:

Prueba 18 de octubre

1

Para representar la función $f(x)=\dfrac{x^3+sen(x)}{x+1}$ en el intervalo [-2,2] se puede utilizar el siguiente código

a) Ninguna de las anteriores

b) f=inline('(x^3+sin(x))/(x+1)')
x=-2:0.2:2; plot(x,f(x))

c) x=0:0.1:4; x1=x-2;
plot(x1,(x1.^3+sin(x1))./(x1+1))

d) x=-2:0.2:2;
plot(x,(x^3+sin(x))/(x+1))

Solución: c)

2

Una fábrica vende q miles de artículos fabricados cuando su precio es de p euros/unidad. La relación entre p y q es $q^2-2q\sqrt{p}-p^2-31=0$.

Si el precio p del artículo es de 9 euros y se incrementa a una tasa de 0.20 euros por semana, se pide calcular la rapidez a la que cambia la cantidad de unidades q, vendidas por semana cuando el precio es de 9 euros.

Seleccione una:

a) 0.206 miles unidades/semana

b) Ninguna de las anteriores

c) 0.106 miles unidades/semana

d) 0.1 unidades/semana

Solución

Derivando respecto de t

$$2q\frac{dq}{dt}-2\frac{dq}{dt}\sqrt{p}-\frac{q}{\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}-2p\frac{dp}{dt}=0 \qquad (1)$$

Cuando $p=9$, el valor de q es

$$q^2-6q-112=0\Rightarrow q=\frac{6+\sqrt{36+448}}{2}=14$$

Nombre y Apellidos: Núm:

Sutituyendo en (1) los valores $p = 9$, $q = 14$, $\dfrac{dp}{dt} = 0.2\dfrac{euros}{semana}$ se obtiene

$$\frac{dq}{dt} \simeq 0.206\frac{miles\ \ unidades}{semana}$$

3

Calcula el valor que proporciona el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $y = \cos x$ en el punto $a = \dfrac{\pi}{4}$, como aproximación al valor de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Introduce el valor con 4 cifras decimales.

Solución

El polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $a = \dfrac{\pi}{4}$ es

$$T_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$f\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx T_2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

Código para obtener el valor:

```
a=pi/4;x=pi/5
cos(a)-sin(a)*(x-a)-1/2*cos(a)*(x-a)^2
%El resultado pedido es 0.8095
```

Prueba 27 de octubre

En todos los ejercicios se deberá explicar y justificar la respuestas. Tiempo: 2 horas

1

a) Dos curvas se dicen que son ortogonales en un punto si sus rectas tangentes son perpendiculares. Determinar si las siguientes curvas son ortogonales en el punto $(1,1)$

$$y^2(2 - x) = x^3$$

$$y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 1$$

b) ¿Con qué rapidez baja el nivel de agua contenida en un depósito cilíndrico si estamos vaciándolo a razón de 300 litros por minuto?

Nombre y Apellidos: Núm:

c) Un punto en el plano se mueve a lo largo de la curva de ecuación $y = \sqrt{sen^2(x)+1}$, de manera que la abscisa respecto al tiempo t es $x = \log(2t-1)$. Calcular la variación de la ordenada respecto del tiempo, $\frac{dy}{dt}$, cuando $t = 1$.

Apartado a)

Calculamos las pendientes de las rectas tangentes a ambas curvas derivando implícitamente:

Curva $C_1 \equiv y^2(2-x) = x^3$

$2yy'(2-x) - y^2 = 3x^2$. En el punto (1, 1)

$$2y' - 1 = 3 \rightarrow y' = 2$$

Luego la pendiente de la recta tangente a la curva C_1 en el punto (1,1) es $m_1 = 2$

Curva $C_2 \equiv y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 1$

$2yy' + \frac{1}{3}(xy)^{-2/3}(y + xy') = 2x$. En el punto (1, 1)

$$2y' + \frac{1}{3}(1+y') = 2 \rightarrow \frac{7}{3}y' = 2 - \frac{1}{3} \rightarrow y' = \frac{5}{7}$$

Luego la pendiente de la recta tangente a la curva C_2 en el punto (1,1) es $m_2 = \frac{5}{7}$

Como $m_1 m_1 \neq -1$, las curvas no son ortogonales.

