Nombre y Apellidos Núm.:

TAREA 1 (13 de octubre)

Entrega la solución de los siguientes ejercicios.

1

Incluye en este espacio las soluciones para dar respuesta al cuestionario de trigonometría planteado como repaso el día 24 de septiembre.
Enlace al cuestionario: Trigonometría (http://www.giematic.com/Previos/T1/index.html)

2

Ejercicio 4 propuesto tras la clase del 5 de octubre.

A partir de la gráfica de las siguientes funciones

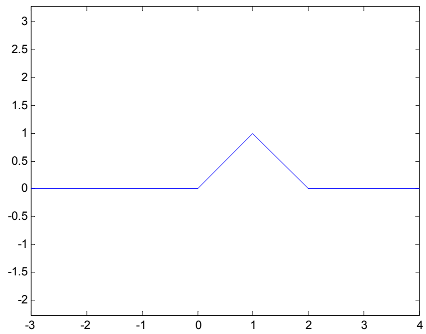
$$f\left(x\right) = sen\left(x\right) \qquad g\left(x\right) = \cos x \qquad h\left(x\right) = tgx$$

representa la de sus funciones inversas justificando en detalle la respuesta. Indica el dominio y la imagen o recorrido de las funciones inversas.

3

Ejercicio 5 de la práctica 2 realizada el día 7 de octubre.

La gráfica de la función $f\left(x\right)$ es la que se muestra en la siguiente figura



Escribe su expresión

a) Indica cómo se puede obtener a partir de f
b) su simétrica respecto del eje Y
c) su trasladada 3 unidades a la derecha
d) el resultado de trasladar 2 unidades a la izquierda la simétrica respecto del eje Y
e) la función dilatada horizontalmente una razón de 2 unidades.

Representa con Matlab las gráficas del apartado b).

Nombre y Apellidos Núm.:

4

Calcula $z = \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot i\right)^{14} \cdot \left(\sqrt{2}_{\pi/3}\right)^{6}}{\mathrm{Im}\left(1-i\right)\left(1+\sqrt{3} \cdot i\right)^{3}}$

Ver ejecicios resueltos similares en el tema de números complejos

TAREA 2 (25 de octubre)

Ejercicio a entregar.

1

Dada la función $f\left(x\right) = arctg\left(x\right)$

(a) Se podría aproximar el valor de $f\left(0.5\right) = arctg\left(0.5\right)$ considerando un polinomio de Taylor en el punto 0. Justificar la respuesta (no se pide hacerlo, únicamente justificar si es posible).

(b) Calcula un valor aproximado de $f\left(1.2\right)$ al considerar su polinomio de Taylor de grado 3 en el punto 1 y da una cota del error de la aproximación. ¿Cuántas cifras significativas se considerarían con esta aproximación?

Nota: Este es un ejercicio para comprender el proceso de acotación del resto por lo que puedes ayudarte de la representación de la derivada que corresponda para obtener una cota de $R_3\left(1.2\right)$

Resuelve el ejercicio a mano y luego utilizando Matlab. Las operaciones en el primer caso las puedes dejar indicadas y obtener luego su valor con Matlab.

Solución b) Ver práctica 4, ejercicio 4.

PRUEBA BLOQUE 1 (30 de octubre)

1

Determina la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones **justificando la respuesta**:

a) La serie, cuya suma parcial enésima es $S_n = 1 + \dfrac{\left(-1\right)^n}{n^2}$, se trata de una serie oscilante.

b) El infinitésimo $\operatorname{sen}\left(3x^2\right) - 2x$ es un infinitésimo de orden superior a $x^2 \log\left(2+x\right)$ para $x = 0$.

c) La suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{7\left(-4\right)^{2n}}$ es $\dfrac{9}{91}$.

Solución a)

Nombre y Apellidos Núm.:

No es oscilante, es convergente. Su suma es 1 porque $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right]=1$

Solución b

$\operatorname{sen}(3x^2)-2x \approx 3x^2-2x$ es de orden 1. $x^2\log(2+x)\approx x^2\log(2)$ Falso. Es de de orden inferior.

Solución c

La suma de la serie geométrica es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{7(-4)^{2n}} = \frac{3}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^2}\right)^n = \frac{3}{7}\frac{\frac{3}{4^2}}{1-\frac{3}{4^2}} = \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{13}=\frac{9}{91}$

Nota:

a) Ejercicios similares **resueltos** del tema de series numéricas números 4 y 5 (página 14). Estos ejercicios se propusieron como actividad a realizar el día 14 de octubre.

b) Ejercicios similares **resueltos** del tema de polinomios de Taylor números 14, 15, 16 y 17 (página 28).

c) Ejercicios similares **resueltos** del tema de series numéricas números 9a, 9d… Estos ejercicios se propusieron como actividad a realizar el día 22 de octubre.

2

(a) Calcular $(1-i)^8 - 2 + \frac{\operatorname{Im}(1-i)e^{\frac{2\pi}{3}i}}{(-\sqrt{3}+i)\,\overline{2_{\pi/3}}}$ y escribir el resultado en forma binómica.

(b) Representar en el plano el conjunto de los números complejos z que cumplen $|z-2|=3$.

Solución (a)

$$(1-i)^8 - 2 + \frac{\operatorname{Im}(1-i)e^{2\pi/3i}}{(-\sqrt{3}+i)\,\overline{2_{\pi/3}}} = \left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^8 - 2 + \frac{(-1)e^{\frac{2\pi}{3}i}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}\,2e^{\frac{-\pi}{3}i}} =$$

$$= 2^4e^{-2\pi i} - 2 - \frac{1}{4}e^{\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)i} = 2^4 - 2 - \frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{6}i} = 14 - \frac{1}{8}\left(\sqrt{3}+i\right)$$

Solución b

Si $z = x+iy$ se tendrá que

$$|z-2|=3 \Leftrightarrow |x-iy-2|=3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=9$$

Se trata de la circunferencia de centro (2,0) y radio 3.

Nombre y Apellidos Núm.:

Ver ejercicios similares **resueltos** en el tema de números complejos 4, 5, 7, 8, 11, 10… Actividades propuestas a realizar el 28 de septiembre.

3

Determina si las siguientes series son convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 3\log\left(1+\frac{1}{3^n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n\sqrt[3]{n}}$$

Solución a)

Aplicanco el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)2^{n+1}} : \frac{n^2+1}{n2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2n+2)n2^n}{(n+1)(n^2+1)2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2n+2)n}{(n+1)(n^2+1)2} = \frac{1}{2} < 1$$

Luego la serie es convergente

Solución b)

Es convergente por comparación con la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3^n}$.

$$3\log\left(1+\frac{1}{3^n}\right) \approx \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3^n}$ es convergente por tener razón 1/3 que es menor en valor absoluto a 1.

Solución c)

Es convergente por Leibniz. La serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$. Se tiene que $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ cumple:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- $a_{n+1} < a_n$

Ejercicios similares **resueltos** en el tema de series numéricas números 7, 10… , actividades propuestas a realizar el día 22 de octubre.

4

Dada la función $f(x) = tg(x)$, se pide:

a) Representar justificadamente, a partir de la gráfica de $f(x)$, la gráfica de la función

Nombre y Apellidos Núm.:

$g\left(x\right)=tg\left(-x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ y de $h\left(x\right)=arctg\left(x\right)$. Indicar en cada caso el dominio y el recorrido.

b) Deducir la expresión de la derivada de su función inversa a partir de la derivada de $f\left(x\right)$.

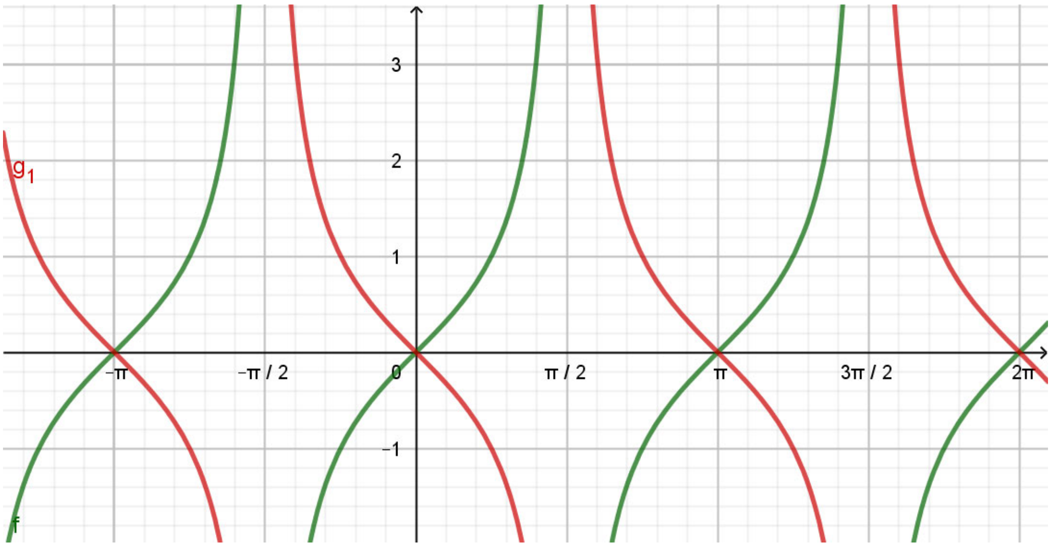
Solución a

Teniendo en cuenta que

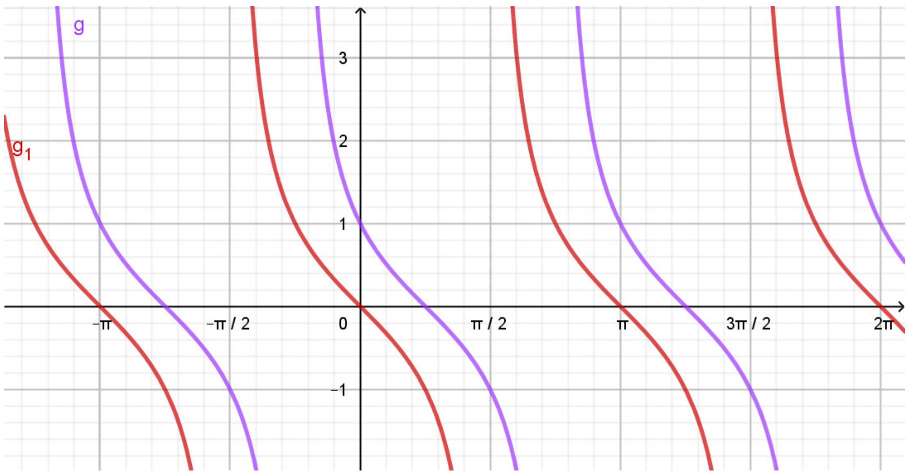
$$g\left(x\right)=f\left(-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=g_1\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \text{ siendo } g_1\left(x\right)=f\left(-x\right)$$

Representamos la gráfica de $g_1\left(x\right)$ y después la de $g_1\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A partir de la gráfica de la tangente se puede representar la gráfica de $g_1\left(x\right)=tg\left(-x\right)$ que es el reflejo de la gráfica de la tangente respecto al eje de abscisas (gráfica roja)



Como $g\left(x\right)=g_1\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, se desplaza la gráfica de g_1 hacia la derecha $\dfrac{\pi}{4}$ unidades (gráfica morada).

