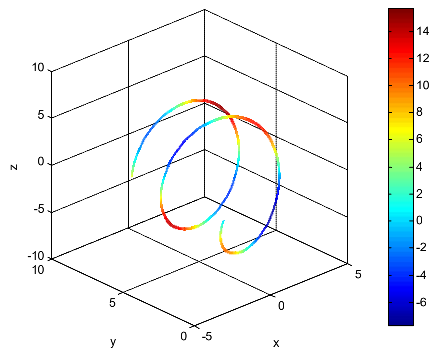
$$T_{total}=\int_{\pi}^{5\pi}\left(18\cos t\operatorname{sen} t+4\log(t/\pi)\right)\sqrt{9+27\cos^2 t+16/t^2}\,dt\ ;$$

$$\text{longitud}=\int_{\pi}^{5\pi}\sqrt{9+27\cos^2 t+16/t^2}\,dt\ ;$$

c) $T_{media}=\dfrac{T_{total}}{\text{longitud}}$

$f(t)=9\operatorname{sen}2t+4\log\left(t/\pi\right)=T_m$, tiene 9 raíces entre π y 5π, que pueden calcularse con Matlab utilizando la instrucción `fzero(funcion,z0)`, que da el cero de "`funcion`" más cercano a `z0`.

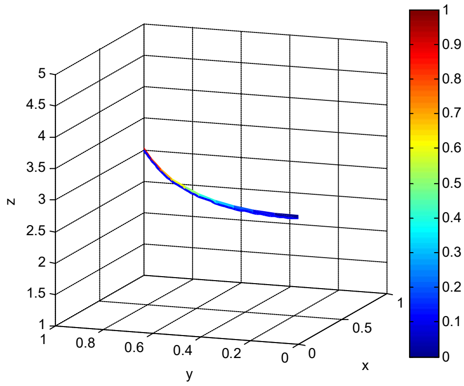


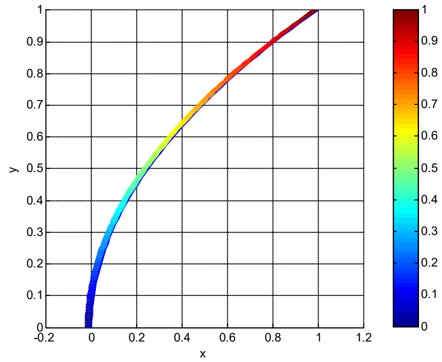


15 Sea C el arco de curva $x(t)=t^2$, $y(t)=t$, $z(t)=3$, $con\quad 0<t<1$

a) Plantea la integral para calcular la longitud de C.
b) Plantea la integral para calcular la y promedio a lo largo de C.
c) Resuelve con Matlab las dos integrales anteriores.

Solución: a) L $(C)=(\log(2+\sqrt{5})+2\sqrt{5})/4$; b) $y_{promedio}=(5\sqrt{5}-1)/(6\sqrt{5}+3\log(2+\sqrt{5}))$





16

Halla la integral de línea

$$I = \oint_C \frac{dx - dy}{x + y}$$

tomada a lo largo del contorno del cuadrado cuyos vértices son los puntos $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ y $D(0,-1)$ y que se recorre en sentido contrario a las agujas del reloj.

Solución: $I = -4$

17

Sea $\mathbf{V}(x,y) = \left(x+y\right)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ el campo de velocidades de un fluido y C la circunferencia de radio R centrada en el origen.

a) Representa el campo $\mathbf{V}$ en ocho puntos repartidos uniformemente por la circunferencia. ¿El fluido tiende a entrar o a salir?

b) El flujo saliente total de un campo vectorial $\mathbf{V}$ viene dado por $\oint_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}ds$ donde $\mathbf{n}$ es la normal unitaria de C que apunta hacia fuera. Calcula el flujo saliente total para el campo de este ejercicio y confirma así la respuesta del primer apartado.

Solución: Flujo $= \pi R^2$

18

Utiliza el teorema de Green para calcular el área de la superficie plana S limitada por las curvas $y = 4x$ e $y = 2x^2$.

Solución: $I = 8/3$

19

Sea C el contorno del triángulo cuyos vértices están en los puntos $A(1,1)$, $B(2,2)$ y $C(1,3)$ recorrida en sentido positivo.

a) Utiliza el teorema de Green en el cálculo de la integral $I = \oint_C 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy$

b) Comprueba el resultado del apartado anterior haciendo la integral directamente.

Solución: $I = -4/3$

20

El campo de velocidades de un fluido es $\mathbf{V}(x,y) = \left(-y^3 + e^{-x}\right)\mathbf{i} + \left(x^2 + \log(y+1)\right)\mathbf{j}$ y un alambre inmerso en ese campo tiene la forma del borde de la región encerrada entre las curvas $x = a\,y^2$ e $y = a\,x^2$ (a es un número real positivo).

a) Halla la circulación, C, de $\mathbf{V}$ alrededor del alambre utilizando el teorema de Green. Puedes hacerlo a mano y comprobar el resultado con Matlab.

b) ¿Hay algún valor de a para el que la circulación C sea nula?

c) Utilizando Matlab, determina el valor de a para el cual $C = 0.1$. En este cálculo puedes usar el comando que calcula las raíces de un polinomio; por ejemplo:

```
>> p=[2 0 1 -3]; %define el polinomio p(x) = 2x^3+x-3
>> roots(p)  % calcula las raíces de p(x)
```

Solución: a) $C = \dfrac{3\left(7a+6\right)}{70a^4}$; b) C no se anula para ningún valor de a.

c) De las raíces del polinomio $7a^4 - 21a - 18$, solo una es real, $a = 1.6573$, ésta es la solución.

21

Un alambre se curva para que tenga la forma de un lazo de la curva $r = \operatorname{sen} 2\theta$ con $\theta \in \left[0, \pi/2\right]$. Un fluido se mueve según el campo de velocidades

$\mathbf{V}(x,y) = \left(x^2 - y^2\right)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$

a) Halla la circulación, C, de $\mathbf{V}$ alrededor del alambre utilizando el teorema de Green. La segunda integral se resuelve fácilmente con el cambio de variable $t = \operatorname{sen}\theta$.

b) Puedes utilizar Matlab para hallar directamente la integral de línea, comprobando el resultado anterior. Para ello, utiliza las siguientes ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} 2t \cos t$, $y = \operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} t$, $t \in \left[0, \pi/2\right]$

Solución: a) $C = \dfrac{16}{35}$ positivo.

22 Halla el trabajo realizado por el campo

$\mathbf{F}\left(x,y\right) = \dfrac{y}{1+x^2}\mathbf{i} + \operatorname{arctg}\left(x\right)\mathbf{j}$

para mover una partícula de masa unidad sobre el arco de circunferencia unidad comprendido entre las rectas $y = -\sqrt{2}x$ e $y = x$ para $x > 0$, tomado en sentido antihorario.

Solución: $W = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{6\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

23 Una partícula de masa unidad, sujeta al campo de fuerzas

$\mathbf{F}\left(x,y\right) = 2e^{2x}\operatorname{sen} y\mathbf{i} + e^{2x}\cos y\mathbf{j}$

sale del punto $P\left(0, \pi/2\right)$. Determina el punto de llegada, Q, sabiendo que está situado en el eje $y = \pi/4$ y que el trabajo realizado es $W = 2$.

Solución: $Q\left(\dfrac{1}{2}\log\left(3\sqrt{2}\right), \dfrac{\pi}{4}\right)$

24 Encuentra el valor de la integral $I = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ siendo el campo

$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{z}{x^2 y} - \dfrac{z}{x^2+z^2}\right)\mathbf{i} + \dfrac{z}{xy^2}\mathbf{j} + \left(\dfrac{x}{x^2+z^2} - \dfrac{1}{xy}\right)\mathbf{k}$

y C cualquier curva suave que comienza en el punto $P\left(1,\dfrac{1}{3},1\right)$ y termina en $Q\left(2,\dfrac{1}{2},2\right)$, estando toda ella contenida en el primer octante.

Solución: $I = 1$

Test de autoevaluación

1 ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

A) Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^2, entonces $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{F}) = 0$.

B) Si f es un campo escalar de clase C^2, entonces $\operatorname{div}(\nabla f) = 0$.

C) Si f es un campo escalar de clase C^2, entonces $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$.

D) Ninguna de las anteriores.

2 Siendo $\mathbf{F}$ el campo vectorial

$\mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{x}{y}\mathbf{i} + \dfrac{y}{z}\mathbf{j} + \dfrac{z}{x}\mathbf{k}$, se verifica que:

A) $\operatorname{div}\mathbf{F} = \dfrac{xy+yz+xz}{xyz}$.

B) $\operatorname{div}\mathbf{F} = \dfrac{x+y+z}{xyz}$.

C) $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$.

D) Ninguna de las anteriores.

3 Las curvas equipotenciales del campo $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j}$ son:

A) $x^2 y - y^2 = C$.

B) $x^2 y - \dfrac{y^3}{3} = C$.

C) No existen.

D) Ninguna de las anteriores

4 Dado el campo vectorial $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$, se puede afirmar que:

A) No existe $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$, es decir, F no es el rotacional de otro campo vectorial.
B) Existe $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$, es decir, F es el rotacional de otro campo vectorial.
C) $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2xy$.
D) Ninguna de las anteriores.

5 Sea el campo vectorial de velocidades $\mathbf{V} = 2x\mathbf{i} + z\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$, decir cuáles de las siguientes ecuaciones definen una línea de flujo de dicho campo.

A) $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}e^{2t}\mathbf{i} + \log|t|\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
B) $y^2 + 2y - 4x + 1 = 0$
C) $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + \log|t|\,\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$
D) Ninguna de las anteriores.

6 Los puntos en los cuales el gradiente de la función $U(x,y,z) = 2x^2y - xz^2$ es un vector paralelo al plano YOZ, verifican:

A) $x = 0$
B) $4xy = z^2$
C) No existen tales puntos.
D) Ninguna de las anteriores.

7 Responder en qué caso las líneas de código Matlab realizan la operación correctamente:

A) Dibuja una muestra del campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ escalado, en el rectángulo [0,4]x[0,4], en la figura 1:

```
x=0:.5:4;y=0:.5:4;
U=y;V=-x;
figure(1);
quiver(x,y,U,V)
```

B) Calcula el gradiente de la función $z = f(x,y) = x\,y$:

```
syms x y
z=x*y;
[px,py]=gradient(z)
```

C) Dibuja la divergencia del vector $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$, sobre el dominio [-4,4]x[-4,4]:

```
[X,Y]=meshgrid(-4:.5:4);
U=X.^2;V=Y.^2;
surf(X,Y,divergence(X,Y,U,V))
```

D) Ninguna de las anteriores.

8 La integral que representa la longitud de arco de la curva $x = e^{-y}$ en el intervalo $0 \le y \le 2$, es:

A) $\int_0^2 \sqrt{1+e^y}\,dy$
B) $\int_0^2 \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$
C) $\int_{e^{-2}}^1 \frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}\,dx$
D) Ninguna de las anteriores.

9 Sea *C* la hélice que tiene las ecuaciones paramétricas
$x = 5\cos t,\ \ y = 5\operatorname{sen} t,\ \ z = t$ con $t \in [0, 4\pi]$
La densidad en cada punto de la hélice es $\delta(x,y,z) = 4\pi - z$, siendo la temperatura en cada punto $T(x,y,z) = \sqrt{z}$. Decir cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera:

A) La longitud del arco es 20π.
B) La masa del alambre vale $8\sqrt{26}\pi$.
C) La temperatura media del alambre es $\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$.
D) Ninguna de las anteriores.