Apartado b)

Se cumple que $V = \pi r^2 h$ siendo r el radio del cilindro, que es constante, y h su altura. Al vaciarse el volumen y la altura varían con el tiempo,

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} \quad \rightarrow \quad -300 = \pi r^2 \frac{dh}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{-300}{\pi r^2} \frac{dm}{\text{minuto}}$$

Nota: $1 litro = 1 dm^3$

Apartado c)

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \left(\frac{1}{2}(sen^2 x + 1)^{-1/2} 2 sen x \cos x\right) \frac{2}{2t-1}$$

Cuando $t = 1$, $x = \log(1) = 0$ luego sustituyendo en la expresión anterior se tendrá:

$$\frac{dy}{dt} = 0 \cdot 2 = 0$$

Nombre y Apellidos: Núm:

Nota: Este ejercicio es idéntico al propuesto número 8a, relaizado en clase el día 5 de octubre.

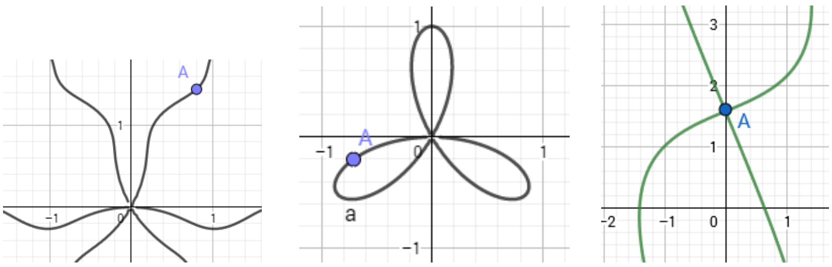
p

2

a) Deducir la derivada de la función $y = arcsen\left(x\right)$.

b) Dada la función $f\left(x\right) = \frac{2}{x}$, calcular utilizando la definición de derivada el valor de $f'\left(a\right)$ siendo $a > 0$. Calcula el área del triángulo determinado por los ejes coordenados y la recta tangente a la función en el punto a.

c) Determinar cuáles de las siguientes curvas son las gráficas de una función y dependiente de x en las proximidades del punto A señalado en la figura. Justifica la respuesta



Justificar las respuestas.

Puntuación: 2+3+2

Apartado b) Realizado en clase el 2 de octubre.
Apartado a) Propuesto el día 28 de septiembre y realizado en clase el día 2 de octubre.

Solución apartado c)

Las dos primeras figuras representan curvas en las que en un entorno del punto A se define una función y dependiente de x.

3

a) Se considera la función $f\left(x\right) = x\log x$. Utilizando un polinomio de Taylor de grado 2 calcula el valor aproximado de $f\left(1.1\right)$ dando una cota del error y determinando si la aproximación que daría dicho polinomio es por exceso o por defecto.

b) De una función $f\left(x\right)$ se conoce que su derivada enésima es

Nombre y Apellidos: Núm:

$f^{(n}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(x-2)^{-n}$. Se pide calcular el número de términos necesarios para aproximar $f(1)$ mediante un polinomio de Taylor en el punto $a=0$ con un error menor que 10^{-2}.

Puntuación: 3+3

Apartado a) Como el valor pedido es $f(1.1)$ se considera $a=1$. Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} f(x) &= x\log x && \to f(1)=0 \\ f'(x) &= \log x + 1 && \to f'(1)=1 \\ f''(x) &= \frac{1}{x} && \to f''(1)=1 \end{aligned}$$

El polinomio de Taylor es

$$T_2(x) = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2$$

El valor aproximado pedido es

$$f(1.1) \approx T_2(1.1) = (1.1-1) + \frac{1}{2}(1.1-1)^2 = 0.105$$

El error de la aproximación es

$$R_2(1.1) = \frac{f'''(t)}{3!}(1.1-1)^3 = \frac{-1}{6t^2}0.1^3 \quad 1<t<1.1$$

Al ser negativo, la aproximación dada de 0.105 es por exceso. Una cota del error es

$$|R_2(1.1)| \le \frac{1}{6\cdot 10^3}$$

Apartado b)

Teniendo en cuenta que

$$R_n(1) = \frac{(-1)^n n!(t-2)^{-n-1}}{(n+1)!}(1-2)^{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(t-2)^{n+1}} \qquad 0<t<1$$

$$|R_n(1)| = \left|\frac{1}{(n+1)(t-2)^{n+1}}\right| < \frac{1}{n+1} \qquad 0<t<1$$

Para asegurar que el resto sea menor que 10^{-2} basta elegir n cumpliendo

$$\frac{1}{n+1} < 10^{-2}$$

Es decir, n=100.