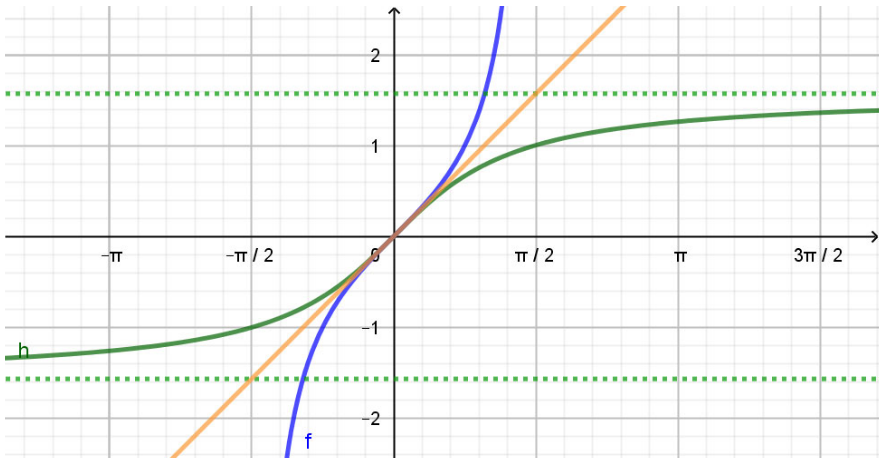


Nombre y Apellidos Núm.:

Ejercicios similares **resueltos** en el tema de funciones números 2, 3, propuestos como actividades a realizar el 1 de octubre. Se facilitó un elemento interactivo para analizar el efecto de estas transformaciones.

Solución a

Para represenar la gráfica de h se tiene en cuenta que la función tangente tiene inversa donde es inyectiva por lo que considerando para la función tangente el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ como dominio y el conjunto de los números reales como imagen, su inversa será simétrica respecto a la recta $y=x$ y tendrá por dominio el conjunto de los números reales y su imagen será el intevalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.



Nota: Ejercicio propuesto número del tema de funciones (página 24), actividad propuesta a realizar el día 5 de octubre (ejercicio pedido para ser entregado en una tarea anterior).

Solución b

Para deducir la derivada de la función inversa de $f(x)=tg(x)$, es decir, de la función $g(x)=arctg(x)$ basta aplicar la expresión

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))} \quad \text{sabiendo que } f'(x)=1+tg^2(x)$$

Se tendrá que $g(x)=\dfrac{1}{1+tg^2(arctgx)}=\dfrac{1}{1+x^2}$

Otra forma es aplicar la definición de la inversa

$$y=arctgx \Leftrightarrow tg(y)=x$$

y aplicar derivación implícita

$$\left(1+tg^2(y)\right)y'=1$$

$$y'=\frac{1}{1+tg^2(y)}=\frac{1}{1+tg^2(arctgx)}=\frac{1}{1+x^2}$$

Nota: Ejercicio propuesto número 10 del tema de funciones (página 15) incluido como actividad propuesta a realizar el día 8 de octubre.

Nombre y Apellidos Núm.:

5

(a) Dada la ecuación $x^3 + y^2 \operatorname{sen}(xy) = 2 - y - \cos(y)$ que define a y como función de x en las cercanías del punto P(1,0) , se pide calcular un valor aproximado de $y(1.3)$ utilizando la diferencial en el punto 1. Escribe el código Matlab para representar la función.

(b) Sea $g(x) = f(\operatorname{sen}^2 x)$, sabiendo que f es derivable en el punto 0 calcular $g'(\pi)$.

Solución a)

Teniendo en cuenta que

$$\Delta y \approx dy \qquad y(1.3) - y(1) \approx y'(1) \cdot 0.3$$

Debemos calcular la derivada de la función en el punto 1. Derivando implícitamente

$$3x^2 + 2yy' \operatorname{sen}(xy) + y^2 \cos(xy)(y + xy') = -y' - sen(y) \cdot y'$$

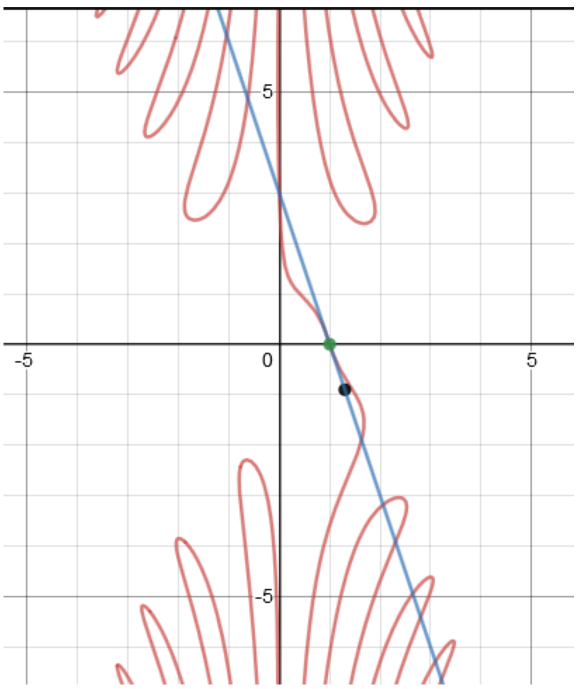
Sustituyendo x=1, y=0 se tendrá

$$y' = -3$$

Por lo tanto $\Delta y \approx dy \qquad y(1.3) \approx 0 - 3 \cdot 0.3 = -0.9$

Para representar la gráfica de la función se utilizará el siguiente código

```
>>ezplot('x^3-y^2*sin(x*y)=2-y-cos(y)')
```



Ejercicio similar **resuelto** es el número 8 del tema de funciones (página 22) y los ejercicios **resueltos** de derivación implícita 22, 23, 24… del mismo tema. Actividades propuestas a realizar el 8 de octubre.

Solución b

Aplicando la regla de la cadena

Nombre y Apellidos Núm.:

$$g'(x) = f'(\operatorname{sen}^2 x)\, 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$g'(\pi) = f'(\operatorname{sen}^2 \pi)\, 2 \operatorname{sen} \pi \cos \pi = 0$$

Nota: Ejercicio similar es el **resuelto** número 4 del tema de funciones (página 24) como actividades propuestas a realizar el día 8 de octubre.

6

Se quiere calcular un valor aproximado de $\sqrt[3]{7.6}$ con la función $f(x) = \sqrt[3]{8-x}$ mediante un polinomio de Taylor de grado 2 en algúnpunto adecuado. Se pide:

(a) Calcular la aproximación que se obtendría con el polinomio de Taylor de grado 2.

(b) Dar una cota del error cometido.

(c) Escribe el código Matlab para representar en una figura la función junto con el polinomio de Taylor.

Solución

Como $f(0.4) = \sqrt[3]{8-0.4} = \sqrt[3]{7.6}$, se considera a=0 y x=0.4. Calculando el polinomio de Taylor

$$f(x) = \sqrt[3]{8-x} = (8-x)^{1/3} \qquad f(0) = 2$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(8-x)^{-2/3} \qquad f'(0) = -\frac{1}{12}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}(8-x)^{-5/3} \qquad f''(0) = -\frac{1}{9\cdot 16} = -\frac{1}{144}$$

$$T_2(x) = 2 - \frac{1}{12}x - \frac{1}{144\cdot 2!}x^2 = 2 - \frac{1}{12}x - \frac{1}{288}x^2$$

El valor aproximado es

$$T_2(0.4) = 2 - \frac{1}{12}0.4 - \frac{1}{144\cdot 2!}0.4^2 \approx 1.9661$$

Para calcular una cota del error cometido en la aproximación consideramos la expresión del resto de Lagrange

$R_2(0.4) = \dfrac{f'''(c)}{3!}0.4^3$ donde c es un punto intermedio entre 0 y 0.4. Teniendo en cuenta que

$$f'''(x) = -\frac{10}{27}(8-x)^{-8/3} \qquad f'''(x) = -\frac{10}{27}(8-x)^{-8/3}$$

el resto será

$$\left|R_2(0.4)\right| = \left|\frac{-10}{27\cdot 3!(8-c)^{8/3}}0.4^3\right| < \frac{10}{3^4\cdot 2\cdot 10^3}\frac{4^3}{} = \frac{32}{3^4\cdot 10^2} \approx 0.0039$$

Se ha utilizado que si c está entre 0 y 0.4

$$1 < \underbrace{(8-0.4)^{8/3}}_{no\ conocido\, 7.6^{1/3}} < (8-c)^{8/3}$$

Ejercicios similares **resueltos** se pueden ver en el tema de polinomios de Taylor números: 2, 5, 6, 7…

Nombre y Apellidos Núm.:

Prueba Bloque 1 – 27 de noviembre

1

Dada la serie de potencias $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n x^{n+1}}{n+1}$. Se pide:

A) Calcular el dominio de la función $f(x)$.

B) Encontrar la expresión de $f(x)$ a partir de su derivada.

C) Calcula el valor de $f(2)$ y $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

Solución (A)

Para calcular el dominio, se aplica el criterio del cociente a la serie de los valores absolutos, es decir, a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n|x|^{n+1}}{n+1}$. Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}|x|^{n+1+1}}{n+1+1}:\frac{3^n|x|^{n+1}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}|x|^{n+2}(n+1)}{3^n|x|^{n+1}(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3|x|(n+1)}{(n+2)}=3|x|$$

La serie será convergente para los valores de x que cumplan

$$3|x|<1\Leftrightarrow|x|<\frac{1}{3}$$

- Para $x=\frac{1}{3}$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$. Se trata de una serie alternada convergente por Leibniz ya que la sucesión $a_n=\frac{1}{n+1}$ es monótona decreciente y tiende a cero cuando n tiende a infinito.
- Para $x=-\frac{1}{3}$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n+1}=-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$. Se trata de una serie divergente por comparación con la serie armónica.

El dominio de la función es, por tanto, $-\frac{1}{3}<x\le\frac{1}{3}$

Solución (B)

Derivando $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n x^{n+1}}{n+1}$ se tiene

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n(n+1)x^n}{n+1}=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-3x)^n}_{\substack{\textit{serie geométrica}\\ \textit{primer término: } a_1=-3x\\ \textit{razón } r=-3x}}=\frac{-3x}{1+3x}\underset{\text{integrando}}{\Rightarrow}f(x)=\frac{1}{3}\log\left|x+\frac{1}{3}\right|-x+C$$

Nombre y Apellidos Núm.:

Dado que $f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-3\right)^{n}x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{3}\log\left(x+\frac{1}{3}\right)-x+C$, sustituyendo en el 0 se tendrá

$$0=f\left(0\right)=\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)+0+C\Rightarrow C=-\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)$$

Luego

$$f\left(x\right)=\frac{1}{3}\log\left(x+\frac{1}{3}\right)-x-\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\log\left(1+3x\right)-x$$

Observación:

Teniendo en cuenta $\log\left(1+x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}x^{n}}{n}\qquad 1<x\le 1$, se podría haber obtenido la expresión de la función considerando que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-3\right)^{n}x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(-3\right)^{n-1}x^{n}}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}\left(3x\right)^{n}}{3n}=\frac{1}{3}\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}\left(3x\right)^{n}}{n}-3x\right)}_{=\log\left(1+3x\right)-3x}=\frac{1}{3}\log\left(1+3x\right)-x$$

siendo su campo de validez

$$-1<3x\le 1\qquad\Leftrightarrow\qquad -\frac{1}{3}<x\le\frac{1}{3}$$

Solución (C)

$f\left(2\right)$ no se puede calcular porque 2 no es un punto del dominio, para calcular en el punto 1/3 basta sustituir en la expresión de la función.