10 Si $f(x,y) \neq 0$, entonces el trabajo realizado por el campo $\mathbf{F} = f(x,y)^2(\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$ a lo largo del primer cuadrante de la circunferencia unidad, recorrida en sentido antihorario, es

A) 0
B) Positivo.
C) Negativo.
D) Ninguna de las anteriores.

11 El valor de la integral $\int_C y dx + x dy$,

siendo C la curva definida por

$\mathbf{r}(t) = \frac{t^4}{4}\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 \frac{\pi t}{2}\mathbf{j}, \quad t \in [0,1]$, es:

A) $1/4$
B) 0
C) $-1/4$
D) Ninguna de las anteriores.

12 El valor de la integral $\oint_C y dx + e^{\operatorname{sen} y^2} dy$,

siendo C la circunferencia de ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$, recorrida en sentido antihorario, es:

A) 0
B) π
C) $-\pi$
D) Ninguna de las anteriores.

13 ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ es un dominio simplemente conexo?

A) $D = \left\{(x,y) \,/\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$

B) $D = \left\{(x,y) \,/\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\right\}$

C) $D = \left\{(x,y) \,/\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \geq 1\right\}$

D) Ninguna de las anteriores.

Soluciones del Test:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C	A	B	A	C	B	C	C	C	C	A	C	B

Ejercicios resueltos

CAMPOS. OPERADORES

1 Sea $\mathbf{F} = (x+1)^2\,\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ el campo de velocidades de un fluido y C la circunferencia de radio R centrada en el origen. Escribe el código Matlab para representar la circunferencia y el campo en 8 puntos repartidos uniformemente sobre ella.

Solución

`fplot(funx,funy,tintervalo)`

Traza la curva definida por `x=funx(t)` y `y=funy(t)` sobre el intervalo predeterminado `[-5 5]` para `t` si se quiere otro intervalo se debe incluir el tercer parámetro.

```
% Dibujo de la circunferencia de radio R
syms t
R=3;
x=R*cos(t);   % primera componente
y=R*sin(t);   % segunda componente
fplot(x,y)    % dibujo de la circunferencia
axis equal
hold on
```

Representamos una muestra de m vectores del campo sobre la curva

```
%dibujo de una muestra de m vectores del campo
tv=linspace(0,2*pi,m+1); % vector de valores del parámetro
%tv=0:2*pi/m:2*pi        % también se puede definir así
X=R*cos(tv); Y=R*sin(tv);   % coordenadas de los puntos
                         % para dibujar los vectores
U1=(X+1).^2;U2=Y;        % componentes del campo
quiver(X,Y,U1,U2,0)      %dibujo de una muestra de m vectores
                         %del campo sin escalar
```

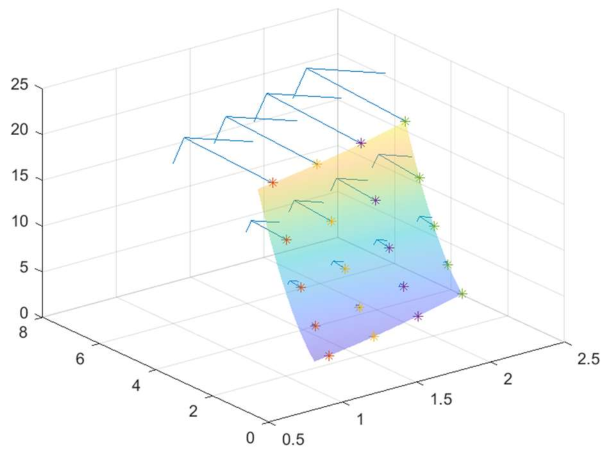
2

Se pide escribir el código Matlab para dada la función $f\left(x,y,z\right)=y^2x^2+zy^4+z$, representar una muestra del campo gradiente en 20 puntos de la superficie $z=x^2+2y^2$ definida en [1,2]x[1,3].

Solución

El código Matlab para dibujar el campo es

```
%Puntos donde dibujar el campo
[X,Y]=meshgrid(1.1:0.3:2,1:0.5:3);
Z=X.^2+2*Y.^2;
%Campo gradiente
u=2*X.*Y.^2;
v=2*Y.*X.^2+4*Z.*Y.^3;
w=Y.^4+1;
%Representación del campo
quiver3(X,Y,Z,u,v,w,'r')
hold on
%Representación de la superficie
f=@(x,y,z) z-x.^2-2*y.^2;
fimplicit3(f,[0 1 1 3 0 25])
hold off
```



3

Sea $\mathbf{r}$ el campo vectorial de los vectores de posición y r el campo escalar de sus normas, es decir, $\mathbf{r}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$, $r=|\,\mathbf{r}\,|$. Calcula ∇r y $\operatorname{div}(r\mathbf{r})$.

Solución

$r = |\,\mathbf{r}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\nabla r = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{j} + \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathbf{k} = \boxed{\frac{\mathbf{r}}{r}}$$

$r\,\mathbf{r} = r\,x\,\mathbf{i} + r\,y\,\mathbf{j} + r\,z\,\mathbf{k}$

$$div\left(r\,\mathbf{r}\right) = \frac{\partial\left(rx\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(ry\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(rz\right)}{\partial x}$$. Dado que

$$\frac{\partial\left(rx\right)}{\partial x} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + r$$

$$\frac{\partial\left(ry\right)}{\partial y} = \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + r$$

$$\frac{\partial\left(rz\right)}{\partial z} = \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + r$$

se tiene que $div\left(r\,\mathbf{r}\right) = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + 3r = \boxed{4r}$

4 Obtener el gradiente del campo escalar $V(x,y,z) = k\dfrac{Q}{r}$, o potencial eléctrico creado por la carga Q en un punto situado a una distancia $r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Sabiendo que el campo eléctrico en dicho punto es $\mathbf{E}(x,y,z) = -\mathrm{grad}\,\mathbf{V}$, dibujar una muestra representativa de vectores del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = e\,\mathbf{E}(x,y,z)$ o fuerza eléctrica que actúa sobre una carga e situada en la posición dada por el vector $\mathbf{r}(x,y,z)$. Considerar los casos: $Q\,e > 0$ y $Q\,e < 0$.

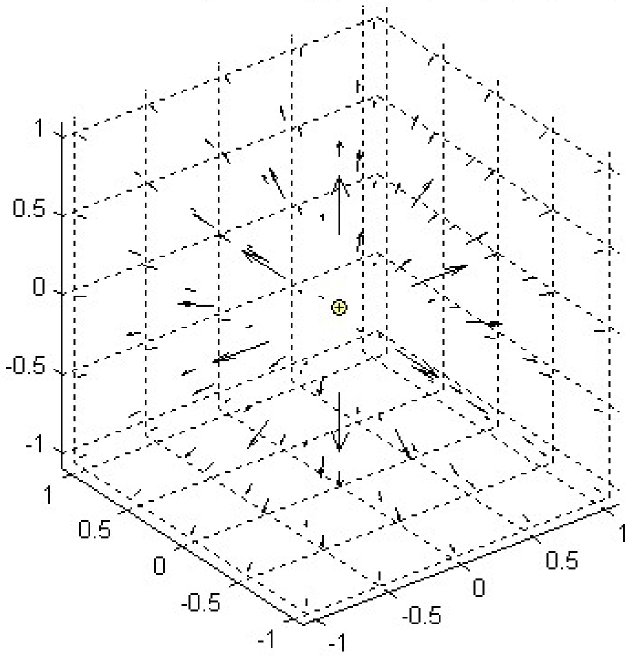
Solución

$V(x,y,z) = k\dfrac{Q}{r}$, calculamos el gradiente de V,

$$\mathrm{grad}\ V(x,y,z) = kQ\cdot\left\{\frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial z}\mathbf{k}\right\}$$

$$\mathrm{grad}\ V(x,y,z) = -\frac{kQ}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\left\{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}\right\} = -\frac{kQ\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=e\,\mathbf{E}\left(x,y,z\right)=-e\,\mathrm{grad}\;V=\frac{k\,Q\,e\,\mathbf{r}}{r^3}$$



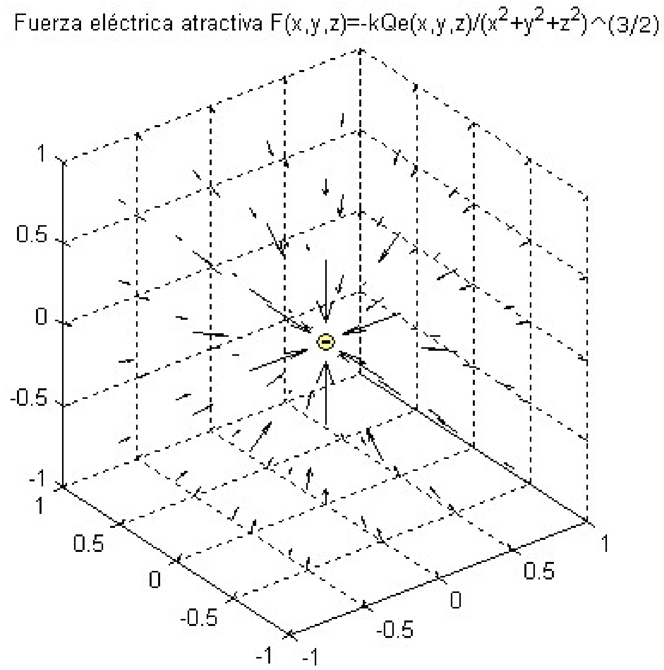
Caso 1: $Q\,e>0$

El vector $\mathbf{F}$ tiene el mismo módulo para todos los puntos situados sobre una superficie esférica centrada en el origen, siendo su dirección y sentido los del vector de posición $\mathbf{r}$. Al acercarnos al origen aumenta el módulo del vector $\mathbf{F}$ (fuerza repulsiva).

```
function fuerzaelectrica
% function cvectorial dibuja una muestra del campo vectorial
% F(x,y,z)=-kQe(x,y,z)/(x^2+y^2+z^2)^(3/2)
% en la caja [-1,1]x[-1,1]x[-1,1]
[X,Y,Z]=meshgrid(-1:0.5:1,-1:0.5:1,-1:0.5:1);
% red sobre la que se dibujará el campo vectorial
U=X./(X.^2+Y.^2+Z.^2).^(3/2); % primera componente del campo
V=Y./(X.^2+Y.^2+Z.^2).^(3/2); % segunda componente del campo
W=Z./(X.^2+Y.^2+Z.^2).^(3/2); % tercera componente del campo
quiver3(X,Y,Z,U,V,W,'k') % dibujo de los vectores escalados
axis equal
title('Fuerza eléctrica repulsiva’)
F(x,y,z)=kQe(x,y,z)/(x^2+y^2+z^2)^(3/2)')
```

Caso 2: $Q\,e<0$

La fuerza $\mathbf{F}$ tiene las mismas propiedades que en el ejemplo anterior, salvo que el sentido es opuesto al del vector de posición $\mathbf{r}$. Luego la fuerza $\mathbf{F}$ es atractiva.



5

Demuestra que para cualquier función f con derivadas parciales segundas continuas se verifica $rot\left(\nabla f\right)=0$.