En el ejercicio resuelto número 15 de la guía del tema 1 se resuelve este ejercicio (página 33).

Nombre y Apellidos: Núm:

4

a) Demostrar que si en un límite se sustituye un factor o un divisor que es un infinitésimo por otro equivalente, el valor del límite no se ve alterado.

b) Determinar un infinitésimo equivalente para $x=0$ de la función $f(x)=(\cos x-1)(\log(1+x)-x)$.

Puntuación: 2+2

Apartado a) Hecho en clase.

Apartado b) Basta tener en cuenta el primer término no nulo del polinomio de Taylor en el punto $a=0$ para afirmar que

$$\cos x-1\approx -\frac{x^2}{2}$$
$$\log(1+x)-x\approx -\frac{x^2}{2}$$

Por lo tanto $f(x)\approx \frac{x^4}{4}$

Ver práctica realizada el 25 de octubre donde se realizaron ejercicios similares y el ejercicio resuelto número 16 de la guía del tema 1.

Seguimiento

1

Se considera la función $f(x)=\mathrm{a}\log\left(1+\frac{x^2}{a}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n\ a^{n-1}}$ donde a es el último dígito de tu DNI (si es 0 ó 1, considera 2).

Se pide:

a) Determinar el campo de convergencia de la serie.

b) Calcular el valor de $f(1.2)$ con la suma de los 15 primeros términos de la serie.

c) Dar una cota del error que se obtendría al aproximar el valor de $f(1.2)$ por los 20 primeros términos de la serie.

Nota: En los apartados b), c) se deberá escribir el código Octave y la solución numérica que devuelve el programa cuando proceda.

Nombre y Apellidos: Núm:

Solución a)

Teniendo en cuenta que es el desarrollo de la función logaritmo el campo de convergencia es el conjunto de valores x reales que verifican:

$$1 < \frac{x^2}{a} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq a \Rightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$$

Solución b)

```
a=2;
x=1.2;
a*log(1+x^2/a)
ter=15;
n=1:ter;
an=(-1).^(n-1).*(x.^(2*n))./(n.*a.^(n-1));
sum(an)
```

Solución c)

Como la serie es alternada, el valor absoluto del error que se comete al aproximar el valor de la función por los primeros 20 términos, es menor que el valor absoluto del término 21

$$\left|error\right| < \frac{1.1^{22}}{21 \cdot a^{20}}$$

Ejercicios similares se han realizado en la práctica 5 realizada el 8 de noviembre.

Prueba 24 de noviembre

1

Dada la función $f\left(x\right) = 3\log\left(1+\frac{x^2}{3}\right)$, se pide:

(a) Calcular el desarrollo en serie de potencias de x de la función $f\left(x\right)$ indicando su campo de convergencia.

(b) Calcular el valor de la siguiente integral $\int_0^1 3\log\left(1+\frac{x^2}{3}\right)dx$ con un error menor que 10^{-2} .

Solución a)

Utilizando el desarrollo en serie de la función logaritmo

$$\log\left(1+x\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^{n+1} x^n}{n} \qquad -1 < x \leq 1$$

Nombre y Apellidos: Núm:

se tiene

$$f(x) = 3\log\left(1+\frac{x^2}{3}\right) = 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{x^2}{3}\right)^n \quad -1 < \frac{x^2}{3} \le 1$$

Por lo tanto,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{n\cdot 3^{n-1}} \qquad 0 \le x^2 \le 3$$

es decir,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{n\cdot 3^{n-1}} \qquad -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$$

Solución b)

$$\int_0^1 3\log\left(1+\frac{x^2}{3}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^{n-1}}\int_0^1 x^{2n}dx\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^{n-1}}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^{n-1}(2n+1)}$$

Como es una serie alternada, el error al considerar como aproximación de la integral los primeros n sumandos es menor que el valor absoluto del primer término no considerado.