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\log\left(2\right)-\frac{1}{3}$$

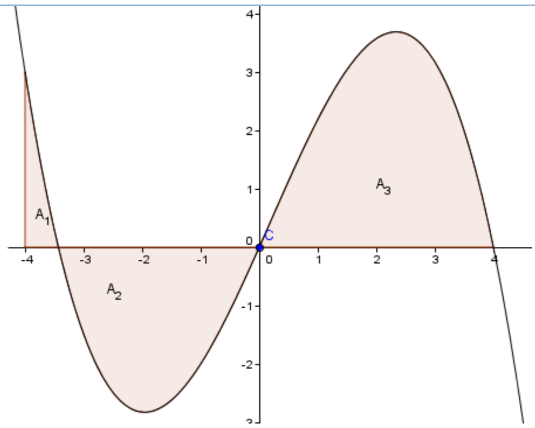
Prueba Bloque 2 – 27 de noviembre - Integrales

2

Calcula el área de las tres áreas sombreadas A_1 , A_2 y A_3 sabiendo que

$$\int_{-4}^{4}f\left(x\right)dx=4,\qquad\int_{-4}^{4}\left|f\left(x\right)\right|dx=16.5,\qquad\int_{-4}^{0}-2f\left(x\right)dx=11$$

Nombre y Apellidos Núm.:



Solución

El valor de las áreas será:

$$A_1 = \int_{-4}^{3.5} f(x)dx \qquad A_2 = -\int_{3.5}^{0} f(x)dx \qquad A_3 = \int_{0}^{4} f(x)dx$$

Se cumple que

$$\int_{-4}^{4} f(x)dx = 4 \Rightarrow \int_{-4}^{3.5} f(x)dx + \int_{3.5}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 = 4$$

$$\int_{-4}^{4} |f(x)|dx = 16.5 \Rightarrow \int_{-4}^{3.5} f(x)dx - \int_{3.5}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx = A_1 + A_2 + A_3 = 16.5$$

$$\int_{-4}^{0} -2f(x)\,dx = 11 \Rightarrow -2\int_{-4}^{3.5} f(x)dx - 2\int_{3.5}^{0} f(x)dx = -2(A_1 - A_2) = 11$$

Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & A_1 - A_2 + A_3 = 4 \\ (2) & A_1 + A_2 + A_3 = 16.5 \\ (3) & -2A_1 + 2A_2 = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} (2)-(1) & 2A_2 = 12.5 \rightarrow \boxed{A_2 = 6.25} \\ (3) & 2A_1 = 12.5 - 11 \rightarrow \boxed{A_1 = 0.75} \\ (1) & A_3 = 4 - A_1 + A_2 = 4 - 0.75 + 6.25 \rightarrow \boxed{A_3 = 9.5} \end{array}\right\}$$

3

A) Determinar, mediante la utilizacion de integrales, el área de la región limitada por $y = \sqrt{3}\,x$, $x^2 + y^2 = 4$ y el eje positivo de las x.

B) Sin calcularlas, ordenar las siguientes integrales

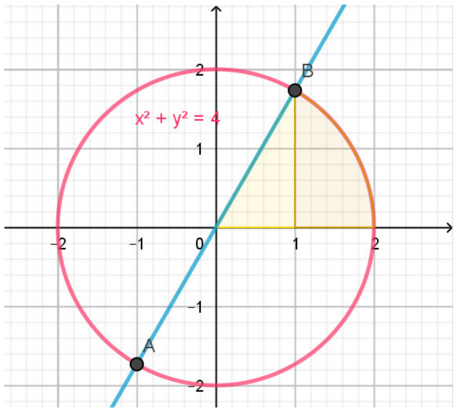
$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 sen(x)}{x^2 + 1} dx \qquad \int_{0}^{1} x^3 sen(x)\,dx$$

Solución (A)

Calculamos en primer lugar la intersección entre la recta y la circunferencia:

Nombre y Apellidos Núm.:

$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{3}\,x \\ x^2+y^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\sqrt{3}\,x \\ x^2+3x^2=4 \to x^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A\left(-1,\sqrt{3}\right) \quad B\left(1,\sqrt{3}\right)$$



Para calcular el área consideraremos el área del triángulo determinado por los puntos (0,0), (1,0) y B que será igual a

$$\acute{A}rea_{\,1}=\frac{1\cdot\sqrt{3}}{2}$$

Para calcular el área de la zona roja del gráfico se considerará la integral

$$\acute{A}rea_{\,2}=\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx \underset{\left[\begin{array}{l} x=2sent \\ dx=2\cos t \\ \sqrt{4-x^2}=2\cos t \\ x=1\to sent=\frac{1}{2}\to t=\frac{\pi}{6} \\ x=2\to sent=1\to t=\frac{\pi}{2}\end{array}\right]}{=} \int_{\pi/6}^{\pi/2}4\cos^2 t\,dt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}4\,\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=2\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(1+\cos 2t\right)dt=2\left[t+\frac{sen\left(2t\right)}{2}\right]_{t=\pi/3}^{t=\pi/2}=2\frac{\pi}{2}+sen\left(\pi\right)-2\frac{\pi}{6}-sen\left(\frac{2\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

El área total es: $\acute{A}rea=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\pi}{3}u^2$

Observación: El área pedida se podría haber obtenido sin calcular integrales utilizando la fórmula para calcular el área de un sector circular de ángulo α es

$$\acute{A}rea=\pi r^2\,\frac{\alpha}{2\pi}=\pi\cdot 4\,\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}=\frac{2\pi}{3}$$

Solución (B)

Como el integrando de la primera integral es par $g\left(x\right)=\dfrac{x^3sen\left(x\right)}{x^2+1}=g\left(-x\right)$ se tiene que

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^3sen\left(x\right)}{x^2+1}\,dx=2\int_0^1\frac{x^3sen\left(x\right)}{x^2+1}\,dx$$

Dado que para x cumpliendo $0\le x\le 1$ se cumple

$$x^2+1\le 2 \qquad \Rightarrow \qquad 1\le\frac{2}{x^2+1} \qquad \underset{x^3sen(x)\ge 0}{\Rightarrow} \; x^3sen\left(x\right)\le\frac{2x^3sen\left(x\right)}{x^2+1}$$

Nombre y Apellidos Núm.:

$$\int_0^1 x^3 sen\left(x\right)dx \le 2\int_0^1 \frac{x^3 sen\left(x\right)}{x^2+1}dx$$

4

(A) En un fichero llamado areaaprox.m escribimos

```
function A=areaaprox(n)
h=1/n; c=h/2:h:1-h/2; f=2/c+1; A=sum(f)*h;
end
```

si en la ventana de comandos ejecutamos suma=areaaprox(10), **justificar** si son ciertas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones:

a) El valor de `suma` será la suma de Riemann de la función $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x+1}$ en el intervalo [0,1] tomando 10 subintervalos y sería una cota superior del valor de la integral de f en el intervalo.

b) Dará error porque en la ventana de comandos deberíamos poner A=areaaprox(10) en vez de suma=areaaprox(10).

(B) Escribe una función para que calcule una suma de Riemann tomando 15 subintervalos que sea cota superior del valor de la integral de $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x+1}$ en el intervalo [a, b].

Solución (A)

Las dos afirmaciones son falsas, la función

```
function A=areaaprox(n)
h=1/n; c=h/2:h:1-h/2; f=2/c+1; A=sum(f)*h;
end
```

da error de ejecución porque para considerar la función $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x+1}$ debería haberse escrito: `f=2./(c+1).`

La suma de Riemann considera como punto del intervalo el punto medio, no sería en cualqueir caso una cota superior del valor de la integral.
En la ventana de comandos se puede poner areaaprox(10) y guardar su valor en cualquier variable pero no se obtendría ningún valor como se ha indicado anteriormente.

Solución (B)

Como la función es decreciente, para obtener una cota superior en el intervalo se debería considerar el punto inferior de cada subintervalo.

```
function A=areaaprox(a,b)
n=15;h=(b-a)/n; c=a:h:b-h; f=2./(c+1); A=sum(f)*h;
end
```

5

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} \qquad \int \frac{x^2}{2x^2+1}dx \qquad \int \frac{\left(3\log x-1\right)^5}{x}dx \qquad \int \frac{x^5\sqrt{2-x^6}}{4}dx$$

Solución 1

Nombre y Apellidos Núm.:

Como $\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$, descomponiendo en fracciones simples se tendrá:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \begin{cases} A(x+2) + B(x-1) = 1 \\ x = -2 \to -3B = 1 \to B = \frac{-1}{3} \\ x = 1 \to 3A = 1 \to A = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{3}\log|x+2| + C = \frac{1}{3}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$$

Solución 2

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^2} & 2x^2+1 \\ \hline \cancel{-x^2} - \frac{1}{2} & 1/2 \\ \hline -\frac{1}{2} & \end{array} \qquad \Rightarrow \int \frac{x^2}{2x^2+1}dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{2}}{2x^2+1} \right) dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}x\right)^2 + 1} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} arctg\left(\sqrt{2}x\right) + C$$

Solución 3

$$\int \frac{(3\log x - 1)^5}{x} dx \underset{\left\{\substack{u = 3\log x - 1 \\ du = \frac{3}{x}dx}\right\}}{=} \int \frac{u^5}{3} du = \frac{u^6}{18} + C = \frac{(3\log x - 1)^6}{18} + C$$

Solución 4

$$\int \frac{x^5\sqrt{2-x^6}}{4} dx \underset{\left\{\substack{u = 2-x^6 \\ du = 6x^5 dx \to \\ x^5 dx = \frac{du}{6}}\right\}}{=} \int \frac{u^{1/2}}{18} du = \frac{u^{3/2}}{18 \cdot \frac{3}{2}} + C = \frac{2\left(2-x^6\right)^{3/2}}{27} + C$$

Nombre y Apellidos Núm.:

Prueba Bloque 2 – 2 de diciembre – Series de Fourier

1

Se considera la función definida en el intervalo [0,2] de la forma

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x\le 1 \\ 1 & 1<x\le 2 \end{cases}$$

Se pide:

(a) Justificar si la función 2-periódica definida como $f(x)$ en el intervalo [0,2] es desarrollable en Serie de Fourier y obtener su desarrollo analizando la convergencia de la serie en cada número real.

(b) Obtener el desarrollo en serie de cosenos de la función $f(x)$ definida en el intervalo [0,2]. ¿A qué valor converge la serie obtenida en el punto 2?

(c) Obtener el periodo y la amplitud de los primeros dos armónicos no nulos de la serie calculada en el apartado (b) y determinar también el periodo de la suma de estos dos armónicos.