Solución

$$rot\left(\nabla f\right)=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_x' & f_y' & f_z' \end{vmatrix}=\mathbf{i}\left(f_{zy}''-f_{yz}''\right)-\mathbf{j}\left(f_{zx}''-f_{xz}''\right)+\mathbf{k}\left(f_{yx}''-f_{xy}''\right)=\mathbf{0}$$

6

Escribe en un fichero el código Matlab para hacer las siguientes representaciones

a) Dibujar el vector (-1,4) en el punto $P(2,-3)$, sin escalar.

b) Dibujar el vector (-1,4,2) en el punto $P(2,-3,1)$, sin escalar.

c) Dibuja 10x16 vectores del campo $\mathbf{F}\left(x,y\right)=\left(y,x^2\right)$ en puntos del rectángulo [1,3]x[2,5], junto con una muestra de 20 líneas de fuerza de la ecuación $2x^3-3y^2=C$

d) Dibujar 20x20 vectores del campo $\mathbf{F}\left(x,y\right)=\left(y^2,2xy\right)$ en puntos del rectánculo [-4,4]x[-4,4], junto con una muestra de 20 líneas de flujo de ecuación $x^2-\dfrac{y^2}{2}=C$ y una muestra de 20 líneas equipotenciales.

e) Dibujar 5x4x5 vectores del campo $\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=\left(-1,z,x-y\right)$ en puntos de la caja [1,3]x[2,5]x[1,6].

f) Dibujar un arco $\left(\cos^3 t,\operatorname{sen}^3 t,t\right)$ para $t\in\left[0,\pi\right]$ y 20 vectores del campo $\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=\left(x^2+y,-x,2\right)$ sobre dicho arco.

g) Dibujar el plano $z=4-2x+y$ que se proyecta sobre el rectángulo [1,3]x[2,5] y una muestra de 10x8 vectores del campo $\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=\left(y,0,z+3\right)$, sobre él

Solución a)

```
quiver(2,-3,-1,4,0)
```

Solución b)

```
quiver3(2,-3,1,-1,4,2,0
```

Solución c)

```
x=linspace(1,3,10);y=linspace(2,5,16);
[X,Y]=meshgrid(x,y);M=Y;N=X.^2;
quiver(X,Y,M,N)
hold on
Z=2*X.^3-3*Y.^2;
contour(X,Y,Z,20)
hold off
```

Solución d)

```
 x=linspace(-4,4,20);  [X,Y]=meshgrid(x);M=Y.^2;N=2*X.*Y;
quiver(X,Y,M,N)
hold on
x1=linspace(-4,4);[X1,Y1]=meshgrid(x1);
Z2=X1.*Y1.^2;%líneas equipotenciales
contour(X1,Y1,Z2,20)
Z1=X1.^2-Y1.^2/2;%líneas de flujo
contour(X1,Y1,Z1,20)
axis equal
hold off
```

Solución e)

```
x=linspace(1,3,5);y=linspace(2,5,4);z=linspace(1,6,5);
[X Y Z]=meshgrid(x,y,z);
M=-ones(size(X)); N=Z;P=X-Y;
quiver3(X,Y,Z,M,N,P)
```

Solución f)

```
t=linspace(0,pi);x=cos(t).^3;y=sin(t).^3;z=t;
plot3(x,y,z);
hold on
t1=linspace(0,pi,20);x1=cos(t1).^3;y1=sin(t1).^3;z1=t1;
M=x1.^2+y1;N=-x1;P=2*ones(size(x1));
quiver3(x1,y1,z1,M,N,P)
grid on
hold off
```

Solución g)

```
x=linspace(1,3,10);y=linspace(2,5,8);
[X,Y]=meshgrid(x,y);Z=4-2*X+Y;
surf(X,Y,Z);
hold on
M=Y;N=zeros(size(X));P=Z+3;  quiver3(X,Y,Z,M,N,P)
hold off
```

LINEAS DE FUERZA. LÍNEAS EQUIPOTENCIALES

7 Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y)=(-x,y)$

a) Calcula las líneas equipotenciales y comprueba a mano que las líneas de flujo son $xy=k$.

b) Representa con Matlab una muestra del campo anterior junto con sus líneas de flujo y equipotenciales, en el cuadrado $\left[-4,4\right]\times\left[-4,4\right]$. ¿Qué relación existen entre dos familias de curvas en los puntos de corte?

Solución

Las funciones potenciales f son de la forma $f(x,y)=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+C$, por tanto las líneas equipotenciales son $-x^2+y^2=k$. Estas curvas tienen como pendiente en un punto $\left(x,y\right)$, $y\,'=\dfrac{x}{y}$. Las curvas $xy=k$, tienen por pendiente $y\,'=-\dfrac{y}{x}$, luego son familias de curvas ortogonales, es decir, en los puntos de corte las tangentes se cortan ortogonalmente, es decir, son perpendiculares.

Para representar una muesra del campo con sus líneas de flujo y equipotenciales basta escribir el siguiente código

```
x=-4:0.5:4;[X,Y]=meshgrid(x);
%Representación del campo
quiver(X,Y,-X,Y)
hold on
%líneas equipotenciales
contour(X,Y,-X.^2+Y.^2)
%líneas de flujo
%contour(X,Y,X.*Y)
%También
for k=-2:0.3:2
    plot(x,k./x,'r')
end
axis equal
hold off
```

8 Obtener la ecuación de las líneas de fuerza y las líneas equipotenciales del campo vectorial plano $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

Solución

Planteando y resolviendo la ecuación diferencial de las líneas de fuerza, se tiene:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow xdx = ydy \Rightarrow x^2 - y^2 = C$$

Que es una familia de hipérbolas de ejes $y = x,\ \ y = -x$.

Las líneas equipotenciales se pueden hallar por dos métodos:

- Como trayectorias ortogonales a las líneas de fuerza
- Como curvas donde la función potencial es constante.

El primer método lo dejaremos para cuando veamos ecuaciones diferenciales, aquí utilizaremos la función potencial.

El cálculo de la función potencial es inmediato: $f(x,y) = xy$

Las líneas equipotenciales son pues la familia de hipérbolas de ecuación: $xy = k$

Los ejes de esta familia son $y = 0,\ \ x = 0$.

9 Dado $\mathbf{F}(x,y) = (xy^2, x^2y)$, escribe el código Matlab para dibujar 20x20 vectores del campo $\mathbf{F}(x,y)$ en puntos del rectángulo [-3,4]x[-4,5], junto con una muestra de 10 líneas de flujo de ecuación $x^2 - y^2 = C$ y una muestra de 15 líneas equipotenciales.

Solución

Líneas de flujo: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2y}{xy^2} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow y^2 - x^2 = C$

Función potencial: $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{2} + C$

```
x=linspace(-3,4,20);
y=linspace(-4,5,20);[X,Y]=meshgrid(x,y);M=X.*Y.^2;N=X.^2.*Y;
quiver(X,Y,M,N)
hold on
x1=linspace(-3,4); y1=linspace(-4,5);
[X1,Y1]=meshgrid(x1,y1);
Z1=X1.^2.*Y1.^2;%líneas equipotenciales
contour(X1,Y1,Z1,20)
Z1=Y1.^2-X1.^2/2;%líneas de flujo
contour(X1,Y1,Z1,20)
axis equal
hold off
```

DIFERENCIAL DE ARCO. LONGITUDES DE CURVAS

10 Hallar con Matlab la longitud de la curva que viene dada por las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$x(t) = 2\cos^2(t)$$
$$y(t) = 2\sin^2(t) \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Solución

La expresión para calcular la longitud es

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Para calcular la integral con Matlab se deberá escribir

```
syms t
%Para calcular la longitud
dxt=diff(2*cos(t)^2)
dyt=diff(2*sin(t)^2)
longitud=int(sqrt(dxt^2+dyt^2),0,pi/2)
%Para representar la curva
fplot(2*cos(t)^2,2*sin(t)^2,[0 pi/2])
```

11 (a) Dada la curva $r = 4 + 2\sec(\theta)$ con $\theta \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$, se pide calcular con Matlab su longitud.

(b) Utilizando integrales, calcular la longitud de la curva $r = 3\cos\theta$ con $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Solución (a)

La expresión para calcular la longitud es

$$L = \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\, d\theta$$

Para calcular la integral con Matlab se deberá escribir

```
syms t
r=4+2*sec(t)
dr=diff(r)
longitud=double(int(sqrt(r^2+dr^2),2*pi/3,4*pi/3))
```

```
%Solución: 5.8128
```

Solución (b)

La longitud

$$L=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{9\cos^2\theta+9sen^2\theta}d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}3\ d\theta=\frac{3\pi}{2}$$

12 Hallar la longitud del arco de la siguiente curva $x=3t,\ y=3t^2\ ,\ z=2t^3$ entre los puntos (0,0,0) y (3,3,2).

Solución

La longitud de la curva es $L=\int_{t_o}^{t_1}\left|\mathrm{r}'(t)\right|dt$ siendo $\mathrm{r}(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ con $t\in\left[t_o,\ t_1\right]$. En este caso

$$\mathrm{r}(t)=\left(3t,3t^2,2t^3\right)\qquad t\in[0,1]\qquad ya\ que\ \mathrm{r}(0)=(0,0,0)\qquad \mathrm{r}(1)=(3,3,2)$$

$$\mathrm{r}'(t)=\left(3,\ 6t,\ 6t^2\right)\qquad \left|\mathrm{r}'(t)\right|=\sqrt{9+36t^2+36t^4}=3\sqrt{1+4t^2+4t^4}=3\left(1+2t^2\right)$$

$$L=\int_0^1\left|\mathrm{r}'(t)\right|dt=\int_0^1 3\left(1+2t^2\right)dt=5$$

13 Dada la curva $\left.\begin{array}{l}x(t)=3\cos^3(t)\\ y(t)=3\,\mathrm{sen}^3(t)\end{array}\right\}\quad t\in[0,1]$

se pide escribir las órdenes Matlab para:

a) Representar la curva

b) Calcular su longitud

Solución a)

```
t=0:0.1:1;
x=3*cos(t).^3;  y=3*sin(t).^3;  plot(x,y)
```

Solución b)

```
syms u
xu=3*cos(u)^3;yu=3*sin(u)^3;
xd=diff(xu);yd=diff(yu);
ds=sqrt(xd^2+yd^2);
longitud=int(ds,u,0,1)
double(longitud)
```

E_01

Calcula la longitud de las curva C definida como

$$x(t) = (1 - sen(t))\cos(t)$$
$$y(t) = (1 - sen(t))sen(t) \qquad t \in [0, \pi / 4]$$

utilizando esta parametrización y coordenadas polares.

Solución

La longitud de una curva en paramétricas se obtiene

$$long(C) = \int_0^{\pi/4} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

La curva polar, a partir de la ecuación paramétrica, es

$$\left.\begin{array}{ll} x(t) = r(t)\cos(t) & t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ y(t) = r(t)sen(t) & \end{array}\right\} \Rightarrow r(t) = 1 - \operatorname{sen}(t) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

La longitud se calculará de la forma siguiente

$$long(C) = \int_0^{\pi/4} \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}\, dt$$

```
syms t
%Curva paramétrica
x=(1-sin(t))*cos(t);
y=(1-sin(t))*sin(t);
I=int(sqrt(diff(x)^2+diff(y)^2),t,0,pi/4)
%Curva polar
r=1-sin(t);
int(sqrt(r^2+(cos(t))^2),0,pi/4)
double(I)
```

$$-\frac{4\left(\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{2} + 1\right)}{\sqrt{2} - 2} \approx 0.867091005298957$$

E_02

Calcula la longitud de las curva C definida como $r = e^{2\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$ utilizando coordenadas polares y considerando una parametrización de C.

Solución

La longitud de una curva polar, $r = f(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$ se calcula de la forma siguiente

$$long(C) = \int_0^{\pi} \sqrt{\left[r(\theta)\right]^2 + \left[r'(\theta)\right]^2}\, d\theta$$

en este caso $r(\theta) = e^{2\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$.