Para que el error sea menor que 10^{-2}, basta elegir n cumpliendo

$$\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n(2n+3)} < 10^{-2}$$

es decir, n=2. Por lo tanto,

$$\int_0^1 3\log\left(1+\frac{x^2}{3}\right)dx = \frac{1}{1\cdot 3^0\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 3^1\cdot 5} = 0.3$$

- El apartado a) es el ejercicio de seguimiento realizado el 15 de noviembre.
- Ejercicios similares al apartado b) se han realizado en la práctica 5 realizada el 8 de noviembre.

2

(a) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es convergente.

(b) Determinar el carácter de las siguientes series enunciado el criterio que se utilice:

$$\sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{1}{n^{1.1}}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{2n-3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^2+1}$$

Nombre y Apellidos: Núm:

Solución a)

Basta aplicar la siguiente igualdad que acota la suma parcial enésima de la serie

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = 1 + \left(-\frac{1}{n} + 1\right)$$

Entonces,

$$S_n \le 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n \le 2$$

y, por lo tanto, la suma parcial enésima de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente ya que una serie de términos positivos o es convergente o divergente.

Solución b)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{1}{n^{1.1}}\right)$ es convergente por comparación con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}}$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{2n-3}$ no es convergente porque no cumple la condición necesaria ce convergencia,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n-3} = \frac{3}{2} \ne 0$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ es convergente por Leibniz,

- $a_n = \frac{1}{n^2+1} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$
- $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ es monótona decreciente,

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2+1} < \frac{1}{n^2+1} \Leftrightarrow n^2+1 < (n+1)^2+1$$

- El apartado a) se ha explicado en clase el día 30 de noviembre.
- Ver ejercicios similares propuestos el día 2 de noviembre.

3

Calcular el desarrollo en serie de potencias en el origen de la siguiente función indicando su campo de convergencia:

$$\frac{5x+3}{(2+x)(-1+3x)}$$

Nombre y Apellidos: Núm:

Solución:

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{5x+3}{(2+x)(-1+3x)}=\frac{A}{2+x}+\frac{B}{-1+3x}$$

$$5x+3=A(-1+3x)+B(2+x)$$

Si $x=-2$ $\qquad 5(-2)+3=A(-1+3(-2))\Rightarrow -7=-7A\Rightarrow A=1$

Si $x=0$ $\qquad 2B=3+A\Rightarrow 2B=4\Rightarrow B=2$

Por lo tanto,

$$\frac{5x+3}{(2+x)(-1+3x)}=\frac{1}{2+x}+\frac{2}{-1+3x}$$

Utilizando el desarrollo de la serie geométrica, se tiene que

$$\frac{5x+3}{(2+x)(-1+3x)}=\frac{1}{2+x}+\frac{2}{-1+3x}=\frac{1/2}{1+\frac{x}{2}}-\frac{2}{1-3x}=$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n}}_{si\ \left|\frac{x}{2}\right|<1}-2\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n}_{si\ |3x|<1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-2\cdot 3^n}{2^{n+1}}\right)x^n \qquad si\ |x|<\frac{1}{3}$$

- Ejercicios similares son el resuelto número 6 y el ejercicio propuesto número 5 realizados en clase el día 9 de noviembre.

4

a) Calcular la serie de Fourier de la función 2-periódica definida en el intervalo $[-1,1)$ de la forma siguiente

$$f(t)=\begin{cases}0 & si\ \ -1\le t\le 0\\ 3 & si\ \ 0<t<1\end{cases}$$

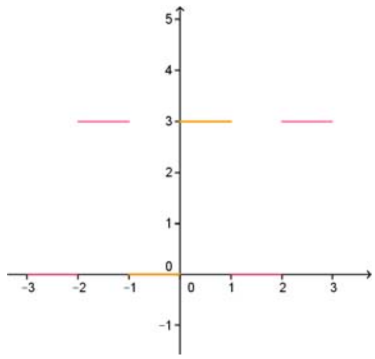
Estudiar la convergencia de la serie obtenida.

b) Obtener el valor de la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

Solución:

Se tiene que $T=2, p=1, w=\pi$. La función no es par ni impar.