Solución a)

En este caso, el período de la función es $T=2,\ p=1$, siendo la frecuencia fundamental $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\pi$. La serie de Fourier será

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\pi t)+b_n\cos(n\pi t)$$

Calculamos el valor de los coeficientes de la serie

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}\underbrace{f(t)}_{\substack{periodica\,de\\ periodo\ 2p}}\,dt=\int_{-1}^{0}dt+\int_{0}^{1}t\,dt=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(t)\cos(n\pi t)dt=\int_{-1}^{0}\cos(n\pi t)\,dt+\int_{0}^{1}t\cos(n\pi t)\,dt\,, \qquad (1)$$

Para la segunda integral se aplica el método de integración por partes:

$$\int t\cos(n\pi t)\,dt=t\frac{sen(n\pi t)}{n\pi}-\int\frac{sen(n\pi t)}{n\pi}dt=t\frac{sen(n\pi t)}{n\pi}+\frac{\cos(n\pi t)}{n^2\pi^2}$$

$$\left\{\begin{matrix} u=t & \rightarrow & du=dt \\ dv=\cos(n\pi t) & \rightarrow & v=\dfrac{\operatorname{sen}(n\pi t)}{n\pi}\end{matrix}\right\}$$

sustituyendo en (1) queda

$$a_n=\left.\frac{sen(n\pi t)}{n\pi}\right|_{t=-1}^{t=0}+\left[t\frac{\operatorname{sen}(n\pi t)}{n\pi}+\frac{\cos(n\pi t)}{n^2\pi^2}\right]_{t=0}^{t=1}=$$

Nombre y Apellidos Núm.:

$$a_n = \frac{\cos(n\pi)}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} = \boxed{\begin{cases} 0 & n \; par \\ \dfrac{-2}{n^2\pi^2} & n \; impar \end{cases}}$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\, sen(n\pi t) dt = \int_{-1}^{0} sen(n\pi t)\, dt + \int_{0}^{1} t sen(n\pi t)\, dt, \qquad (2)$$

Para la segunda integral se aplica el método de integración por partes:

$$\int t sen(n\pi t)\, dt = t\frac{-\cos(n\pi t)}{n\pi} + \int \frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} dt = t\frac{-\cos(n\pi t)}{n\pi} + \frac{sen(n\pi t)}{n^2\pi^2}$$

$$\begin{bmatrix} u = t & \rightarrow & du = dt \\ dv = sen(n\pi t) & \rightarrow & v = \dfrac{-\cos(n\pi t)}{n\pi} \end{bmatrix}$$

sustituyendo en (2) queda

$$b_n = \left.\frac{-\cos(n\pi t)}{n\pi}\right|_{t=-1}^{t=0} + \left[t\frac{-\cos(n\pi t)}{n\pi} + \frac{sen(n\pi t)}{n^2\pi^2}\right]_{t=0}^{t=1} =$$

$$b_n = \frac{-1 + \cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} = \boxed{\frac{-1}{n\pi}}$$

Sustituyendo estos coeficientes en la serie se obtiene

$$S(t) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1 + (-1)^n}{n^2\pi^2} \cos(n\pi t) + \frac{-1}{n\pi} sen(n\pi t)$$

La serie convergerá

$$S(t) = f(t) \qquad t \neq 2k \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$S(t) = \frac{1}{2} \qquad t = 2k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Solución b)

Consideramos la extensión par de la función $f(t)$

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & 0 < t \le 2 \\ f(-t) & -2 \le t \le 0 \end{cases}$$

Nombre y Apellidos Núm.:

Se tendrá $T = 4$, $p = 2$, siendo la frecuencia fundamental $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$. La serie de Fourier será

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$$

Calculamos el valor de los coeficientes de la serie

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)dt = \int_0^1 tdt + \int_1^2 dt = \frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt = \int_0^1 t\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt + \int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt, \qquad (3)$$

Para la primera integral se aplica el método de integración por partes:

$$\int t\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt = t\frac{2sen\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{n\pi} - \int \frac{2sen\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{n\pi}dt = \frac{2tsen\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{n\pi} + \frac{4\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{n^2\pi^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} u = t \quad \to \quad du = dt \\ dv = \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right) \to v = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}t\right)}{\frac{n\pi}{2}} = \dfrac{2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}t\right)}{n\pi} \end{array}\right]$$

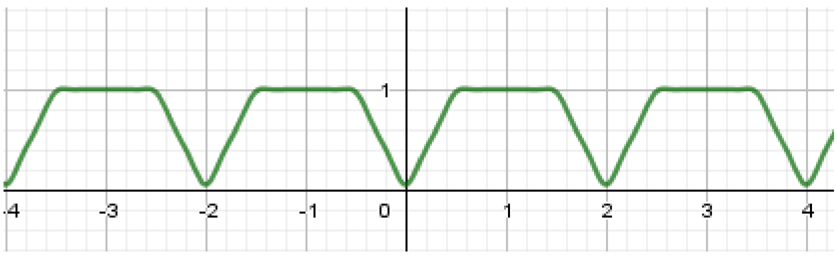
sustituyendo en (3) queda

$$a_n = \left[\frac{2t\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}t\right)}{n\pi} + \frac{4\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)}{n^2\pi^2}\right]_{t=0}^{t=1} + \left[\frac{2sen\left(\frac{n\pi}{2}t\right)}{n\pi}\right]_{t=1}^{t=2} =$$

$$a_n = \frac{2sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} + \frac{4\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2} - \frac{2sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2} = \boxed{\frac{4\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4}{n^2\pi^2}}$$

La serie será:

$$S(t) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$$



Nombre y Apellidos Núm.:

Solución c)

Los dos primeros armónicos son $-\dfrac{4}{\pi^2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$, $-\dfrac{8}{2^2\pi^2}\cos\left(\pi t\right)$.

- Amplitud: $\dfrac{4}{\pi^2}$. Periodo $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$
- Amplitud: $\dfrac{2}{\pi^2}$. Periodo $T=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$

PRUEBA BLOQUE 3 (8 de enero)

Puntuación: 24 puntos

1

(a) Dada la función $f\left(x,y\right)=\sqrt{sen\left(x^2+y^2\right)}$, se pide contestar justificadamente a las siguientes preguntas:

1. Calcular y representar su dominio.
2. Calcula utilizando la definición las derivadas parciales en el origen.
3. ¿Es diferenciable la función en todo su dominio?

(b) Calcular y representar a mano las curvas de nivel de la función $f\left(x,y\right)=e^{x^2+y^2}$. Escribir también el código Matlab para representar estas curvas de nivel con Matlab.

Solución a

El dominio es el conjunto $\left(x,y\right)$ tales que $0\le sen\left(x^2+y^2\right)$. Es decir,

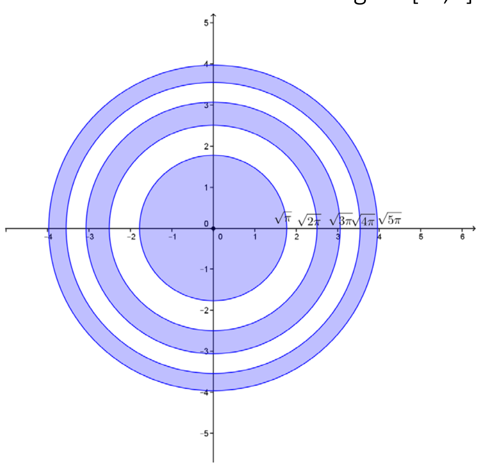
$$0\le x^2+y^2\le\pi$$

$$2n\pi\le x^2+y^2\le\pi+2n\pi \qquad n\in\mathbb{N}$$

Se trata del interior y la frontera del círculo de centro (0,0) y radio $\sqrt{\pi}$ junto con las coronas circulares de radios $\sqrt{2n\pi}$ y $\sqrt{\left(2n+1\right)\pi}$

$$2n\pi\le x^2+y^2\le\left(2n+1\right)\pi \qquad n\in\mathbb{N}$$

En la figura se representa en azul los puntos del dominio en el rectángulo [-4,4]x[-4,4].



Nombre y Apellidos Núm.:

Solución b

Para calcular las derivadas parciales en el origen utilizando la definición, hay que obtener los siguientes límites

$$f_x'\left(0,0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\mathrm{h},0\right)-f\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\mathrm{sen}\left(h^2\right)}-0}{h}\underset{\substack{senw\approx w\\ w\to 0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left|h\right|}{h}\quad no\ existe$$

Por simetría de la función la derivada respecto de y en el origen tampoco existe,

$$f_y'\left(0,0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(0,h\right)-f\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\mathrm{sen}\left(h^2\right)}-0}{h}\underset{\substack{senw\approx w\\ w\to 0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left|h\right|}{h}\quad no\ existe$$

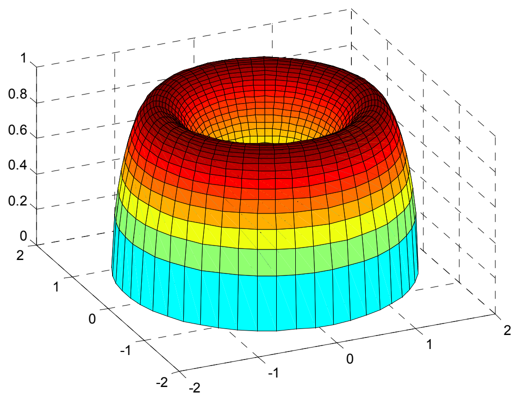
Solución c

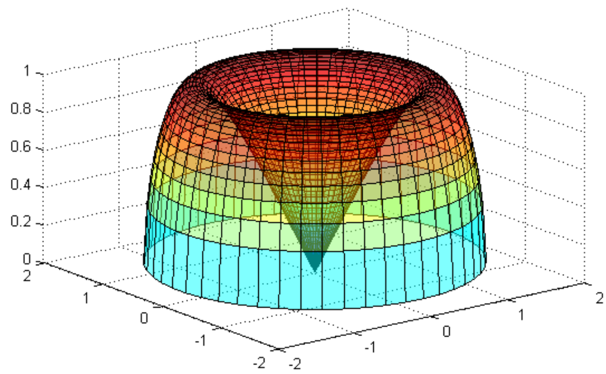
Aplicando el apartado anterior, la función no es diferenciable en el origen ya que no existen las derivadas parciales en dicho punto. En consecuencia, la función no es diferenciable en todo su dominio.

Nota: En los puntos $\left(x,y\right)$ del dominio en los que $sen\left(x^2+y^2\right)\neq 0$, la función es diferenciable al existir las derivadas parciales y ser continuas

$$f_x'\left(x,y\right)=\frac{x\cos\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{sen\left(x^2+y^2\right)}}\qquad f_y'\left(x,y\right)=\frac{y\cos\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{sen\left(x^2+y^2\right)}}$$

La gráfica de la función en el interior del círculo de radio $\sqrt{\pi}$ se muestra en la siguiente figura. Se puede observar que no es diferenciable en el origen.