En paramétricas, a partir de la ecuación polar de la curva, la longitud será

$$\left.\begin{array}{ll} x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta) & \theta \in [0,\pi] \\ y(\theta) = r(\theta)sen(\theta) & \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} x(\theta) = e^{2\theta}\cos(\theta) & \theta \in [0,\pi] \\ y(\theta) = e^{2\theta}sen(\theta) & \end{array}\right\}$$

$$long(C) = \int_0^{\pi} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\, d\theta$$

```
syms t
%Curva polar
int(sqrt(exp(2*t)^2+(2*exp(2*t))^2),0,pi)
%Curva en paramétricas
x=exp(2*t)*cos(t);
y=exp(2*t)*sin(t);
int(sqrt(diff(x)^2+diff(y)^2),t,0,pi)
```

$$\frac{\sqrt{5}\left(e^{2\pi} - 1\right)}{2} \approx 5.975798375798875e + 02$$

INTEGRAL DE LÍNEA DE UN CAMPO ESCALAR

14 La base de una valla circular de radio 10 metros viene dada por las ecuaciones

$$x(t) = 10\cos t \quad , \quad y(t) = 10\text{sen}\, t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

La altura de la valla viene dada por la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$. Se pide:

a) Representar la valla con Matlab.

b) Suponiendo que un litro de pintura permite cubrir 5 metros cuadradros de valla, determinar cuántos litros de pintura se necesitan para pintar toda la valla. Realizar los cálculos sin Matlab.

Solución a)

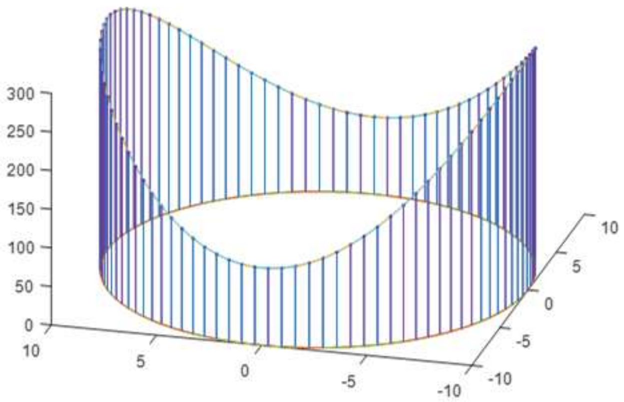
stem3(vectorx,vectory,vectorz)

Dibuja líneas sobre los puntos del plano dados por (`vectorx,vectory`) de altura vectorz.

```
X = linspace(-5,5,60);
Y = cos(X);
Z = X.^2;
stem3(X,Y,Z)
```

Para resolver el ejercicio, el código Matlab es

```
t=linspace(0,2*pi);
xt=10*cos(t);yt=10*sin(t);
hold on
stem3(xt,yt,xt.^2+3*yt.^2,'.')
plot3(xt,yt,0*xt)
plot3(xt,yt,xt.^2+3*yt.^2)
hold off
```



Solución b)

$$ds = \sqrt{\left(-10sent\right)^2 + \left(10\cos t\right)^2}\,dt = \sqrt{100}\,dt = 10t$$

$$A = \int_C f ds = \int_0^{2\pi} \left(100\cos^2 t + 2\cdot 100 sen^2 t\right) 10\,dt =$$

$$= 2000\pi + 500\int_0^{2\pi}\left(1-\cos\left(2t\right)\right)dt = 3000\pi \ \ m^2$$

Si con un litro se pueden pintar 5 metros cuadrados, se necesitarán 600π litros.

15 Sea C la curva

$$\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right) = \left(t^2, 2t, t\right) \text{ para } 0 \le t \le 1$$

se pide realizar con Matlab

a) La representación de la curva C
b) El cálculo del área de la cortina vertical que está apoyada sobre el plano z=0 y cuya altura es la curva. Hacer el cálculo de la integral también a mano y comprobar el resultado.

Solución

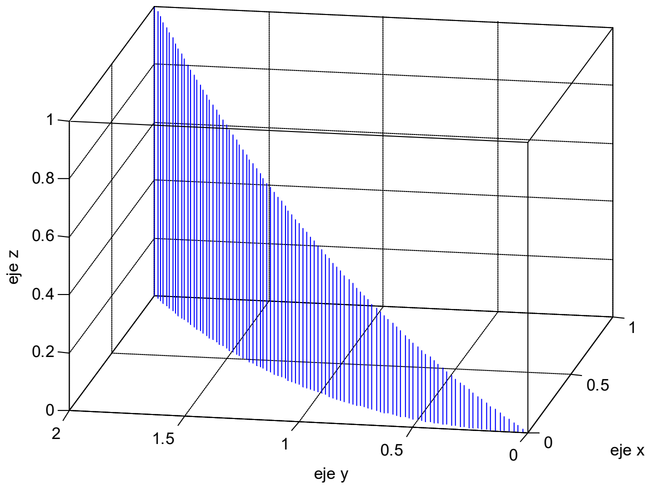
Para representar la curva C basta escribir

```
t=0:0.1:1;
plot3(t.^2,2*t,t)
```

```
grid on
```

El área de la cortina vertical pedida es

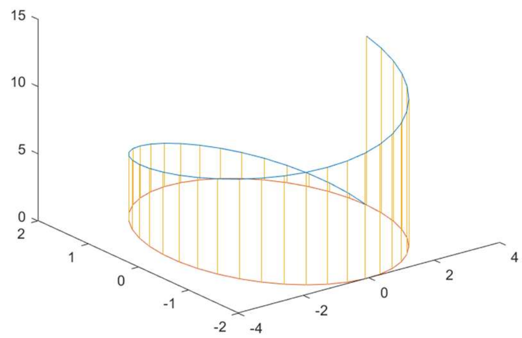
```
syms u
int(u*sqrt(4*u^2+4),u,0,1)
```



16 Representar una vuelta de la hélice C de ecuaciones $\left(3\cos t, 3sent, 2t\right)$ con Matlab**.** Obtener también el área de la valla que se apoya sobre la circunferencia de centro 0 y radio 3 y en cada punto su altura viene dada por la tercera componente de la hélice.

Solución

```
linspace(0,2*pi,40);
plot3(3*cos(t),2*sin(t),2*t)
hold on
%Si se quiere representar las líneas
plot(3*cos(t),2*sin(t))
stem3(3*cos(t),2*sin(t),2*t,'marker','none')
hold off
```



El área de la valla se calcula con la siguiente integral de línea

$$\acute{a}rea=\int_0^{2\pi} z(t)\,ds=\int_0^{2\pi} z(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi} 2t\sqrt{9\cos^2 t+9sen^2 t}dt=12\pi^2$$

El código Matlab es

```
syms t
z=2*t;
dx=-3*sin(t);dy=3*cos(t);dz=2;
area=int(2*t*sqrt(dx^2+dy^2),t,0,2*pi)
```

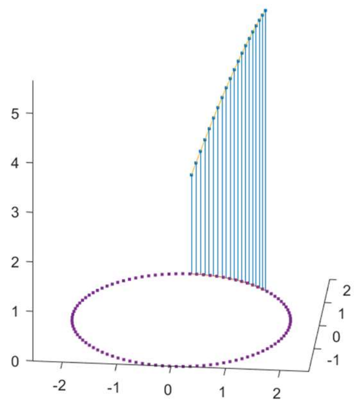
17 Calcular el área de una valla que se proyecta sobre la circunferencia centrada en el origen de radio 2 desde el punto $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ hasta el punto $\left(0,2\right)$ siendo la altura en cada punto $f\left(x,y\right)=3x+y$.

Solución

Sobre cada punto del arco de la circunferencia de centro 0 y radio 2 para los valores de t entre $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{2}$ se considera la valla que tiene en cada punto el valor de la función $f\left(x,y\right)=3x+y$.

La curva sobre la que se apoya la valla es la siguiente

$$C_1:\vec{r}\left(t\right)=\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)=\left(2\cos\left(t\right),2\sin\left(t\right)\right) \qquad \frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{2}$$



El área de la valla se calcula mediante la siguiente integral de línea

$$\int_{C_1} f\left(x,y\right)ds=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)\sqrt{x'\left(t\right)^2+y'\left(t\right)^2}\,dt$$

$$\int_{C_1} (3x+y)\,ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[3\cdot 2\cos(t) + 2sen(t)\right]\sqrt{\left(-2\sin(t)\right)^2 + \left(2\cos(t)\right)^2}\,dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[6\cos(t) + 2sen(t)\right]\sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)}\,dt =$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(6\cos(t) + 2sen(t)\right)dt = 2\left(6sen(t) - 2\cos(t)\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{12 - 4\sqrt{2}}$$

18 Estudiar Dado $\mathbf{F}(x,y) = \left(\dfrac{x^3}{3}, xy^2\right)$, escribe el código Matlab para calcular la integral de $\operatorname{div}\mathbf{F}$ a lo largo de la curva que une los puntos (1,1) y el (4,7).

Solución

El campo a escalar es: $\operatorname{div}\mathbf{F} = x^2 + 2xy$

El segmento que une los puntos (1,1) y (4,7) es

$$\begin{array}{l} x(t) = 1 + 3t \\ y(t) = 1 + 6t \end{array} \quad t \in [0,1]$$

Se tendrá que

$$I = \int_C \left(x^2 + 2xy\right)ds = \int_0^1 \left(\left(1+3t\right)^2 + 2\left(1+3t\right)\left(1+6t\right)\right)\sqrt{9+36}dt = 90\sqrt{5}$$

19 Considerar la curva C delimitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ recorrida en sentido positivo. Calcular el área de la valla que tiene por base el tramo de la curva C de ecuación $y = x^2$ con $0.5 \le x \le 1$ y su altura viene dada por $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$.

Solución

$$área = \int_C f(x,y)\,d\mathbf{r} = \int_{0.5}^{1} f\left(x(t), y(t)\right)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt =$$

$$= \int_{0.5}^{1} \frac{t^2}{t}\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{1}{8}\,\frac{\left[\left(1+4t^2\right)^{3/2}\right]_{t=1/2}^{1}}{3/2} = \frac{5^{3/2} - 2^{3/2}}{12}$$

INTEGRAL DE LÍNEA DE UN CAMPO VECTORIAL

20 Obtener la integral $I = \int_{AB} (1-2y)dx + 2xdy$, a lo largo de las trayectorias siguientes, desde el punto A(1,0) hasta el punto B(0,2), parametrizando en cada caso la curva:

a) el arco de la elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

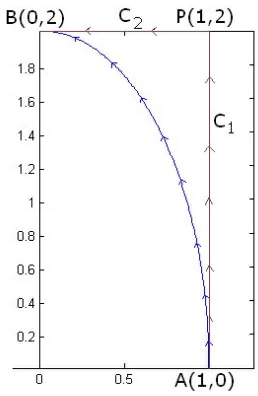
b) la línea poligonal que tiene por vértices los puntos (1,0), (1,2) y (0,2).