Nombre y Apellidos: Núm:



$$a_o = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \int_0^1 3dx = 3$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos(nwx)\,dx = \int_0^1 3\cos(n\pi x)\,dx = 3\left.\frac{sen(n\pi x)}{n\pi}\right|_{x=0}^{x=1} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,sen(nwx)\,dx = \int_0^1 3sen(n\pi x)\,dx = 3\left.\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= 3\frac{-(-1)^n + 1}{n\pi} = \begin{cases} 0 & n\ par \\ \dfrac{6}{n\pi} & n\ impar \end{cases}$$

La serie de Fourier es

$$S(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)\pi} sen((2n-1)\pi x)$$

cumpliendo que

$$S(x) = f(x) \qquad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$
$$S(k) = \frac{f(k^+) + f(k^-)}{2} = \frac{3}{2} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Considerando $x = \frac{1}{2}$, se tendrá

$$3 = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)\pi} sen\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$3 = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \Rightarrow \quad \frac{3}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}$$

- Este ejercicio es idéntico al propuesto número 12 realizado en clase el día 20 de noviembre.

Nombre y Apellidos: Núm:

Prueba 19 de diciembre (opción A)

1

Calcular las siguientes integrales:

(a) $\int \frac{5}{\sqrt{2x-3}}\,dx$ (b) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, d\,x$ (c) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+1}$

(d) $\int x\sqrt{x-3}\;dx$ (e) $\int \frac{x+3}{x^3+x^2+2x+2}dx$ (f) $\int \; x\,arctg \frac{1}{x+1}\;dx$

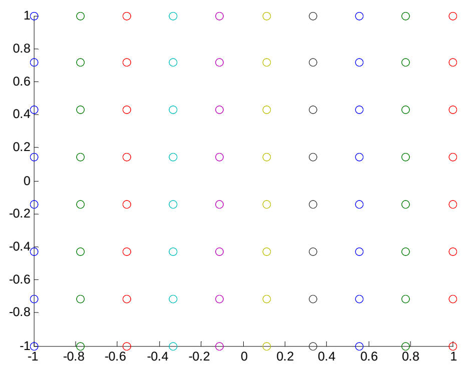
Prueba 20 de diciembre (opción A)

1

(a) Se considera la integral $I = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{x+1}dx$. Se pide **escribir el código** Octave para obtener mediante sumas de Riemann una cota superior de I. Escribir **el valor que devuelve** Octave y y **la expresión** matemática que permitiría obtener dicha suma.

(b) Considerar la curva que es imagen de la circunferencia de centro (0,0) y radio 2 sobre la superficie $f\left(x,y\right) = x^2 + y^3$. **Escribir el código** Octave para realizar su representación gráfica.

(c) **Escribir el código** Octave para representar sobre la siguiente malla de puntos del espacio la función $f\left(x,y\right) = xy$



(d) **Escribir el código** Octave para representar la superficie $f\left(x,y\right) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ sobre su dominio.

Nombre y Apellidos: Núm:

Prueba 12 de enero

1

(a) Considerar la función $w=f(x,y)$ en la que $x=r\cos\varphi$, $y=r\operatorname{sen}\varphi$.

Demostrar que $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$

(b) Obtener las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $x^2+y^2+2z^2=60$ que son paralelos al plano $6x+4y+4z=12$.

(c) Si $z=\log\left(xy^2+x^2\right)$, determinar el polinomio de Taylor de grado 2 de esta función en el punto $(1,2)$. ¿En qué dirección crece más la función, en la dirección del eje OX o en la dirección del eje OY?

(d) La derivada direccional de $f(x,y)=e^{x/2}\cos y$ en el punto $P(0,\pi)$ en la dirección u es ¼. Calcular este vector y el ángulo que forma con el eje OX positivo.