Solución b

Como $e^{x^2+y^2}\geq 1$, las curvas de nivel son las curvas

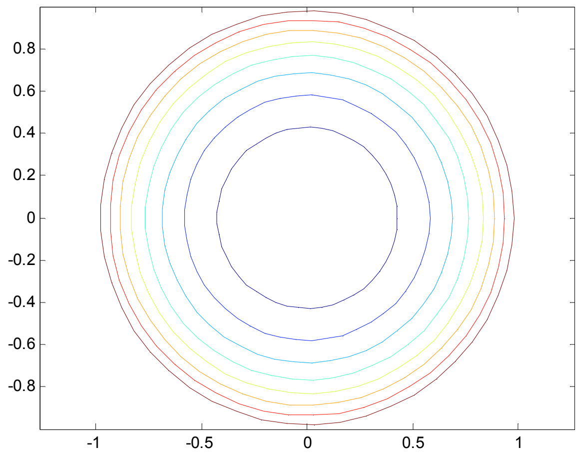
$$e^{x^2+y^2}=k\quad k\geq 1\Leftrightarrow x^2+y^2=\log k$$

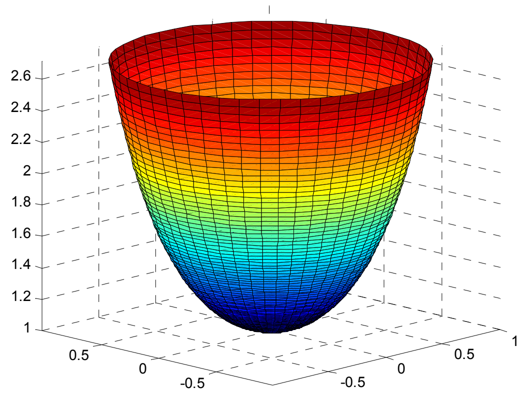
Se trata de circunferencias de centro (0,0) y radio $R=\sqrt{\log k}$ con $k\geq 1$.

El código para representar con Matlab estas curvas de nivel es el siguiente:

Nombre y Apellidos Núm.:

```
[R,T]=meshgrid(linspace(0,1),linspace(0,2*pi,50));
X=R.*cos(T);Y=R.*sin(T);Z=exp(X.^2+Y.^2);
contour(X,Y,Z)
axis equal
```





2

Dada la función $f\left(x,y\right)=\dfrac{y^2}{x}$

(a) Calcular, siempre que sea posible, la derivada direccional de la función en un punto P genérico de la curva $2x^2+y^2=c^2$ con $x\geq 0$ a lo largo de la normal exterior a dicha curva en P. Representa la curva y el vector normal en un punto cualquiera e interpreta el resultado obtenido según la interpretación de derivada direccional.

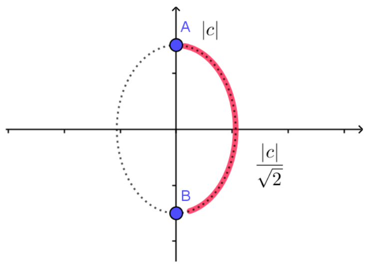
(b) Desde el punto (1, 1), para conseguir mayor crecimiento de la función, ¿qué convendría más, aumentar el valor de x o el de y?

Solución a

La curva $2x^2+y^2=c^2$ es una elipse de semiejes $\dfrac{\left|c\right|}{\sqrt{2}}$ y $\left|c\right|$ ya que se puede escribir de la forma

$$\frac{x^2}{\frac{c^2}{2}}+\frac{y^2}{c^2}=1$$

Los puntos donde se ha de calcular la derivada direccional son los puntos de la elipse dibujados en rojo en la figura ya que se debe considerar $x\geq 0$ y en los puntos A y B la función no está definida (su abscisa es cero).



En un punto genérico $\left(a,b\right)$ de la elpse con $a>0$, la función es diferenciable ya que

$$f_x^{'}\left(x,y\right)=-\frac{y^2}{x^2}\qquad\qquad f_y^{'}\left(x,y\right)=\frac{2y}{x}$$

Nombre y Apellidos Núm.:

las derivadas parciales existen y son continuas. Por lo tanto, la derivada direccional será:

$$D_u f\left(a,b\right) = \nabla f\left(a,b\right)\cdot \mathbf{u}$$

siendo $\mathbf{u}$ el vector normal unitario a la elipse en el punto $\left(a,b\right)$.

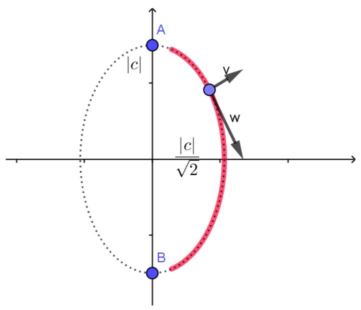
- Cálculo del **gradiente de la función** en $\left(a,b\right)$: $\nabla f\left(a,b\right) = \left(f_x'\left(a,b\right), f_x'\left(a,b\right)\right) = \left(-\dfrac{b^2}{a^2}, \dfrac{2b}{a}\right)$

- Cálculo del vector **normal a la elipse** en el punto $\left(a,b\right)$. La pendiente de la recta tangente a la elipse en el punto $\left(a,b\right)$ es la derivada

$$4x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{4x}{2y} \quad \Rightarrow \quad y'_{\left(a,b\right)} = -\frac{2a}{b} \quad \left(b \neq 0\right)$$

Por lo tanto la pendiente de la recta normal es $m_{normal} = \dfrac{b}{2a}$. Un vector normal será entonces: $v = \left(1, \dfrac{b}{2a}\right)$

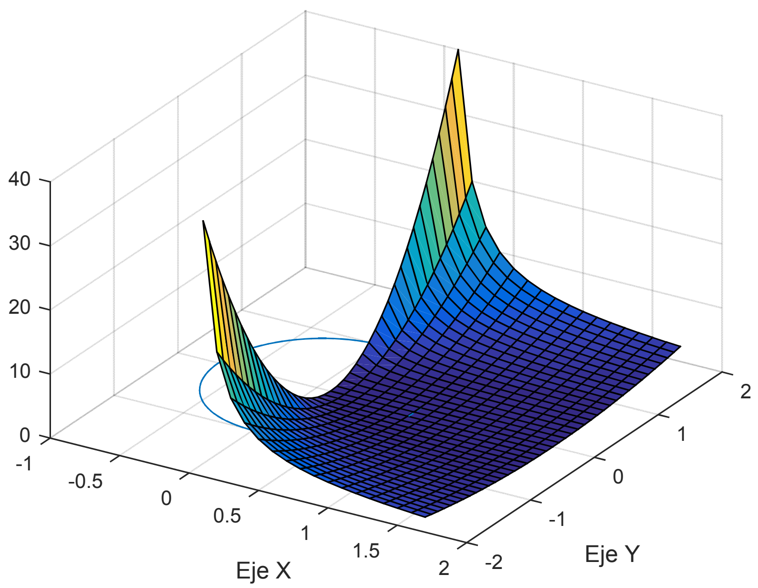
El vector normalizado a considerar es $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{\left|\mathbf{v}\right|}$ siendo $\left|\mathbf{v}\right| = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{4a^2}} = \dfrac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{2a}$



La derivada direccional será entonces:

$$D_u f\left(a,b\right) = \left(-\frac{b^2}{a^2}, \frac{2b}{a}\right)\cdot\left(1, \frac{b}{2a}\right)\frac{2a}{\sqrt{4a^2+b^2}} = \left(-\frac{b^2}{a^2} + \frac{2b^2}{2a^2}\right)\frac{2a}{\sqrt{4a^2+b^2}} = 0$$

La gráfica de la función es



Nombre y Apellidos Núm.:

Solución b

Desde el punto (1,1) , convendría aumentar la variable y para conseguir que f aumente de valor ya que $f_x^{'}(1,1) = -1 < f_y^{'}(x,y) = 1$, en la dirección del eje y la función crece (por ser la derivada positiva) y en la dirección del eje x decrece (por ser la derivada negativa).

Nota: Observando la función se ve claramente que es y la variable que hay que aumentar para conseguir un valor de la función mayor ya que el aumentar x, por estar en el denominador, hará disminuir la función.

3

(a) Dada la ecuación $e^{2z} + \cos(x)\ \cos(y) = 1$ y el punto P$(\pi / 2, 1, 0)$, se pide contestar los siguientes apartados:

1. Justificar si en las proximidades del punto P, la ecuación anterior, define a z como función de las variables x e y.
2. Calcular una recta normal a la superficie S en el punto P$(\pi / 2, 1, 0)$. Nota: Se debe justificar cómo se obtiene el vector director de esta recta.
3. Hallar un vector tangente a S en el punto P contenido en el plano $x = \pi / 2$. Nota: Se debe justificar en la respuesta por qué es un vector tangente.

(b) Calcular la expresión de $f(x,y) = x^2 \dfrac{\partial E}{\partial x} + \dfrac{\partial E}{\partial y}$ siendo $E = xg\left(\dfrac{y}{x}\right) + h\left(\dfrac{y}{x}\right)$ donde g y h son funciones derivables. Calcula $f(1,1)$ si $g(1) = 2h'(1) = 4$. Justifica las respuesas.

Solución a.1

Considerando $F(x,y,z) = e^{2z} + \cos x \cos y - 1$ y el punto P$(\pi / 2, 1, 0)$, se cumple

- $F\left(\dfrac{\pi}{2}, 1, 0\right) = e^0 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\cos 1 - 1 = 0$
- $F_x^{'}(x,y,z) = -\operatorname{sen}(x)\cos(y)$, $F_y^{'}(x,y,z) = -\cos(x)\ \operatorname{sen}(y)$, $F_z^{'}(x,y,z) = 2e^{2z}$ son funciones continuas en $\mathbb{R}^3$, en particular en el punto P.
- $F_z^{'}\left(\dfrac{\pi}{2}, 1, 0\right) = 2e^0 = 2 \neq 0$

Por lo tanto, aplicando el teorema de la función implícita, la ecuación $e^{2z} + \cos(x)\ \cos(y) = 1$ define una función implícita $z = f(x,y)$ diferenciable cumpliéndose: $z_x^{'} = -\dfrac{F_x^{'}}{F_z^{'}}$ $\qquad z_y^{'} = -\dfrac{F_y^{'}}{F_z^{'}}$

Solución a.2

Teniendo en cuenta que un vector normal a la superficie definida implícitamente por F en el punto P es

$$n = \nabla F\left(\frac{\pi}{2}, 1, 0\right) = \left(-\cos(1), 0, 2\right)$$

Nombre y Apellidos Núm.:

La recta normal pedida es

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} - \cos(1)\,t \\ y = 1 + 0t \\ z = 0 + 2t \end{array}\right\} \quad t \in \mathbb{R}$$

Justificación: Ver apuntes.

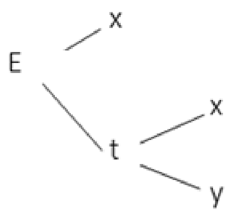
Solución a.3

El vector pedido es $T_1 = \left(0, 1, f'_y\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)\right) = \left(0, 1, -\dfrac{F'_y\left(\dfrac{\pi}{2}, 1, 0\right)}{F'_z\left(\dfrac{\pi}{2}, 1, 0\right)}\right) = (0, 1, 0)$

Justificación: Ver apuntes.