Solución

El arco de elipse de semiejes 1 y 2, en el primer cuadrante, se parametriza así,

$$C \equiv \left\{ \begin{array}{lll} x = \cos t & \rightarrow & dx = -\operatorname{sen} t dt \\ y = 2 \operatorname{sen} t & \rightarrow & dy = 2 \cos t dt \end{array} \right\}$$

$$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$



$$I = \int_0^{\pi/2} \left(1 - 4 \operatorname{sen} t\right)\left(-\operatorname{sen} t dt\right) + 4\cos^2 t \, dt = \int_0^{\pi/2} \left(-\operatorname{sen} t + 4\right) dt = \left[\cos t + 4t\right]_0^{\pi/2} = 2\pi - 1$$

La línea poligonal es una curva suave a trozos que se considera la unión de dos segmentos rectilíneos suaves, $C = C_1 \cup C_2$, que se parametrizan por separado,

$$C_1 = \overline{AP} \equiv \left\{ \begin{array}{ll} x = 1 \rightarrow & dx = 0 \\ y = t \rightarrow & dy = dt \end{array} \right\} \quad 0 \le t \le 2;$$

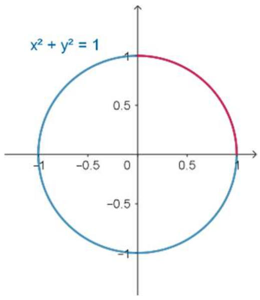
$$C_2 = \overline{PB} \equiv \left\{ \begin{array}{ll} x = -t \rightarrow & dx = -dt \\ y = 2 \rightarrow & dy = 0 \end{array} \right\} \quad -1 \le t \le 0$$

$$I = \int_{C_1} (1-2y)dx + 2xdy + \int_{C_2} (1-2y)dx + 2xdy = \int_0^2 2dt + \int_{-1}^0 3dt = 7$$

21 Sobre una partícula en el plano se aplica un campo de fuerza dado por $\mathbf{F}\left(x,y\right) = \left(x - y, x\right)$. La trayectoria de dicha partícula se describe por el arco C en el primer cuadrante de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ siguiendo el sentido contrario de las agujas del reloj. Determinar el trabajo que ejerce el campo de fuerzas sobre la partícula a través de la trayectoria descrita.

Solución b)

La curva es el arco de circunferencia representado en rojo en la siguiente imagen.



$$\mathbf{r}(t) = (\cos(t), sen(t)) \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Como

$$\mathbf{F}(r(t)) \cdot \mathbf{r'}(t) = (\cos(t) - sen(t), \cos(t)) \cdot (-sen(t), \cos(t)) = -\cos(t)sen(t) + 1$$

La integral a calcular es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(r(t)) \cdot \mathbf{r'}(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \left[-\cos(t)sen(t) + 1\right]dt = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}$$

CAMPOS CONSERVATIVOS. FUNCIÓN POTENCIAL

22 Encuentra el campo vectorial conservativo que tiene por función potencial $f(x,y) = 5x^2 + 3xy + 10y^2$

Solución

El campo es el gradiente de f, es decir, $F = \nabla f(x,y) = (10x + 3y)\mathbf{i} + (3x + 20y)\mathbf{j}$

23 Dada la curva $C \equiv \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = 2\sin(t) \end{cases}$ $\quad t \in [0, \pi/2]$, escribir el código Matlab para

a) Representar el alambre que tiene la forma de la curva C .

b) Calcular su longitud .

c) Calcular el área de la cortina vertical que tiene en cada punto de C la altura $f(x,y) = x\,e^y$.

d) Calcular el trabajo realizado por el campo $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ sobre la curva.

Solución a)

```
t=linspace(0,pi/2,30);
x=cos(t); y=2*sin(t); plot(x,y)
```

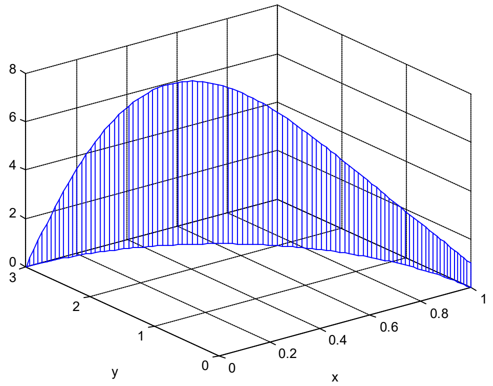
Solución b)

Longitud $L = \int_C ds$ donde $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$

```
syms u
dx=diff(cos(u)); dy=diff(3*sin(u));
ds=simplify(sqrt(dx^2+dy^2)); L=int(ds,u,0,pi/2)
```

Solución c)

Área de la valla $\acute{a}rea = \int_C f(x,y)ds$




```
f=cos(u)*exp(2*sin(u))
area=int(f*ds,u,0,pi/2)
double(area)
```

Solución d)

Como el campo es conservativo, el trabajo se calculará $w = \int_C F \bullet\, dr = f\left(B\right) - f\left(A\right)$ siendo

$\nabla f = F$, es decir, $f\left(x,y\right) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$

24 Estudiar si los campos vectoriales siguientes son o no conservativos, obteniendo, cuando exista, la función potencial correspondiente:

a) a) $\mathbf{E}(x,y) = (e^x y^2 + 3x^2 y)\mathbf{i} + (2y e^x + x^3)\mathbf{j}$

b) b) $\mathbf{E}(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2}\mathbf{i} - \dfrac{2y}{x}\mathbf{j}$

c) c) $\mathbf{E}(x,y,z) = 2xyz\mathbf{i} + (x^2 z + 2y e^z)\mathbf{j} + (x^2 y + y^2 e^z)\mathbf{k}$

Solución a)

Las componentes del campo vectorial $\mathbf{E}(x,y)$ son funciones continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas (son funciones de clase C^1) en todo $\mathbb{R}^2$. En consecuencia, se verifica

$$\mathbf{E}(x,y) \text{ conservativo } \Leftrightarrow \quad \operatorname{rot}\left(\mathbf{E}\right) = \mathbf{0}$$

calculamos el rotacional de $\mathbf{E}$

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E}\right) = \nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^x y^2 + 3x^2 y & 2ye^x + x^3 & 0 \end{vmatrix} = \left(2ye^x + 3x^2 - 2ye^x - 3x^2\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Luego el campo $\mathbf{E}(x,y)$ es conservativo $\forall\left(x,y\right) \in \mathbb{R}^2$. Para hallar la función potencial $f(x,y)$, tendremos en cuenta que verifica $\operatorname{grad} f(x,y) = \mathbf{E}(x,y)$, es decir

$$\left\{\begin{matrix} 1) & \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x y^2 + 3x^2 y \\ 2) & \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2ye^x + x^3 \end{matrix}\right\}$$, integrando la ecuación 1) respecto de x, resulta

$$f\left(x,y\right) = \int \left(e^x y^2 + 3x^2 y\right) \cdot dx = e^x y^2 + x^3 y + g\left(y\right)$$

derivamos respecto de y la expresión anterior y aplicamos la ecuación 2),

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y} = 2e^x y + x^3 + g'\left(y\right) = 2e^x y + x^3 \quad \Rightarrow \quad g'\left(y\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad g\left(y\right) = C$$

Luego $f\left(x,y\right) = e^x y^2 + x^3 y + C$

Solución b)

El campo $\mathbf{E}(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2}\mathbf{i} - \dfrac{2y}{x}\mathbf{j}$ es de clase C[1] en $\mathbb{R}^2 - \left\{x = 0\right\}$, debido a que las componentes del campo vectorial no están definidas cuando el denominador vale 0.

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E}\right) = \nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{-2y}{x} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{2y}{x^2} - \frac{2y}{x^2}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

luego $\mathbf{E}$ es conservativo en $\mathbb{R}^2 - \left\{x = 0\right\}$. La función potencial verifica

$$\left\{\begin{matrix} 1) & \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{x^2} \\ 2) & \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2y}{x} \end{matrix}\right\}$$, integrando la ecuación 2) respecto de y, resulta

$$f\left(x,y\right) = \int -\frac{2y}{x}\,dy = -\frac{y^2}{x} + g\left(x\right)$$

sustituyendo esta función en la ecuación 1) se obtiene

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}=\frac{y^2}{x^2}+g'\left(x\right)=\frac{y^2}{x^2}\quad\Rightarrow\quad g'\left(x\right)=0\quad\Rightarrow\quad g\left(x\right)=C\quad,$$

Luego la función potencial será $f\left(x,y\right)=-\dfrac{y^2}{x}+C$, válida $\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2-\left\{x=0\right\}$

Solución c)

En este caso, el campo $\mathbf{E}(x,y,z)$ es de clase C[1] en todo $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{rot}\left(\mathbf{E}\right)=\nabla\times\mathbf{E}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xyz & x^2z+2ye^z & x^2y+y^2e^z\end{vmatrix}=\left(x^2+2ye^z-x^2-2ye^z\right)\mathbf{i}+$$

$$+\left(2xy-2xy\right)\mathbf{j}+\left(2xz-2xz\right)\mathbf{k}=\mathbf{0}$$

El campo es conservativo. La función potencial $f(x,y,z)$ verifica

$$\left\{\begin{array}{ll}1) & \dfrac{\partial f}{\partial x}=2xyz\\ 2) & \dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2z+2ye^z\\ 3) & \dfrac{\partial f}{\partial z}=x^2y+y^2e^z\end{array}\right\}$$

, integrando la ecuación 1) respecto de x, queda

$$f\left(x,y,z\right)=\int 2xyz\,dx=x^2yz+h\left(y,z\right)$$

sustituyendo en la ecuación 2) se obtiene

$$\frac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial y}=x^2z+h_y'\left(y,z\right)=x^2z+2ye^z\quad\Rightarrow\quad h\left(y,z\right)=\int 2ye^z dy=y^2e^z+g\left(z\right)$$

Sustituyendo la última expresión de $f(x,y,z)$ en la ecuación 3) resulta

$$\frac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial z}=x^2y+y^2e^z+g'\left(z\right)=x^2y+y^2e^z\quad\Rightarrow\quad g'\left(z\right)=0\quad\Rightarrow\quad g\left(z\right)=C$$

La función potencial será $f\left(x,y,z\right)=x^2yz+y^2e^z+C$, válida $\forall\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3$

25 Encuentra $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}\left(x,y\right)=\left(ye^{xy}+\cos x\right)\mathbf{i}+\left(xe^{xy}+\dfrac{1}{y^2+1}\right)\mathbf{j}$ y C es la porción de la curva $y=\mathrm{sen}x$ desde $x=0$ hasta $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Solución

Si consideramos

$$M\left(x,y\right)=ye^{xy}+\cos x\qquad N\left(x,y\right)=xe^{xy}+\frac{1}{y^2+1}$$

se cumple que $M'_y(x,y) = N'_x(x,y)$ ya que

$$M'_y(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} \qquad N'_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$$

Por lo tanto, el campo F es conservativo. Aplicando el teorema Fundamental de integrales de línea se tendrá

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f\left(\frac{\pi}{2}, sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - f(0,0)$$

donde f es la función potencial de F. Calculando la función potencial

$$f'_x(x,y) = ye^{xy} + \cos x \;\rightarrow\; \boxed{f(x,y) = e^{xy} + senx + h(y) \quad (1)}$$

$$f'_y(x,y) = xe^{xy} + \frac{1}{y^2+1} \underset{(1)}{=} xe^{xy} + h'(y) \rightarrow h'(y) = \frac{1}{y^2+1} \rightarrow \boxed{h(y) = arctg(y) + C}$$

Por lo tanto, una función potencial es

$$\boxed{f(x,y) = e^{xy} + senx + arctg(y)}$$

y el valor de la integral pedida es

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f\left(\frac{\pi}{2},1\right) - f(0,0) = e^{\pi/2} + 1 + \operatorname{ar}ctg(1) - 1 - 0 - arctg(0) = e^{\pi/2} + \frac{\pi}{4}$$

26 Sea $\mathrm{F}(x,y,z) = \left(z^3 + 2xy,\ x^2,\ 3xz^2\right)$, calcular $\int_C \mathbf{F}\, d\mathbf{r}$ siendo C el perímetro de cualquier cuadrado con un vértice en el origen y de lado 1.

Solución

Llamando $\qquad P(x,y,z) = z^3 + 2xy \qquad Q(x,y,z) = x^2 \qquad R(x,y,z) = 3xz^2$

se verifica que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 3z^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 0$$

Luego $rot\ \mathbf{F} = 0$ y el campo es conservativo, por lo tanto, la integral es 0 al ser cerrada la trayectoria.