Apartado a)

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial w}{\partial y}sen\varphi$$
$$\frac{\partial w}{\partial \varphi}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\partial w}{\partial x}\left(-rsen\varphi\right)+\frac{\partial w}{\partial y}r\cos\varphi$$

Operando

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial w}{\partial y}sen\varphi\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\left(-rsen\varphi\right)+\frac{\partial w}{\partial y}r\cos\varphi\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2sen^2\varphi+2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\cos\varphi sen\varphi+$$
$$+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}r^2sen^2\varphi+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2r^2\cos^2\varphi-2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{r}^2\cos\varphi sen\varphi\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

Apartado b)

Si se considera la superficie S definida por $F(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2-60=0$, un vector normal al plano tangente a S en el punto P(x,y,z) es

$$\mathbf{n}=\left(F_x^{'}(x,y,z),F_y^{'}(x,y,z),F_z^{'}(x,y,z)\right)=\left(2x,\ 2y,\ 4z\right)$$

Nombre y Apellidos: Núm:

Determinamos los puntos $\left(x,\mathrm{y},z\right)$ de la superficie S que cumplen que este vector es paralelo al perpendicular al plano $6x+4y+4z=12$, es decir, al vector $\mathbf{v}=\left(6,4,4\right)$. Serán aquellos puntos que cumplan

$$\frac{2x}{6}=\frac{2y}{4}=\frac{4z}{4}=\lambda\to P\left(3\lambda,2\lambda,\lambda\right)$$

$$9\lambda^2+4\lambda^2+2\lambda^2=60\to\lambda^2=\frac{60}{15}=4\to\lambda=\pm2$$

Los puntos son $P_1\left(6,4,2\right),\ P_2\left(-6,-4,-2\right)$.

Teniendo en cuenta que ecuación del plano tangente a la superficie $F\left(x,y,z\right)=0$ en el punto $\left(a,b,c\right)$ es

$$F'_x\left(a,b,c\right)\left(x-a\right)+F'_y\left(a,b,c\right)\left(y-b\right)+F'_z\left(a,b,c\right)\left(z-c\right)=0$$

se tendrá que el plano tangente en $P_1\left(6,4,2\right)$ es: $12\left(x-6\right)+8\left(y-4\right)+8\left(z-2\right)=0$

y el plano tangente en $P_2\left(-6,-4,-2\right)$ es : $-12\left(x+6\right)-8\left(y+4\right)-8\left(z+2\right)=0$

Apartado c)

El polinomio de Taylor de una función de dos variables $z=f\left(x,y\right)$ que cumple las hipótesis del Teorema de Schwartz en el punto $\left(a,b\right)$ es

$$\begin{aligned}T_2\left(x,y\right)&=f\left(a,b\right)+f'_x\left(a,b\right)\left(x-a\right)+f'_y\left(a,b\right)\left(y-b\right)+\\&+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}\left(a,b\right)\left(x-a\right)^2+2f''_{xy}\left(a,b\right)\left(x-a\right)\left(y-b\right)+f''_{yy}\left(a,b\right)\left(y-b\right)^2\right]\end{aligned}$$

La función a considerar $z=\log\left(xy^2+x^2\right)$ es una función que tiene derivadas primeras y segundas continuas en el punto (1,2) así que derivando su polinomio de Taylor es

$$f'_x\left(x,y\right)=\frac{y^2+2x}{xy^2+x^2}\to f'_x\left(1,2\right)=\frac{6}{5}$$

$$f'_y\left(x,y\right)=\frac{2yx}{xy^2+x^2}=\frac{2y}{y^2+x}\to f'_y\left(1,2\right)=\frac{4}{5}$$

$$f'_{xx}\left(x,y\right)=\frac{2\left(xy^2+x^2\right)-\left(y^2+2x\right)^2}{\left(xy^2+x^2\right)^2}\to f'_{xx}\left(1,2\right)=-\frac{26}{25}$$