Solución b

Se tiene $E = xg(t) + h(t)$ con $t = \dfrac{y}{x}$. El árbol de dependiencia de variables es



Por lo tanto

$$E'_x = g(t) + g'(t)\frac{\partial t}{\partial x} + h'(t)\frac{\partial t}{\partial x} = g(t) - \frac{1}{x^2}g'(t) - \frac{1}{x^2}h'(t)$$

$$E'_y = g'(t)\frac{\partial t}{\partial y} + h'(t)\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{x}g'(t) + \frac{1}{x}h'(t)$$

Por lo tanto la función

$$f(x,y) = x^2\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} = x^2 g\left(\frac{y}{x}\right) - g'\left(\frac{y}{x}\right) - h'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}h'\left(\frac{y}{x}\right)$$

Sustituyendo en el punto (1,1)

$$f(1,1) = g(1) - g'(1) - h'(1) + g'(1) + h'(1) = g(1) = 4$$

Nombre y Apellidos Núm.:

Bloque 1 (25 de enero)

Enunciados y esquema de la resolución de los ejercicios en la que puede faltar las justificaciones de algunos pasos o la explicación que se pueden utilizar ciertas fórmulas o resultados.

1

(a) Calcular el módulo y argumento de $w = \dfrac{\left(-1+\sqrt{3}\ i\right)^{12} - \left(1-i\right)^{12}}{e^{1+\pi i}\left(2+2i\right)}$

(b) Calcular la función inversa de $f\left(x\right) = sen\left(2x\right)$ indicando el dominio donde ambas funciones son inversas. Deducir la fórmula que permite obtener la derivada de la función inversa $y = f^{-1}\left(x\right)$ conocida la de $y = sen\left(2x\right)$.

(c) Utilizando la función $y = -sen\left(2x\right)$, calcular una aproximación lineal de $-\operatorname{sen}\left(0.2\right)$ dando, justificadamente, una cota del error cometido con dicha aproximación.

Representa en una misma gráfica la función $y = -sen\left(2x\right)$ y la función utilizada para aproximar el valor anteriormente pedido.

Solución a)

$$w = \frac{\left(-1+\sqrt{3}\ i\right)^{12} - \left(1-i\right)^{12}}{e^{1+\pi i}\left(2+2i\right)} = \frac{\left(2e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^{12} - \left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^{12}}{e\ e^{\pi i}2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{2^{12}e^{8\pi i} - 2^{6}e^{-3\pi i}}{2\sqrt{2}e\,e^{\frac{5\pi}{4}}} =$$

$$= \frac{2^{12}+2^{6}}{2\sqrt{2}\ e}\ e^{-\frac{5\pi}{4}i} = \frac{2^{11}+2^{5}}{\sqrt{2}\ e}\ e^{-\frac{5\pi}{4}i} \Rightarrow \begin{cases} \left|w\right| = \dfrac{2^{11}+2^{5}}{\sqrt{2}\ e} \\ \arg\left(w\right) = -\dfrac{5\pi}{4} \equiv -\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Solución b)

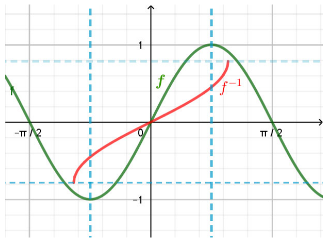
El dominio donde la función tiene inversa es $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ ya que en ese intervalo la funcion es inyectiva.

$$y = sen\left(2x\right) \Leftrightarrow arcseny = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}arcseny$$

La función inversa tiene por dominio $\left[-1,1\right]$ y su rango es $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

$$y = \frac{1}{2}arcsen\left(x\right)$$

Nombre y Apellidos Núm.:



Para obtener la derivada, conocida la derivada de f, utilizamos derivación implícita

$$y=\frac{1}{2}arcsen\left(x\right)\Leftrightarrow sen\left(2y\right)=x$$

$$\cos\left(2y\right)2y'=1\Leftrightarrow y'=\frac{1}{2\cos\left(2y\right)}=\frac{1}{2\sqrt{1-sen^2\left(2y\right)}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

Solución c)

Se considera el polinomio de Taylor de grado 1 de $f\left(x\right)=-\operatorname{sen}\left(2x\right)$. Como $-sen\left(0.2\right)=f\left(0.1\right)$ se considera el punto a=0

$$f'\left(x\right)=-2\cos\left(2x\right)\qquad\rightarrow\qquad f'\left(0\right)=-2$$

$$T_1\left(x\right)=f\left(0\right)+\frac{f'\left(0\right)}{1!}x=0-2x=-2x$$

Considerando la expresión del resto

$$f\left(x\right)=-2x+R_1\left(x\right)\quad siendo\ R_1\left(x\right)=\frac{f''\left(t\right)}{2!}x^2\qquad \text{con } t\ entre\ 0\ y\ x$$

$$f\left(0.1\right)=-2\cdot 0.1+\frac{4sen\left(2t\right)}{2!}0.1^2\qquad t\ entre\ 0\ y\ 0.1$$

El valor aproximado es -0.2 y una cota del error es

$$\left|R_1\right|=\left|\frac{4sen\left(2t\right)}{2!}0.1^2\right|\underset{senu\le 1}{\le}\frac{4}{2}\cdot 0.01=0.02\qquad t\ entre\ 0\ y\ 0.1$$

Nota: Es posible obtener una aproximación mejor considerando una acotación del seno más ajustada.

2

(a) Escribir el código Matlab para calcular el valor aproximado de $\sqrt{1.2}$ con los 7 primeros términos del polinomio de Taylor de $f\left(x\right)=\sqrt{1-2x}$ en un punto adecuado. Nota: No se puede utilizar la herramienta taylortool y se tiene que calcular el polinomio previamente. Nota: Este código debe escribirse de forma que sea fácilmente adaptable a cualquier orden del polinomio conocida la derivada enésima en el punto 0.

(b) Obtener el desarrollo en serie de potencias en el origen de la función $g\left(x\right)=\frac{3x-1}{x^2+x-6}$ indicando su campo de convergencia.

(c) Calcular el carácter y la suma de las siguientes series

Nombre y Apellidos Núm.:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+3}{n+2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}3\frac{2^{2n-1}}{\left(-9\right)^n}$$

(d) Determinar cuál de los dos infinitésimos siguientes es de orden superior para x=0

$$f\left(x\right)=\operatorname{sen}\left(x^3\right)\left(e^{2x}-1\right) \qquad g\left(x\right)=\log\left(1+4x^2\right)$$

Solución a)

Se calcula el polinomio de Taylor de grado 7 de la función $f\left(x\right)=\sqrt{1-2x}$ en el punto 0

$$f\left(x\right)=\left(1-2x\right)^{1/2} \qquad \to f\left(1\right)=1$$

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(1-2x\right)^{-1/2}\left(-2\right)=-\left(1-2x\right)^{-1/2} \qquad \to f'\left(0\right)=-1$$

$$f''\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(1-2x\right)^{-3/2}\left(-2\right)=-\left(1-2x\right)^{-3/2} \qquad \to f''\left(0\right)=-1$$

$$f'''\left(x\right)=\frac{3}{2}\left(1-2x\right)^{-5/2}\left(-2\right)=-3\left(1-2x\right)^{-3/2} \qquad \to f'''\left(0\right)=-3$$

$$f^{(4}\left(x\right)=\frac{3\cdot5}{2}\left(1-2x\right)^{-7/2}\left(-2\right)=-3\cdot5\left(1-2x\right)^{-7/2} \qquad \to f^{(4}\left(x\right)=-3\cdot5$$

$$f^{(5}\left(x\right)=\frac{3\cdot5\cdot7}{2}\left(1-2x\right)^{-9/2}\left(-2\right)=-3\cdot5\cdot7\left(1-2x\right)^{-9/2} \qquad \to f^{(5}\left(0\right)=-3\cdot5\cdot7$$

$$f^{(6}\left(x\right)=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{2}\left(1-2x\right)^{-11/2}\left(-2\right)=-3\cdot5\cdot7\cdot9\left(1-2x\right)^{-11/2} \qquad \to f^{(6}\left(0\right)=-3\cdot5\cdot7\cdot9$$

$$f^{(7}\left(x\right)=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2}\left(1-2x\right)^{-13/2}\left(-2\right)=-3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\left(1-2x\right)^{-13/2} \to f^{(7}\left(0\right)=-3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11$$

El polinomio de Taylor es

$$T_7\left(x\right)=1-\frac{x}{1!}-\frac{1}{2!}x^2-\frac{3}{3!}x^3-\frac{3\cdot5}{4!}x^4-\frac{3\cdot5\cdot7}{5!}x^5-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{6!}x^6-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{7!}x^7$$

El valor aproximado calculado con Matlab será: $T_7\left(-0.1\right)$

```
clear all
x=-0.1;format long
%Grado del polinomio
n=7;
%Vector con los exponentes de las potencias de x
exp=1:n;
%Calculo de los coeficientes
der(1)=-1;der(2)=-1;
for k=3:n
   der(k)=der(k-1)*(2*k-3)
end
%Sumandos del polinomio
sumandos=[1 der.*x.^exp./factorial(exp)]
%Valor del polinomio
valor=sum(sumandos)
```

Solución b

Nombre y Apellidos Núm.:

$$g(x)=\frac{3x-1}{x^2+x-6}=\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+3}=\frac{1/2}{\frac{x}{2}-1}+\frac{2/3}{\frac{x}{3}+1}=\frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}+\frac{2}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{3}}$$

$$=\underbrace{\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}}_{|x|<2}+\underbrace{\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{3^n}}_{|x|<3}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2^{n+1}}+\frac{1(-1)^n}{3^{n+1}}\right)x^n \qquad |x|<2$$

Solución c. La primera serie no es convergente porque no cumple la condición necesaria de convergencia, la segunda es una serie geométrica de razón -4/9 que es convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+3}{n+2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}3\frac{2^{2n-1}}{(-9)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\left(-\frac{4}{9}\right)^n=\frac{-\frac{3\cdot 2}{9}}{1+\frac{4}{9}}=\frac{-6}{13}$$

Solución d. Aplicando equivalencias

$$f(x)=\operatorname{sen}(x^3)(e^{2x}-1)\approx x^3\cdot 2x=2x^4$$

$$g(x)=\log(1+4x^2)\approx 4x^2$$

La función f es de orden 4 y la función g es de orden 2 por lo tanto f es de orden mayor.

Bloque 2 (25 de enero)

Enunciados y esquema de la resolución de los ejercicios en la que puede faltar las justificaciones de algunos pasos o la utilización de ciertas fórmulas o resultados.

1

(a) Supongamos que $f(x)=f(-x)$, $f(x)\le 0$, $g(-x)=-g(x)$, $\int_0^2 f(x)\,dx=-4$, $\int_0^2 |g(x)|\,dx=5$.

Evalúa cada integral justificando la respuesta:

$$I_1=\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \qquad I_2=\int_{-2}^{2}|f(x)|\,dx \qquad I_3=\int_{-2}^{2} g(x)\,dx \qquad I_4=\int_{-2}^{2}|g(x)|\,dx$$

$$I_5=\int_{-2}^{2}\left[f(x)+f(-x)\right]dx \qquad I_6=\int_{0}^{2}\left[2g(x)+3f(x)\right]dx$$

(b) Calcular el valor de las siguientes integrales

$$\int_0^{\pi} x\cos(x^2)\,dx \qquad \int\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+2)}dx$$

(c) Calcular el área del reciento D formado por los puntos (x,y) del plano que verifican $x^2+y^2\le 8$, $y\ge\sqrt{2x}$. Escribir el código Matlab para representar las curvas que delimitan la región D.