27 Se considera el campo de fuerzas

$$\mathrm{F}(x,y,z) = 4xe^z\mathrm{i} + \cos y\,\mathrm{j} + \left(2x^2e^z + z\right)\mathrm{k}$$

Calcular el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ para desplazar una partícula de masa unidad desde el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ al punto $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$ siguiendo el camino más corto sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2}$.

Solución

Como $rot\,\mathrm{F}(x,y,z) = \mathbf{0}$ se tendrá que $\mathbf{F}$ un campo gradiente.

$$rot\,\mathrm{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4xe^z & \cos y & 2x^2e^z + z \end{vmatrix} = 0$$

La función *f* cuyo gradiente es $\mathbf{F}$ debe cumplir las condiciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} (1) & f'_x = 4xe^z \\ (2) & f'_y = \cos y \\ (3) & f'_z = 2x^2e^z + z \end{array}$$

Integrando la condición (1) tenemos:

$$f(x,y,z) = \int 4xe^z dx = 2x^2e^z + g(y,z)$$

Derivando ahora con respecto a *y* e introduciendo el resultado en la igualdad (2) tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = \cos y \qquad \Rightarrow \qquad g(y,z) = \operatorname{sen} y + h(z)$$

Se tendrá entonces que *f*,

$$f(x,y,z) = 2x^2e^z + \operatorname{sen} y + h(z)$$

y derivarlo con respecto a *z* e introducir el resultado en (3):

$$f'_z = 2x^2e^z + h'(z) = 2x^2e^z + z \Rightarrow \qquad h(z) = \tfrac{1}{2}z^2 + C$$

Por lo tanto,

$$f(x,y,z) = 2x^2e^z + \operatorname{sen} y + \tfrac{1}{2}z^2 + C$$

Por el teorema fundamental de las integrales de línea, el trabajo será la diferencia de valores de la función potencial en sus extremos final e inicial:

$$W = f\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) - f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$W = \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2} - e^{\sqrt{2}/2} - \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} \approx -2.166$$

28 Dado $\mathbf{F}(x,y) = (xy^2, x^2y)$, escribe el código Matlab para calcular, utilizando la definición, la integral del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y)$ a lo largo de la curva C de ecuación $x^2 + y^2 = 4,\ (y \geq 0)$, recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj desde (2,0) a (-2,0). Comprobar el resultado utilizando el Teorema Fundamental de Integrales de Línea.

Solución

Una parametrización de la curva C es

$$x(t) = 2\cos(t)\ ,\ \ y(t) = 2\sin(t) \qquad t \in [0,\pi]$$

Se tiene que

$$dx = x'(t)dt = 2\cos(t)dt \qquad ,\ \ dy = y'(t)dt = 2\sin(t)dt$$

$$I = \int_C xy^2dx + x^2ydt =$$

$$= \int_0^\pi -2\cos(t)(2\sin(t))^2\, 2\sin(t)dt + \int_0^\pi (2\cos t)^2 (2\sin(t))2\cos(t)dt =$$

$$= \int_0^\pi -16\cos(t)\sin^3(t)dt + \int_0^\pi 16\sin(t)2\cos^3(t)dt = 0$$

Utilizando el teorema fundamental, siendo f la función potencial se tendrá

$$I = f(-2,0) - f(2,0) = 0$$

29 Dados los puntos $A(0,\ 2,\ 0)$, $B(\sqrt{2},1,1)$ y la integral

$$I = \int_{\widehat{AB}} (yz + y - 1)dx + (xz + x)dy + (xy + 3z^2)dz$$

Se pide:

a) Estudiar si la integral I depende del camino recorrido.

b) Determinar la función potencial $f(x,y,z)$, si existe.

c) Determinar el valor de I entre los puntos A y B anteriores.

Solución a)

La funciones $M = yz + y - 1,\ \ N = xz + x,\ \ P = xy + 3z^2$ (son las componentes del campo vectorial $\mathbf{F}$) al igual que sus derivadas parciales primeras son continuas en todo $\mathbb{R}^3$ por ser polinomios. Para que la integral sea independiente del camino el campo vectorial ha de ser conservativo, es decir, su rotacional igual al vector $\mathbf{0}$.

$$\textbf{rot } \mathbf{F}(x,y,z) = \nabla \times \mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

en este caso:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = z + 1 = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0,$$

luego el rotacional es $\mathbf{0}$ por ser nulas cada una de sus componentes; por tanto, la integral no depende del camino recorrido sino solamente de los puntos inicial y final.

Solución b)

Por ser el rotacional nulo, existe función potencial y podemos escribir:

$$\begin{aligned} I &= \int_{AB} (yz + y - 1)dx + (xz + x)dy + (xy + 3z^2)dz \\ &= \int_{AB} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \int_{AB} df = f(B) - f(A) \end{aligned}$$

Identificando $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yz + y - 1$, integrando parcialmente con respecto a x (teniendo en cuenta que z e y son constantes):

$$f\left(x,y,z\right) = xyz + xy - x + \mathrm{h}\left(y,z\right)$$

imponiendo la condición

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz + x + h_y'(y,z) \quad \Rightarrow \quad h_y'(y,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad h(y,z) = g(z)$$

de momento tenemos $f\left(x,y,z\right) = xyz + xy - x + g\left(z\right)$; estableciendo la última condición

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy + 3z^2 = xy + g'(z) \Rightarrow g'(z) = 3z^2 \Rightarrow g(z) = z^3 + C$$

Por tanto,

$$f\left(x,y,z\right) = xyz + xy - x + z^3 + C$$

Solución c)

$$I = \int_{AB} (yz + y - 1)\,dx + (xz + x)dy + (xy + 3z^2)dz = f\left(B\right) - f\left(A\right) =$$

$$= f\left(\sqrt{2},1,1\right) - f\left(0,\ 2,\ 0\right) = \sqrt{2}+1$$

30 Dada la integral curvilínea $I = \int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$, se pide:

a) Determinar, si existe, la función potencial indicando los puntos en los que no es válida (puntos singulares).

b) Calcular I a lo largo de cualquier curva cerrada que <u>no rodee</u> al punto (0,0).

c) Determinar I a lo largo de cualquier curva cerrada que <u>rodee</u> al punto (0,0) recorrida en sentido positivo.

d) El valor de I a lo largo del segmento rectilíneo que une $A\left(2,0\right)$ con $B\left(0,1\right)$.

Solución a)

Si existe la función potencial $U\left(x,y\right)$, su diferencial igualará a la función subintegral, es decir,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = M\left(x,y\right)dx + N\left(x,y\right)dy$$

Para campos vectoriales en el plano, que sean de clase C^1, se verifica

$$\mathbf{E}(x,y) \text{ conservativo } \Leftrightarrow \quad \text{rot}\left(\mathbf{E}\right) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial M\left(x,y\right)}{\partial y} = \frac{\partial N\left(x,y\right)}{\partial x}$$

En este caso se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas, $\frac{\partial M\left(x,y\right)}{\partial y} = \frac{\partial N\left(x,y\right)}{\partial x}$, que, ya que ambas son iguales a $\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

El problema se plantea en el punto (0,0) ya que en él las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ no son continuas y hay que tener cuidado al usar la función potencial.

Determinemos ya la citada función potencial $U\left(x,y\right)$. Tenemos que

$$\frac{\partial U}{\partial x} \equiv M\left(x,y\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{y^2\left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]}$$

e integrando con respecto de x (considerando y como constante) se obtiene

$$U\left(x,y\right) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + f\left(y\right)$$

ya que la constante de integración será función de y, que hemos considerado constante en la integración. Por otra parte:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} + f'(y) \equiv N(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad f'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(y) = C$$

Luego

$$U(x,y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C$$

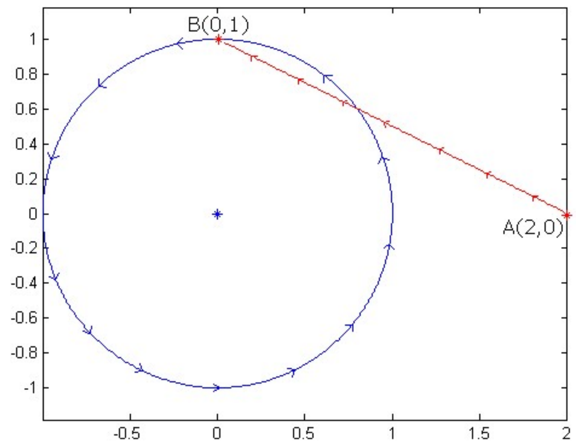
Solución b)

Se puede aplicar la función potencial ya que el conjunto conexo correspondiente a la curva considerada no incluye el origen (0,0), y como al ser cerrada coinciden los puntos inicial y final, la integral a lo largo de cualquier curva cerrada que no rodee al origen es nula, esto es $I = 0$.

Solución c)

Para este caso no se puede aplicar la función potencial ya que el conjunto conexo correspondiente a la curva considerada sí incluye el origen (0,0), pero por existir función potencial, la integral a lo largo de cualquier curva cerrada que rodee al origen será independiente del tipo de curva que se trate (aplicación del Teorema de Green generalizado). Así, tomando por comodidad la circunferencia de centro el origen y radio unidad que se muestra en la figura, si hacemos el cambio

$$\begin{cases} x = \cos t & \rightarrow & dx = -\operatorname{sen} t\, dt \\ y = \operatorname{sen} t & \rightarrow & dy = \cos t\, dt \end{cases}$$



al sustituir en la función subintegral,

$$\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = dt$$

la integral curvilínea se convierte en la integral de la función unidad. Es decir,

$$I = \int_0^{2\pi} dt = \left[t\right]_0^{2\pi} \quad \Rightarrow \quad I = 2\pi$$

d) En este caso se puede aplicar la función potencial ya que el conjunto conexo correspondiente al arco AB no incluye el origen (0,0); por tanto:

$$\int_{AB} dU(x,y) = U_B - U_A = U(0,1) - U(2,0) = \left[-\operatorname{arctg}\frac{0^+}{1} + C\right] - \left[-\operatorname{arctg}\frac{2}{0^+} + C\right] = -0 + \frac{\pi}{2}$$

luego $I = \dfrac{\pi}{2}$.

31 Evaluar la integral $\displaystyle\int_{AB} yzdx + xzdy + xydz$, a lo largo de la circunferencia intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con el plano $y + z = a$, desde el punto $A\left(0, \mathrm{a}, 0\right)$ hasta el punto $B\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$, recorrida en sentido antihorario.

Solución

El campo vectorial $\mathbf{E}(x,y,z) = y\,z\mathbf{i} + x\,z\mathbf{j} + x\,y\mathbf{k}$ que se integra es conservativo, pues verifica $\mathrm{rot}\left(\mathbf{E}\right) = \mathbf{0}$. La función potencial es $f\left(x,y,z\right) = x\,y\,z + C$, válida $\forall\left(x,y,z\right) \in \mathbb{R}^3$. En virtud del Teorema Fundamental de las Integrales Curvilíneas, se verifica

$$\int_{AB} yzdx + xzdy + xydz = f\left(B\right) - f\left(A\right) = f\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) - f\left(0, \mathrm{a}, 0\right) = -\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$$

32 Sea el campo vectorial $\mathbf{E}(x,y) = \dfrac{1}{y}\mathbf{i} - \dfrac{x}{y^2}\mathbf{j}$. Estudiar si $\mathbf{E}(x,y)$ es conservativo, indicando el campo de validez de la función potencial, si existe. Calcular el trabajo realizado por dicho campo para trasladar una partícula a lo largo de las siguientes curvas:

- C_1, la curva cerrada de ecuación $x^2 + (y-2)^2 = 1$, recorrida en sentido antihorario.
- C_2, el triángulo de vértices A(0,-1), B(0,-2) y C(1,-1), recorrido en sentido antihorario.
- C_3, el arco de la parábola $y = x^2 + 1$, desde el punto A(0,1) hasta el punto B(2,5).
- C_4, el segmento rectilíneo que va desde el punto A(0,1) hasta el punto B(2,5).

