En los modelos matemáticos lineales desarrollados para un sistema físico, tal como un circuito eléctrico en serie, la entrada o función impulsora representa una fuerza externa $f(t)$ o un voltaje aplicado $E(t)$, que en ocasiones son funciones discontinuas y resultan difíciles de resolver cuando se utilizan los métodos analizados en el capítulo anterior.La transformada de Laplace es una herramienta que simplifica la solución de problemas como éstos.

## 1.1. Transformada de Laplace

**Transformada de Laplace**

Sea $f$ una función definida para $t \geq 0$. Entonces se dice que la integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathbf{F}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

es la **transformada de Laplace** de $f$, siempre y cuando la integral converja.

## 1.2. Propiedades

**(P1) Linealidad**

$$\mathcal{L}\{af(t) + b\,g(t)\} = a\,\mathcal{L}\{f(t)\} + b\,\mathcal{L}\{g(t)\}$$

En las siguientes propiedades se considera

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathbf{F}(s)$$

**(P2) Primer Teorema de traslación**

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \mathbf{F}(s-a)$$

luego

$$e^{at} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(s-a)\}$$

En ingeniería es común encontrar funciones que están en estado "activo" o "inactivo". Por ejemplo, un voltaje aplicado a un circuito pueden ser suspendido después de cierto tiempo. Resulta conveniente por ello definir una función especial que tome el valor 0 (inactiva) hasta cierto tiempo $t = a$, y el valor 1 (activa) después de ese tiempo. Esta función se denomina función **escalón unitario** o **función de Heaviside**

$$U(t-a) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

**(P3) Segundo Teorema de traslación**

$$\mathcal{L}\{U(t-a)\,f(t-a)\} = e^{-as}\mathbf{F}(s)$$

y por tanto

$$U(t-a)f(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\mathbf{F}(s)\}$$

**(P4) Trans. de la derivada**

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathbf{F}(s) - f(0)$$
$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\,\mathbf{F}(s) - s\,f(0) - f'(0)$$

**(P5)**

$$\mathcal{L}\{t\,f(t)\} = -\mathbf{F}'(s)$$

**(P6)**

$$\mathcal{L}\{t^n\,f(t)\} = (-1)^n \mathbf{F}^{(n}(s)$$

**(P7)**

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathbf{F}(s)$,

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}\mathbf{F}\left(\frac{s}{a}\right)$$

**Tabla de transformadas**

| $f(t)$ | $\mathbf{F}(s)$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}, \quad s > 0$ |
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0, \quad n \geq 0$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a} \quad s > a$ |
| $\cos at$ | $\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$ |
| $\operatorname{sen} at$ | $\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$ |
| $e^{bt}\cos at$ | $\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}, \quad s > b$ |
| $e^{bt}\operatorname{sen} at$ | $\frac{a}{(s-b)^2+a^2}, \quad s > b$ |
| $t^n\,e^{at}$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a, \quad n \geq 0$ |
| $U(t-a)$ | $\frac{e^{-as}}{s}, \quad s > a$ |