Solución a

$$I_1=\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=2\int_0^2 f(x)\,dx=-8 \qquad I_2=\int_{-2}^{2}|f(x)|\,dx=8$$

Nombre y Apellidos Núm.:

$$I_3 = \int_{-2}^{2} g(x)\,dx = 0 \qquad I_4 = \int_{-2}^{2} \left|g(x)\right| dx = 10$$

$$I_5 = \int_{-2}^{2} \left[f(x) + f(-x)\right] dx = 2\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = -16 \qquad I_6 = \int_{0}^{2} \left[2\left|g(x)\right| + 3\left|f(x)\right|\right] dx = 2\cdot 5 + 3\cdot 4$$

Solución b

$$\int_0^{\pi} x\cos\left(x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 2x\cos\left(x^2\right)dx = sen\left(x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = sen\left(\pi^2\right)$$

$$\int \frac{x^2 - x + 6}{(x-1)\left(x^2+2\right)}dx = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{-x-2}{x^2+2}dx = 2\log|x-1| - \int \frac{x}{x^2+2}dx - \int \frac{2}{x^2+2}dx$$

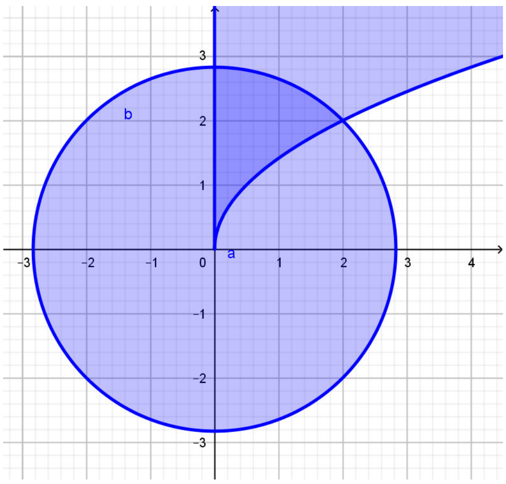
$$= 2\log|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx - \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}dx = 2\log|x-1| - \frac{1}{2}\log\left(x^2+2\right) - \sqrt{2}\int \frac{1/\sqrt{2}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx$$

$$= 2\log|x-1| - \frac{1}{2}\log\left(x^2+2\right) - \sqrt{2}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Solución c

El punto de corte de las dos curvas es (2,2)

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 8 \\ y &= \sqrt{2x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{x=2} \xrightarrow{y=\sqrt{2x}} \boxed{y=2} \\ x = -4 \text{ NO} \end{array}$$



$$\int_0^2 \left(\sqrt{8-x^2} - \sqrt{2x}\right)dx = \underbrace{\int_0^2 \sqrt{8-x^2}\;dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^2 \sqrt{2x}\;dx}_{I_2} =$$

Nombre y Apellidos Núm.:

$$I_1=\int_0^2 \sqrt{8-x^2}\;dx \underset{\substack{x=2\sqrt{2}\operatorname{sen} t\\ dx=2\sqrt{2}\cos t\,dt\\ \\ x=0\quad t=0\\ x=2\quad t=\pi/4}}{=} \int_0^{\pi/4} 8\cos^2\left(t\right)dt=\int_0^{\pi/4} 8\,\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=4\left[t+\frac{\operatorname{sen}\left(2t\right)}{2}\right]_{t=0}^{t=\pi/4}=4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\pi+2$$

$$I_2=2\sqrt{2}\,\frac{x^{3/2}}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=2}=\frac{8}{3}$$

El área pedida es $I=\pi+2-\dfrac{8}{3}=\pi-\dfrac{2}{3}\quad u.a.$

2

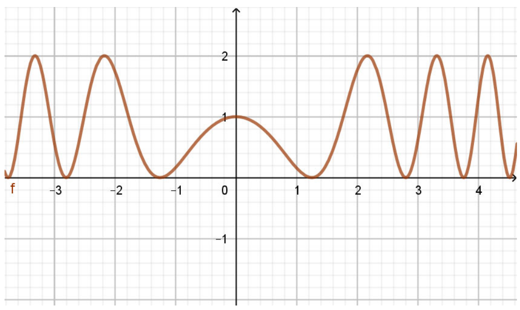
(a) Se considera la función 2-periódica definida de la forma

$$f(t)=\left|2t\right|-1 \text{ siendo } t\in\left[-1,1\right]$$

Calcular la serie de Fourier de esta función indicando los valores de t para los cuáles converge a la función $f(t)$. Justifica la respuesta y explicar por qué es posible calcular la serie de Fourier.

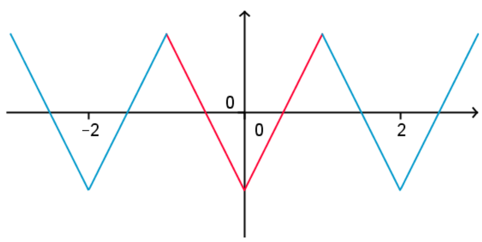
(b) Calcular la integral de la función $f\left(x\right)=\dfrac{x}{2}$ en el intervalo $\left[1,2\right]$ considerando una suma de Riemann regular eligiendo como punto de cada subintervalo el extremo superior.

(c) Determinar el código Matlab para calcular una cota inferior de la integral $\int_0^1\left[sen\left(-x^2\right)+1\right]dx$ mediante una suma de Riemann de 10 subintervalos regulares. La siguiente figura muestra la gráfica de la función



Solución a

La función es par y es continua por lo tanto se cumplen las condiciones de Dirichlet para ser desarrollable en serie de Fourier



Nombre y Apellidos Núm.:

Se tiene: $T = 2 = 2p \qquad p = 1 \quad \omega = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

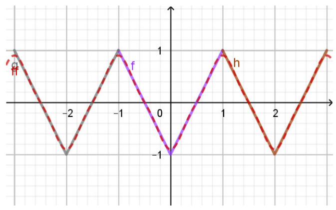
$$a_o = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,dt = 2\int_0^1 (2t-1)dt = 2\left(t^2 - t\right)_{t=0}^{t=1} = 0$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos(nwt)dt = 2\int_0^1 (2t-1)\cos(n\pi t)dt =$$

$$a_n = \frac{4(-1)^n - 4}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & si\ n\,es\ par \\ \dfrac{-8}{n^2\pi^2} & si\ n\,es\ impar \end{cases}$$

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8}{(2n-1)^2\pi^2}\cos((2n-1)\pi t)$$

Aplicando el teorema de Dirichlet la serie converge a la función para todo valor de t real.



Solución b

Como la función $f(x) = \dfrac{x}{2}$ es integrable, se puede calcular la integral de la siguiente forma

$$\int_1^2 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

considerando

$$f(x) = \frac{x}{2} \qquad \Delta x = \frac{2-1}{n} \qquad c_i = 1 + i\,\Delta x$$

Es decir,

$$\int_1^2 \frac{x}{2}dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Solución c

Como la función $f(x) = sen(-x^2) + 1$ es decreciente en [0,1], se conseguirá una cota inferior considerando el extremo superior de cada subintervalo. El código Matlab será:

```
n=10;incx=1/n;
ci=incx:incx:1;
f=inline('sin(-x.^2)+1');
aprox=sum(f(ci))*incx
```

Nombre y Apellidos Núm.:

Bloque 3 (25 de enero)

Enunciados y esquema de la resolución de los ejercicios en la que puede faltar las justificaciones de algunos pasos o la utilización de ciertas fórmulas o resultados.

1

(a) Sea g una función derivable. Se considera la función definida de la forma $f(x,y)=x^3 g(x^2-y)$.

Se pide calcular:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+2x^2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Considera un ejemplo de función g y escribir a partir de ella la función f.

(b) Definir extremo relativo de una función de dos variables y calcular estos extremos para la función $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$. Escribir el código Matlab para representar las curvas de nivel de la función junto con los puntos críticos.

Solución a

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2 g(x^2-y)+x^3 g'(x^2-y)2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-x^3 g'(x^2-y)$$

Sustituyendo se tiene

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+2x^2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x^3 g(x^2-y)+2x^5 g'(x^2-y)-2x^5 g'(x^2-y)=3f(x,y)$$

Una función $g(t)=sen(t)$ y entonces la función f sería $f(x,y)=x^3 g(x^2-y)=x^3 sen(x^2-y)$.

Solución b

Como f es diferenciable en todo su dominio (el plano), se tiene

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x,y)=3x^2+3y^2-15=0 \rightarrow x^2+y^2-5=0 \\ f'_y(x,y)=6xy-12=0 \rightarrow \boxed{y=\dfrac{2}{x}} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x^2+\dfrac{4}{x^2}-5=0 \\ x^4-5x^2+4=0 \\ x^2=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4\\1\end{cases} \\ x=\pm 2 \quad x=\pm 1 \end{array}$$

Los puntos posibles son

$$P(2,1)\ \ Q(-2,-1) \qquad R(1,2)\ \ S(-1,-2)$$

Utilizando el método del hessiano, se tiene que

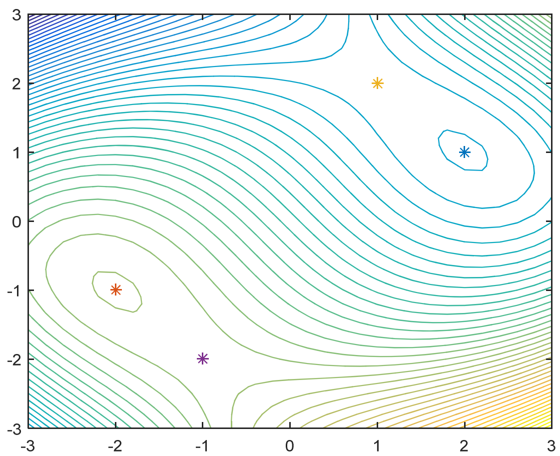
$$H=\begin{pmatrix}6x & 6y\\ 6y & 6x\end{pmatrix} \qquad |H|=36(x^2-y^2)$$

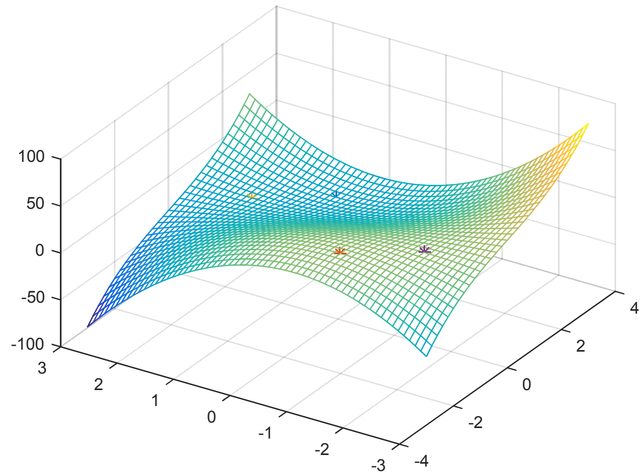
Punto	$\lvert H\rvert=36(x^2-y^2)$	$f''_{xx}(x,y)=6x$	Extremo
$P(2,1)$	$\lvert H\rvert=36(4-1)>0$	12, Positiva	Mínimo

Nombre y Apellidos Núm.:

Punto	$\lvert H\rvert = 36\left(x^2 - y^2\right)$	$f''_{xx}\left(x,y\right) = 6x$	Extremo
$Q\left(-2,-1\right)$	$\lvert H\rvert = 36\left(4-1\right) > 0$	12, Positiva	Mínimo
$R\left(1,2\right)$	$\lvert H\rvert = 36\left(1-4\right) < 0$		Punto de silla
$S\left(-1,-2\right)$	$\lvert H\rvert = 36\left(1-4\right) < 0$		Punto de silla

```
%figura de la izquierda
[X,Y]=meshgrid(-3:0.2:3,-3:0.1:3);
Z=X.^3+3*X.*Y.^2-15*X-12*Y
contour(X,Y,Z,40)
hold on
plot3(2,1,0,'*')
plot3(-2,-1,0,'*')
plot3(1,2,0,'*')
plot3(-1,-2,0,'*')
hold off
```





2

(a) Indicar si los dos vectores $\mathbf{T}_1 = \left(1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\mathbf{T}_2 = \left(0, 1, \sqrt{2}\right)$ son tangentes a la superficie $z = \sqrt{4 - x^2 - y}$ en el punto $\left(1, 1, \sqrt{2}\right)$.