Nombre y Apellidos: Núm:

$$f'_{xy}\left(x,y\right)=\frac{2y\left(xy^2+x^2\right)-2xy\left(y^2+2x\right)}{\left(xy^2+x^2\right)^2}\to f'_{xy}\left(1,2\right)=-\frac{4}{25}$$

$$f'_{yy}\left(x,y\right)=\frac{2\left(y^2+x\right)-4y^2}{\left(y^2+x\right)^2}\to f'_{yy}\left(1,2\right)=-\frac{6}{25}$$

$$T_2\left(x,y\right)=\log\left(5\right)+\frac{6}{5}\left(x-1\right)+\frac{4}{5}\left(y-2\right)+\frac{1}{2}\left[-\frac{26}{5}\left(x-1\right)^2-\frac{8}{25}\left(x-1\right)\left(y-2\right)-\frac{6}{25}\left(y-2\right)^2\right]$$

Teniendo en cuenta los valores de las derivadas parciales de primer orden, en el punto (1,2) la función crece más en la dirección del eje OX que en la dirección del eje OY:

$$f'_x\left(1,2\right)=\frac{6}{5}>\frac{4}{5}=f'_y\left(1,2\right)$$

Apartado d)

Se considera la dirección $u=\left(\cos\varphi,sen\varphi\right)$, como f es diferenciable en $P\left(0,\pi\right)$ entonces

$$D_uf\left(0,\pi\right)=\nabla f\left(0,\pi\right)\bullet u=\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,\pi\right)\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\pi\right)sen\varphi=\frac{1}{4}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,\pi\right)=\frac{1}{2}e^{x/2}\cos y\to\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,\pi\right)=-\frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\pi\right)=-\frac{1}{2}e^{x/2}seny\to\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\pi\right)=0$$

Por lo tanto,

$$-\frac{1}{2}\cos\varphi+0=\frac{1}{4}\to\cos\varphi=\frac{-1}{2}\to sen\varphi=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La solución será entonces

$$u=\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\quad\varphi=\frac{2\pi}{3}$$
$$u=\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\quad\varphi=-\frac{2\pi}{3}$$

2

(a) Calcula el área de las dos partes en que la parábola $y^2=4x$ divide a la circunferencia $x^2+y^2=\frac{9}{4}$.

(b) Dada la función $f\left(x\right)=\int_0^x\frac{e^t}{t^2+1}dt$, calcular $f'\left(1\right)$. Justifica la

Nombre y Apellidos: Núm:

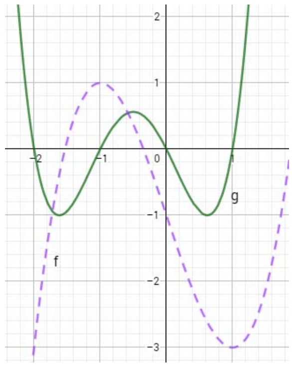
respuesta.

(c) Ordenar de mayor a menor el valor de las siguientes integrales justificando la respuesta

$$I_1 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx \qquad I_2 = \int_{-1}^{0} g(x)\,dx$$

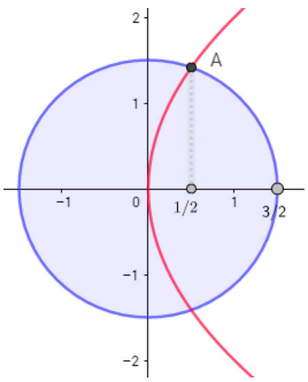
$$I_3 = \int_{-1}^{1} \left(g(x) - f(x)\right)dx \qquad I_4 = \int_{-2}^{1} \left(f(x) - g(x)\right)dx$$

siendo f y g las curvas de la figura de la derecha (f trazo discontinuo, g trazo continuo).



Apartado a)

La representación de las dos curvas es la siguiente



Calculando los puntos de corte

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = \dfrac{9}{4} \\ y^2 = 4x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + 4x = \frac{9}{4} \Rightarrow x^2 + 4x - \frac{9}{4} = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+9}}{2} = \frac{-4 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1/2 \\ -9/2 \end{cases}$$