Solución:

El campo vectorial $\mathbf{E}(x,y) = \dfrac{1}{y}\mathbf{i} - \dfrac{x}{y^2}\mathbf{j}$ no está definido para $y = 0$, es decir sobre los puntos del eje OX, ya que en sus componentes se plantearía división por cero. El campo es de clase C1 $\forall\left(x,y\right) \in \mathbb{R}^2 - \left\{y = 0\right\}$. Probamos si cumple la condición necesaria para que sea conservativo, es decir la igualdad de las derivadas parciales primeras para que el rotacional sea nulo,

$$\left.\begin{array}{l} M\left(x,y\right) = \dfrac{1}{y} \\ N\left(x,y\right) = -\dfrac{x}{y^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\dfrac{1}{y^2} \\ \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{1}{y^2} \end{array}\right\}$$

son iguales, luego $\mathbf{E}(x,y)$ es conservativo $\forall\left(x,y\right) \in \mathbb{R}^2 - \left\{y = 0\right\}$. Hallamos la función potencial $f\left(x,y\right)$, que verifica

$$\left.\begin{cases} 1) & \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{y} \\ 2) & \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} \end{cases}\right\}$$

integrando la ecuación 1) respecto de x, resulta

$$f(x,y) = \int \frac{1}{y}\,dx = \frac{x}{y} + g(y)$$

sustituyendo esta función en la ecuación 2) se obtiene

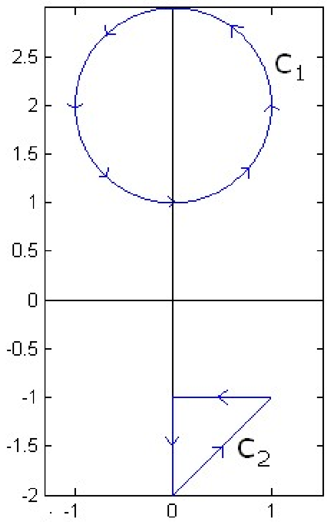
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + g'(y) = -\frac{x}{y^2} \quad \Rightarrow \quad g'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(y) = C \quad ,$$

Luego la función potencial será $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + C$, válida $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{y = 0\}$

El Teorema Fundamental de las Integrales de Línea garantiza que el trabajo realizado por el campo vectorial $\mathbf{E}(x,y)$ a lo largo de cualquier curva cerrada en un conjunto simplemente conexo donde el campo sea conservativo, es nulo.

En consecuencia, como las curvas C_1 y C_2 son cerradas y no tocan al eje y = 0, se verifica

$$Trabajo = \oint_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$



Código Matlab:

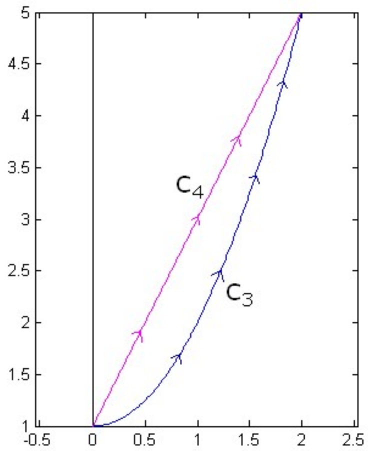
```
t=0:0.01:2*pi;
x=cos(t);y=2+sin(t);
plot(x,y); axis equal
hold on
x=0:0.01:1;y1=-2+x;y2=-
1*ones(size(x));
plot(x,y1,x,y2)
y=-2:0.01:-1;x=0*ones(size(y));
plot(x,y)
```

Las curvas C_3 y C_4 son abiertas. Ambas pueden incluirse dentro de un conjunto simplemente conexo donde el campo $\mathbf{E}(x,y)$ es conservativo; luego, aplicando el Teorema Fundamental de las Integrales Curvilíneas, el trabajo no depende del camino recorrido para ir del punto $A(0,1)$ al punto $B(2,5)$, solo depende de la función potencial en los puntos inicial y final

$$Trabajo = \int_{C_3} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_4} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = f\left(B\right) - f\left(A\right) =$$
$$= f\left(2,5\right) - f\left(0,1\right) = \frac{2}{5}$$

Código Matlab:

```
x=0:0.01:2;y1=x.^2+1;y2=1+2*x;
plot(x,y1,'b',x,y2,'m')
axis equal
```



33 Calcular el trabajo realizado por el campo vectorial $\mathrm{F}\left(x,y\right) = \left(2x\cos y, -x^2 seny\right)$ sobre la poligonal que une A(2,1) con B(6,3) y luego con C(3,4).

Solución

El campo $\mathrm{F}\left(x,y\right) = \left(2x\cos y, -x^2 seny\right)$ es conservativo ya que

$$M\left(x,y\right) = 2x\cos y \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = -2xseny}$$
$$=$$
$$N\left(x,y\right) = -x^2 seny \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial N}{\partial x} = -2xseny}$$

La función potencial es

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos y \quad \rightarrow \quad f\left(x,y\right) = x^2\cos y + h\left(y\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 seny \quad \rightarrow \quad -x^2 seny = -x^2 seny + h'\left(y\right) \rightarrow h'\left(y\right) = 0 \rightarrow h\left(y\right) = A$$

Por lo tanto, $\boxed{f\left(x,y\right) = x^2\cos y + A}$

Aplicando el teorema fundamental se tiene que:

$$\int_C \mathrm{F}\cdot d\mathrm{r} = f\left(C\right) - f\left(A\right) = f\left(3,4\right) - f\left(2,1\right) = 9\cos 4 - 4\cos 1$$

34 Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}\left(x,y,z\right) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

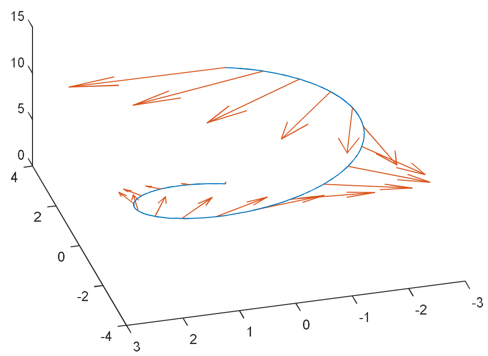
y la curva $x\left(t\right) = 2\cos t$, $y\left(t\right) = 2sent$, $z\left(t\right) = 2t$, $t \in \left[0, 2\pi\right]$. Escribe el **código Matlab** para:

a) Dibujar la curva.
b) Representar, junto con la curva anterior, una muestra de 20 vectores del campo vectorial sobre la curva.

c) Calcular la longitud de la curva y la integral de la divergencia del campo sobre la curva.

Solución

```
% Representación del campo
t1=linspace(0,2*pi,20);
x=2*cos(t1);y=2*sin(t1);z=2*t1;
u1=y.*z;v1=x.*z;w1=1+0*u1;
quiver3(x,y,z,u1,v1,w1)
% Cálculo de la longitud
syms tt
%ds=sqrt((-2*sin(tt))^2+(2*cos(tt))^2+2^2)
ds=2*sqrt(2);
longitud=int(ds,tt,0,2*pi)
% Cálculo de la integral de la divergencia
diver=0    % La integral es 0
```



35

¿Se puede aplicar el teorema fundamental de integrales de línea para calcular el trabajo de $\mathbf{F} = \left(xy^2, yz^2, zx^2\right)$ a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = \left(t, 2t+2, t-1\right)$ desde $\mathbf{r}\left(0\right)$ a $\mathbf{r}\left(1\right)$? Justifica la respuesta

Solución

Para ver si se puede aplicar el teorema fundamental, veamos en primer lugar si el campo es conservativo en un dominio que contenga a la curva C, ya que

$$\mathbf{rot\,F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & yz^2 & zx^2 \end{vmatrix} = \left(-2yz, -2xz, -2xy\right) \neq \left(0,0,0\right)$$

E_01

Calcular la integral curvilínea $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ siendo $\mathbf{F}(x,y,z)=(yz,xz,xy)$ lo largo de la hélice C de ecuaciones $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\operatorname{sen} t \\ z=t \end{cases}$ cuando t varía entre 0 y 2π.

Solución

El campo es conservativo ya que el $rot\,\mathbf{F}=\mathbf{0}$. La función potencial $f(x,y,z)$ es

$$f'_x = yz \to f(x,y,z) = xyz + h(y,z)$$
$$f'_y = xz \to xz = xz + h'_y(y,z) \to h'_y(y,z) = 0 \to h(y,z) = g(z)$$

Por lo tanto, $f(x,y,z) = xyz + g(z)$

$$f'_z = yx \to yx = yx + g'(z) \to g'(z) = 0 \to g(z) = C \in \mathbb{R}$$

Luego, $f(x,y,z) = xyz + C$ siendo $C \in \mathbb{R}$

Aplicando, el teorema fundamental de integrales de línea

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$$

Como los puntos iniciales y final de la curva son

$$A = (x(0), y(0), z(0)) = (2\cos 0, 2\operatorname{sen}0, 0) = (2,0,0)$$
$$B = (x(2\pi), y(2\pi), z(2\pi)) = (2\cos(2\pi), sen(2\pi), 2\pi) = (2,0,2\pi)$$

el valor de la integral será

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A) = 0 - 0 = 0$$

Nota: Este ejercicio se puede realizar también utilizando la definición de integral de línea

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (2t\cos(t), 2t\operatorname{sen}(t), t)\cdot(-2\operatorname{sen}(t), 2\cos(t), 1)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2t\operatorname{sen}(t), 2t\cos(t), 4\cos(t)\operatorname{sen}(t))\cdot(-2\operatorname{sen}(t), 2\cos(t), 1)\,dt =$$

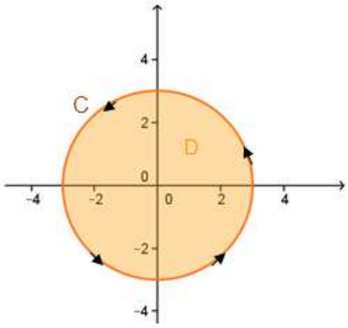
$$= \int_0^{2\pi} \Big[\underbrace{-4t\operatorname{sen}^2(t) + 4t\cos^2(t)}_{\cos^2(t)-\operatorname{sen}^2(t)=\cos(2t)} + \underbrace{4\cos(t)\,sen(t)}_{2\cos t\operatorname{sen} t = sen(2t)}\Big] dt = \underbrace{\int_0^{2\pi} 4t\cos(2t)\,dt}_{por\ partes} + \underbrace{\int_0^{2\pi} sen(2t)\,dt}_{=0} = 0$$

TEOREMA DE GREEN

36 Estando sometida a la fuerza $\mathbf{F}(x,y)=y^3\,\mathbf{i}+\left(x^3+3xy^2\right)\mathbf{j}$ una partícula recorre una vez el círculo de radio 3 en sentido antihorario. Aplicar el teorema de Green para hallar el trabajo realizado por $\mathbf{F}$.