(b) Dada la función $f\left(x,y\right) = \dfrac{x^2 + y^2}{x + y + 1}$, se pide

1. Determinar si f es diferenciable en el punto (1,3) justificando la respuesta. Sin hacer las derivadas, ¿se cumple $f''_{xy}\left(1,3\right) = f''_{yx}\left(1,3\right)$? Justificar la respuesta.
2. Calcular y representar la curva de nivel que pasa por el punto (1,3).
3. Determinar el gradiente de f en el punto (1,3). ¿Es ortogonal el gradiente a la curva de nivel que pasa por dicho punto? Comprobar que es así si la respuesta es afirmativa o justificar la razón por la que no se cumple.

Nombre y Apellidos Núm.:

4. Determinar la derivada direccional de la función en el punto (1,3) en la dirección que une el punto (1,3) con el (4,7). En esta dirección, ¿el valor de f aumenta o disminuye respecto al valor de $f(1,3)$?

5. Calcular mediante la diferencial un valor aproximado de $f(1.1,\ 2.8)$.

Solución a

Teniendo en cuenta que

$$z_x^{'} = \frac{-2x}{2}\left(4-x^2-y\right)^{-1/2} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y}} \qquad \rightarrow z_x^{'}(1,1) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$z_y^{'} = \frac{1}{2}\left(4-x^2-y\right)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2-y}} \qquad \rightarrow z_y^{'}(1,1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

No son vectores tangentes a la superficie en el punto (ver justificación en apuntes).

Solución b.1

La función es diferenciable en el punto (1,3) por existir las derivadas parciales en el punto

$$f_x^{'}(x,y) = \frac{2x(x+y+1)-(x^2+y^2)}{(x+y+1)^2} \rightarrow f_x^{'}(1,3) = \frac{10-10}{5^2} = 0$$

$$f_y^{'}(x,y) = \frac{2y(x+y+1)-(x^2+y^2)}{(x+y+1)^2} \rightarrow f_y^{'}(1,3) = \frac{30-10}{5^2} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

y tener las derivadas parciales primeras continuas en dicho punto (en los puntos en los que las derivadas no son continuas es en aquellos (x,y) en los que $x+y+1=0$). La igualdad de las derivadas cruzadas se cumple aplicando el teorema de Swartz (comprobar las hipótesis para justificar la respuesta).

Solución b.2

La curva de nivel que pasa por el punto (1,3) es

$$f(x,y) = f(1,3) \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{x+y+1} = 2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 2x+2y+2$$

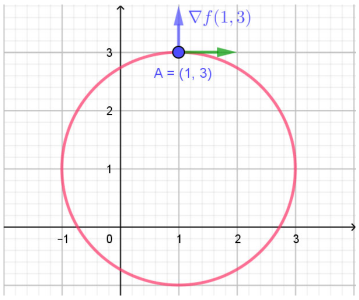
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

La ecuación es la de una circunferencia de centro (1,1) y radio 2.

Solución b.3

El gradiente es $\nabla f(1,3) = \left(0,\frac{4}{5}\right)$. Se puede ver que este vector gradiente es ortogonal a la curva de nivel ya que el vector tangente a la curva de nivel (circunferencia de centro (1,1) y radio 2) es horizontal y el vector gradiente es perpendicular a él.

Nombre y Apellidos Núm.:



Solución b.4

Como la función es diferenciable en el punto (1,3), la derivada direccional se calculará de la forma $D_u f(1,3) = \nabla f(1,3) \bullet u$ siendo u el vector unitario que une (1,3) con (4, 7), es decir,

$$u = \frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Por lo tanto,

$$D_u f(1,3) = \nabla f(1,3) \bullet u = \left(0, \frac{4}{5}\right) \bullet \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{16}{25}$$

Al ser la derivada direccional positiva la función desde el punto (1,3) crece en esa dirección.

Solución b.5

Como la función es diferenciable se tiene que $\Delta z \approx dz$ para valores de incremento de x e incremento de y pequeños.

$$\Delta z \approx dz$$

$$\Delta z = f(1.1,\ 2.8) - f(1,3)$$
$$dz = f_x'(1,3)\cdot 0.1 - f_y'(1,3)\cdot 0.2$$

Se puede calcular el valor $f(1.1,\ 2.8)$

$$f(1.1,\ 2.8) - f(1,3) \approx f_x'(1,3)\cdot 0.1 - f_y'(1,3)\cdot 0.2$$

$$f(1.1,\ 2.8) - 2 \approx 0\cdot 0.1 - \frac{4}{5}\cdot 0.2$$

$$f(1.1,\ 2.8) \approx 2 - \frac{4}{5}\cdot 0.2 = 0.4$$

Bloque 1 (17 de febrero)

1

(a) Ordena los siguientes números complejos

$$z_1 = e^{3+4i} \qquad z_2 = \left(-\sqrt{3}+i\right)^5 \qquad z_3 = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{2}}(1-i)}{(2i)^{10}}$$

1. En orden creciente a sus módulos
2. En orden creciente a sus argumentos principales.

(b) Se consideran las funciones f y g con derivadas primeras y segundas continuas para las que se sabe que

Nombre y Apellidos Núm.:

$$f(3)=5 \qquad f'(3)=2 \qquad f''(3)=3$$

$$g(5)=9 \qquad g'(5)=4 \qquad g''(5)=-1$$

Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de $h(x)=(g\circ f)(x)$ en el punto $a=3$.

(c) Determinar la falsedad o certeza de las siguientes afirmaciones

Afirmación 1: Dadas las curvas

$$4y^3-x^2y-x+5y=0 \qquad x^4-4y^3+5x+y=0$$

las rectas tangentes en el origen son perpendiculares.

Afirmación 2: La recta tangente a la curva $\log(xy+1)=sen\left(\sqrt{3}\,x+y\right)$ en el punto (0,0) forma $\pi/6$ radianes con el eje de abscisas.

(d) Se quiere aproximar $\log(1.44)$ con el polinomio de Taylor de grado 2 de las funciones

$$f(x)=\log(1+x) \qquad g(x)=\log(x^2)$$

en los puntos $a=0$ y $a=1$ respectivamente. Determinar una cota del error cometido en la aproximación para cada uno de los polinomios.

(e) Calcula, utilizando la definición, la derivada de la función $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

(f) Dibuja la gráfica de la función $y=arcsen(2x)$ indicando su dominio y justificando la respuesta a partir de la gráfica de la función $y=arcsen(x)$.

2

(a) Estudiar el carácter de las siguientes series y en caso afirmativo calcular su suma

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n+1}}{3^{3n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\log\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

(b) Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}3^n\,(x+1)^n$

a. Justifica si es geométrica. En caso afirmativo razona cuál es su campo de convergencia y calcula el valor de la suma.

b. Escribe el código Matlab para representar la función suma y la suma de los 10 primeros términos.

c. Calcula el desarrollo de la función derivada.

Nombre y Apellidos

Núm.:

Bloque 2 (17 de febrero)

1

(a) Calcular las primitivas de las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \frac{1+tg^2x}{tgx} \qquad f_2(x) = x\,arctg(x) \qquad f_3(x) = \sqrt{2-x^2}$$

(b) Calcular el área de la región del plano XY limitada entre $x = 0$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$ y las gráficas de $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$ y $g(x) = 1 - 2\operatorname{sen} x$.

(c) Se considera una función continua en el intervalo $[a,b]$ cumpliendo $\int_a^b f(x)dx = 0$. Razonar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. En el caso de que sean verdaderas debes justificar la respuesta y en el caso de que sea falsa, poner un ejemplo que muestre que no se cumple.

1. $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.
2. $\int_a^b |f(x)|\, dx = 0$
3. El valor medio de la función $f(x)+1$ en el intervalo $[a,b]$ es 1.

2

(a) ¿Es integrable la función $f(x) = x$ en [1,3]? Justifica la respuesta. Utiliza la definición de integral definida para calcular el varlor de $\int_1^3 x\ dx$. Nota: Considera una suma de Riemann superior.

(b) Considera la integral $I = \int_1^3 e^{x^2} dx$. Escribe el código Matlab para encontrar una cota superior de I utilizando una suma de Riemann correspondiente a una partición regular de 20 subintervalos. Justifica la respuesta.

Nombre y Apellidos Núm.:

3

(c) Determinar el periodo propio y la frecuencia angular de la función $f(x) = \cos(20\pi x) + 0.6\cos(60\pi x) - 0.2\,\text{sen}(140\pi x)$, justificando la respuesta.

(d) Dada la función $f(t) = 3t, \quad 0 < t < \pi$, se pide desarrollar $f(t)$ en serie de Fourier de cosenos y estudiar la convergencia de la serie en el intervalo $[0,\pi]$. ¿Cuál es el valor al que converge la serie en el punto $-\frac{\pi}{2}$?, ¿y en el punto 2π?

Bloque 3 (17 de febrero)

1

(c) ¿La ecuación $z^3 + 2xz + yz - x = 0$ define una función $z = f(x,y)$ diferenciable en un entorno del punto P(1,-2)? Justificar la respuesta. Se pide calcular también el gradiente de la función en el punto P y el plano tangente a z en P(1,-2,f(1,-2)).

(d) Determinar los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^3 + y^3$ en el conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \le 1\}$. Representa con Matlab la gráfica de la funicón en D.

(e) ¿Es diferenciable la función $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en el punto (0,0)? Representa las curvas de nivel de la funicón y haz una representación aproximada de la superficie (sin utlizar Matlab)

(f) Se considera la función $z = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, haciendo un cambio a coordenadas polares (r,θ), comprueba si se verifica $\frac{\partial z}{\partial \theta} = 1$.

2

Dada la función $f(x,y) = \frac{\cos^2(xy)}{x}$, determinar

(a) Las direcciones donde se verifica que la derivada direccional de f en el punto A(1,0) es 1.

(b) Comprueba que el vector grandiente en el punto A(1,0) es ortogonal a la curva de nivel que pasa por el punto A(1,0).

(c) Determina un vector tangente a la gráfica de la función en el punto (1,0,1) contenido en un plano paralelo al x=y. Justifica gráficamente por qué es un vector tangente.

(d) Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 de la función en el punto (1,0).