1. Ecuaciones diferenciales.

Definición

Se dice que una ecuación **diferencial (ED)** es cualquier ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.
Si una ecuación diferencial contiene únicamente derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, se dice que es una ecuación **diferencial ordinaria** (**EDO**)

Se resumen a continuación algunos métodos de cálculo de soluciones de EDOs.

1.1. EDOs de primer orden

Ecuaciones separables

Una ecuación diferencial se dice **separable** cuando puede expresarse en la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$$

Reducibles a separables

Una ecuación diferencial del tipo

$$y' = f(ax + by + c)$$

se reduce a **separable** con el cambio de variable $ax + by + c = z$

Definición 1 *Una función $f(x, y)$ se llama homogenea de orden n si cumple*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Ecuaciones Homogeneas

Una ecuación diferencial del tipo

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es **homogenea** si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogeneas del mismo orden, y se reduce a **separable** con $y = xz$.

Reducible a homogenea

Una ecuación diferencial del tipo

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{cx + dy + e}\right) \qquad (1)$$

es reducible a homogenea en los casos:

- Si $ax + by + c = 0$ y $cx + dy + e = 0$ se cortan en el punto (x_0, y_0), con el cambio de variable

  $$u = x - x_0 \quad v = y - y_0$$

- Si $ax+by+c = 0$ y $cx+dy+e = 0$ son paralelas con el cambio de variable

  $$ax + by = z$$

Diferencial exacta

Una ecuación diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es del tipo **exacta** si y solo si

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \qquad (2)$$

EDO con factor integrante

Un **factor integrante** $\mu(x, y)$ es una función que convierte la ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

en **exacta**

$$\mu(x, y)M(x, y)dx+\mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \quad (3)$$

Ecuación lineal

Una ecuación diferencial del tipo

$$y' + p(x)\,y = q(x) \qquad (4)$$

se llama **lineal de primer orden** y tiene como solución

$$y = e^{-\int p(x)\,dx} \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx \qquad (5)$$

También se puede resolver teniendo en cuenta que si se denota por y_p cualquier solución particular de la ecuación completa $y' + p(x)y = q(x)$ y por y_h la solución general de la homogénea asociada $y' + p(x)y = 0$, entonces la solución general de la ecuación completa es $y_p + y_h$.

- La solución general de la homogénea se puede encontrar al ser de variables separadas.
- Para encontrar una solución particular de la ecuación completa se puede utilizar el **método de variación de constantes**, que consiste en buscar una solución particular convirtiendo en función indeterminada la constante de la familia uniparamétrica de soluciones de la homogénea asociada:

$$y_h = Ce^{g(x)} \;\Rightarrow\; y_p = C(x)e^{g(x)}$$

Ecuación de Bernoulli

Una EDO es del tipo **Bernoulli** si

$$y' + p(x)\,y = q(x)y^n \quad n \neq 0 \text{ y } 1 \tag{6}$$

se reduce a una lineal con $z = y^{1-n}$

1.2. EDOs de segundo orden

EDOs lineales

Una ecuación lineal de segundo orden es de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x) \tag{7}$$

Solución general EDOs lineales homogéneas

Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ entonces

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

es la **solución general de la homogénea**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Solución general EDOs lineales

Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

y además $y_p(x)$ es solución particular de la completa $y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x)$ entonces

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x)$$

es la **solución general de la completa**.

Método de reducción de orden

Si $y_1(x)$ es solución de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

entonces se puede encontrar otra solución linealmente independiente con $y_1(x)$ considerando $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ reduciendo la ecuación a una de primer orden en $v(x)$.

Método de variación de constantes

Con este método podremos encontrar una solución particular para una ecuación lineal no homogénea, siempre que se conozca el sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada. La idea es sustituir las constantes de la familia solución general de la homogénea

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

por funciones, para hallar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

suponiendo

$$C_1{}'(x)y_1(x) + C_2{}'(x)y_2(x) = 0$$

Principio de superposición

Si $y_1(x)$ es solución de

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = R_1(x)$$

e $y_2(x)$ es solución de

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = R_2(x)$$

entonces $\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x)$ es solución de

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = \alpha_1R_1(x) + \alpha_2R_2(x)$$

EDOs de coef. const. homogeneas

La ecuación diferencial

$$a_n y^{n)} + a_{n-1} y^{n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (8)$$

tiene como solución $y(x) = e^{\lambda x}$ cuando λ es una raíz de su polinomio característico

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

- Si a es una raíz de este polinomio de multiplicidad k, las siguientes funciones son solución

$$\{e^{ax}, xe^{ax}, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\}$$

- En el caso de raíz compleja, $a \pm b\,i$, las siguientes funciones son solución

$$\{e^{ax}\cos bx, e^{ax}\,\mathrm{sen}\, bx\}$$

EDOs de coef. const. no homogeneas

Si la ecuación con coeficientes constantes no es homogenea

$$a_n y^{n)} + a_{n-1} y^{n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = R(x)$$

y el término $R(x)$ es de la forma

$$e^{ax}, \mathrm{sen}\, bx, \cos bx, p(x)\, \textit{polinomio}$$

o combinaciones de estas funciones, se busca una solución particular y_p del tipo de $R(x)$ que se hallará por el **método de los coeficientes indeterminados**

Método de los coeficientes indeterminados

- Si $R(x) = ae^{kx}$ se considera

$$y_p(x) = Ax^s e^{kx}$$

- Si $R(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ se considera

$$y_p(x) = x^s(B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m)$$

- Si $R(x) = a_0 \cos kx + a_1\, sen\, kx$ se considera

$$y_p(x) = x^s(A_0 \cos kx + A_1\, sen\, kx)$$

en todos los casos s es el menor entero no negativo tal que ningún sumando de $y_p(x)$ sea solución de la homogénea asociada.