Solución

Como se cumplen las hipótesis del teorema de Green se puede escribir



$$W=\int_C y^2dx+\left(x^3+3xy^2\right)dy=\iint_D 3x^2dA$$

siendo D el círculo de centro (0,0) y radio 3. Pasando a coordenadas polares, el trabajo realizado es

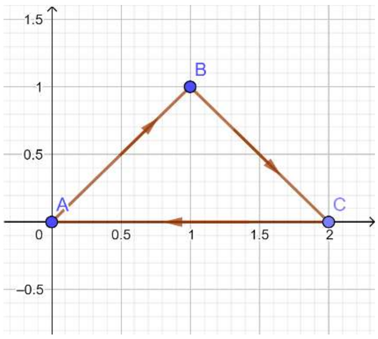
$$W=\iint_D 3x^2dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{3}3\left(r\cos\theta\right)^2 r\,dr\,d\theta=3\int_0^{2\pi}\int_0^{3}r^3\cos^2\theta\;dr\;d\theta=$$

$$=3\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=3}\cos^2\theta\,d\theta=3\int_0^{2\pi}\frac{81}{4}\cos^2\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{243}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos\left(2\theta\right)}{2}d\theta=\frac{243}{8}\left[\theta+\operatorname{sen}\left(2\theta\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}=\frac{243}{4}\pi$$

37 Una partícula se mueve sobre un campo vectorial $\mathbf{F}=e^{xy}\mathbf{i}+2xy\mathbf{j}$ siguiendo la trayectoria formada por el triángulo de vértices A(0,0), B(1,1) y C(2,0). Suponiendo que inicia en el punto (0,0), pasando por B y C y terminando en el (0,0), calcular el trabajo total que ejerce el campo sobre la partícula durante su desplazamiento.

Solución

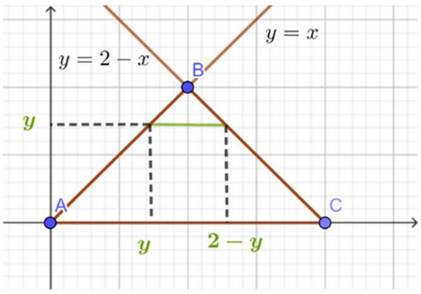


El campo plano $\mathbf{F} = e^{xy}\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$, no es conservativo ya que si $M\left(x,y\right) = e^{xy}$, $N\left(x,y\right) = 2xy$ se tiene que $N'_x\left(x,y\right) = 2y \neq M'_y\left(x,y\right) = xe^{xy}$

Dado que la curva C es cerrada, simple y suave a trozos, el campo es de clase C^1 y el dominio D encerrado por la curva C es simplemente conexo, se puede utilizar el Teorema de Green. La curva se recorre en sentido antihorario, por lo tanto,

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = -\iint_D \left(N'_y - M'_x\right) dA$$

Teniendo en cuenta que el dominio D se puede describir mediante franjas horizontales



la integral para calcular el trabajo total:

$$\oint_C F \bullet dr = -\iint_D \left(N'_y - M'_x\right) dA = -\iint_D \left(2y - xe^{xy}\right) dA = -\int_0^1 \int_y^{2-y} \left(2y - xe^{xy}\right) dx dy$$

El código Matlab es

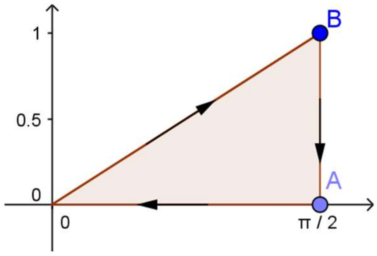
```
syms x y
I1=int(2*y-x*exp(x*y),x,y,2-y);
I2=int(I1,y,0,1);
trabajo=-double(I2)
%Solución:  0.8261
```

Nota: También es posible calcular el trabajo utilizando la definición parametrizando los tres segmentos que componen C.

38 Utilizando obligatoriamente el teorema de Green en el plano, evaluar la integral

$$\oint_C (y - \operatorname{sen} x)dx + \cos x\, dy\,,$$

siendo C el triángulo de la figura.



Solución

El campo vectorial

$$\mathbf{E}\left(x,y\right) = (y - \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + \cos x\,\mathbf{j}$$

es de clase C[1] en todo el plano. Aplicando el teorema de Green, se obtiene el valor de la circulación del campo vectorial $\mathbf{E}$(x,y) en sentido antihorario

$$\oint_C (y - \operatorname{sen} x)dx + \cos x\, dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial \cos x}{\partial x} - \frac{\partial\left(y - \operatorname{sen} x\right)}{\partial y}\right) dA = \iint_\Omega \left(-\operatorname{sen} x - 1\right) dA$$

luego la circulación en sentido horario será

$$I = \oint_C (y - \operatorname{sen} x)dx + \cos x\, dy = -\iint_\Omega \left(-\operatorname{sen} x - 1\right) dA = \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen} x + 1\right) \int_0^{2x/\pi} dy dx$$

La recta que une el origen con el punto B tiene por ecuación $y = \dfrac{2}{\pi} x$, como muestran los límites de integración. Integrando respecto de y, resulta $I = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\left(\operatorname{sen} x + 1\right) dx$. Integramos por partes la primera función,

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x dx = \left\{\begin{array}{l} u = x \to du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x dx \to v = -\cos x \end{array}\right\} = \left[-x\cos x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx =$$
$$= \left[-x\cos x + \operatorname{sen} x\right]_0^{\pi/2} = 1$$

$$I = \frac{2}{\pi}\left\{1 + \int_0^{\pi/2} x dx\right\} = \frac{2}{\pi}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right\} = \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{4}$$

39 Aplicar el teorema de Green en el plano, comprobando previamente que es posible, para evaluar la integral $L = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$, siendo $\mathbf{E}(x,y) = (y - x^2 e^x)\mathbf{i} + (\cos(2y^2) - x)\mathbf{j}$; la curva C es el rectángulo de vértices (0,1), (1,1), (1,4) y (0,4), recorrido en sentido antihorario.

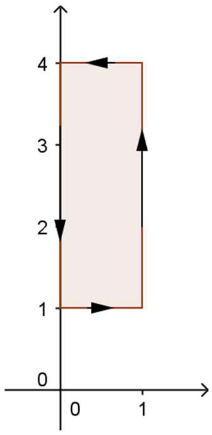
Solución

El campo vectorial

$$\mathbf{E}(x,y) = (y - x^2e^x)\mathbf{i} + (\cos(2y^2) - x)\mathbf{j}$$

es de clase C[1] en todo el plano.

Aplicando el teorema de Green, se obtiene



$$I = \oint_C (y - x^2e^x)dx + (\cos 2y^2 - x)dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial(\cos 2y^2 - x)}{\partial x} - \frac{\partial(y - x^2e^x)}{\partial y} \right) dA =$$

$$= \iint_\Omega (-2) dA = -2\left(área\ \Omega\right) = -6$$

40 Calcula el trabajo del campo $\mathbf{F}(x,y) = yx^2\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$ a lo largo de la curva C que es unión de la curva $x^2 + y^2 = 25$ con $x \le 0$ y el segmento del eje vertical que va desde (0,-5) a (0,5).

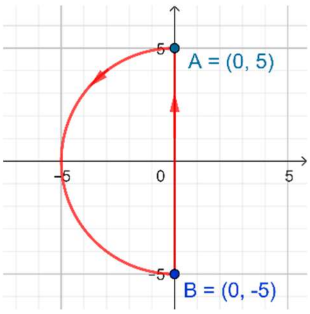
Solución

Forma 1

El campo $\mathbf{F}(x,y) = yx^2\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$ no es conservativo ya que llamando $M(x,y) = yx^2$, $N(x,y) = -y^2$ se tiene que

$$N'_x(x,y) = 0 \ne x^2 = M'_y(x,y)$$

La curva C es cerrada, simple, suave por partes y recorrida en sentido positivo (antihorario)



Aplicando el Teorema de Green, y considerando D el dominio encerrado por la curva C,

$$W = \iint_D \left[N'_x(x,y) - M'_y(x,y) \right] dA = \iint_D -x^2 \ dA$$

Utilizando coordenadas polares para hacer la integral doble

$$W = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^5 -r^3 \cos^2\theta \ dr\, d\theta$$

El código Matlab para calcular la integral es la siguiente,

```
syms r t
w=int(int(-r^3*cos(t)^2,r,0,5),t,pi/2,3*pi/2)
double(w)
%w=-625pi/8 (-245.4369)
```

Forma 2. Parametrizando la curva como unión del arco de circunferencia y el segmento de recta

$$C_1 \equiv \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\,sent \end{cases} \qquad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \qquad\qquad C_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad t \in \left[-5, 5\right]$$

se tendrá que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

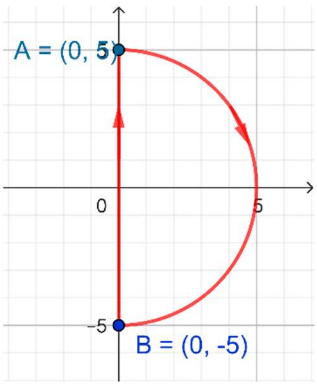
$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} M\left(5\cos t, 5sent\right) x'\left(t\right) dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} N\left(5\cos t, 5sent\right) y'\left(t\right) dt$$

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-5}^{5} M\left(0, t\right) x'\left(t\right) dt + \int_{-5}^{5} N\left(0, t\right) y'\left(t\right) dt$$

El código Matlab para calcular las integrales es el siguiente,

```
syms r t
x=5*cos(t);y=5*sin(t);dx=diff(x);dy=diff(y);
I1=int(y*x^2*dx-y^2*dy,t,pi/2,3*pi/2)
x=0;y=t;
I2=int(-y^2,t,-5,5)
I=I1+I2
```

Nota. La opción b) de la prueba pedía integrar sobre la siguiente curva en sentido negativo (horario).



Si se utiliza el teorema de Green habrá que tener en cuenta esta orientación ya que en el teorema se considera que la curva debe recorrerse en sentido positivo.

41

Considerar la curva C delimitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ recorrida en sentido positivo. Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = x^2 y\,\mathbf{i} + \left(x^2 + y^2\right)\mathbf{j}$, se pide calcular la integral de línea del campo $\mathbf{F}$.

Solución

El campo no es conservativo

$$M = x^2 y \qquad N = x^2 + y^2 \qquad\qquad N'_x = 2x \neq x^2 = M'_y$$

Como la curva C es cerrada y simple, el campo F es de clase C1 y C encierra un dominio simplemente conexo, se puede utilizar el teorema de Green. Considerando D el dominio encerrado por C se tiene que

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(N'_x - M'_y\right) dA$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} \left(2x - x^2\right) dy\,dx = \int_{-1}^{1} \left(2x - x^2\right)\left(1 - x^2\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(2x - 2x^3 - x^2 + x^4\right) dx = -\frac{4}{15}$$

E_01

Calcular el valor de la integral $\int_C y\,dx + e^{\operatorname{sen} y^2} dy$, siendo C la circunferencia $\left(x-1\right)^2 + y^2 = 1$ recorrida en sentido horario.

Solución

Comprobando que se puede utilizar el teorema de Green (ver apuntes), llamando D al interior de la curva cerrada C del enunciado y siendo M y N las componentes del campo, se cumplirá

$$\int_C M\,dx + N\,dy = -\iint_D \left(N'_x - M'_y\right) dA$$

Hay que hacer notar que el signo menos se debe a que la curva se recorre en sentido horario. Por lo tanto,

$$\int_C y\,dx + e^{\operatorname{sen} y^2} dy = -\iint_D \left(0 - 1\right) dA = area\left(D\right) = \pi$$

Material de consulta

Libro Interactivo. Parte II Capítulo 6.
Laboratorios y Unidades didácticas con videos explicativos: enlace
Autora: Elena E. Álvarez

[5] Las imágenes con marco color rojo están tomadas de este libro.