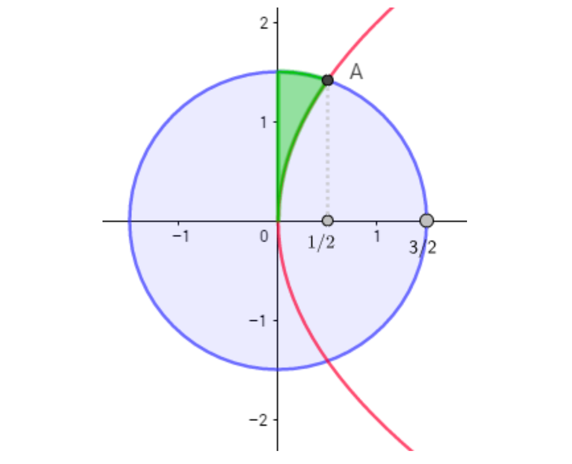
La solución -9/2 no es válida ya que se debe cumplir que $y^2 = 4x$. Los puntos de corte son

$$\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right) \quad \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$$

Hay distintas formas de resolver este ejercicio, planteamos a continuación dos de ellas:

Método 1.

Nombre y Apellidos: Núm:



$$I = \int_0^{1/2} \left(\sqrt{\frac{9}{4} - x^2} - \sqrt{4x} \right) dx$$

Entonces, teniendo en cuenta que el área del círculo es $A_c = \pi \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9\pi}{4}$

el área de las dos regiones pedidas sería

$$A_1 = \frac{A_c}{2} - 2I \qquad A_2 = \frac{A_c}{2} + 2I$$

Calculamos la integral $I = J - K$

- $$J = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}\, dx \underset{\left[\begin{array}{ll} x=\frac{3}{2}sen t & dx=\frac{3}{2}\cos t \\ x=0 \to t=0 & \\ x=1/2 \to t=\text{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right) & \end{array}\right]}{=} \int_0^{arcsen\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{9}{4} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{9}{4} \int_0^{arcsen(1/3)} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{9}{4} \left[\frac{1}{2} t + \frac{sen(2t)}{4} \right]_0^{arcsen\left(\frac{1}{3}\right)} =$$

$$= \frac{9}{8} arcsen\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{9}{16} sen\left(2 arcsen\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

Nota: La solución tal y como está escrita se consideraría correcta aunque podría simplificarse más teniendo en cuenta que

$$\alpha = arcsen\left(\frac{1}{3}\right) \to sen\alpha = \frac{1}{3} \to \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

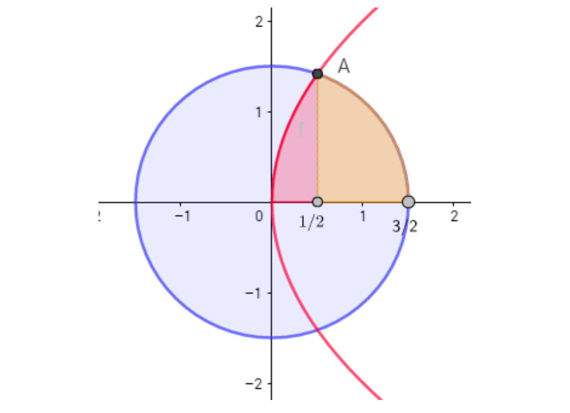
$$sen(2\alpha) = 2\ sen\alpha\ \ \cos\alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$J = \frac{9}{8} arcsen\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{9}{16}\frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{9}{8} arcsen\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

- $$K = \int_0^{1/2} \sqrt{4x}\, dx = \frac{4}{3} x^{3/2} \Big|_{x=0}^{x=1/2} = \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

Método 2.

Nombre y Apellidos: Núm:



$$I = \int_0^{1/2} \sqrt{4x}\, dx$$

$$J = \int_{1/2}^{3/2} \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}\, dx$$

Entonces el área de las dos regiones pedidas sería

$$A_1 = 2(I + J) \qquad A_2 = A_c - A_1$$

Calculamos las dos integrales

$$I = \int_0^{1/2} \sqrt{4x}\, dx = \frac{4}{3} x^{3/2} \Big|_{x=0}^{x=1/2} = \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$J = \int_{1/2}^{3/2} \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}\, dx \underset{\left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2}sent \quad dx=\frac{3}{2}\cos t \\ x=1/2 \to t = arcsen\left(\frac{1}{3}\right) \\ x=3/2 \to t=\frac{\pi}{2} \end{array}\right]}{=} \int_{arcsen\left(\frac{1}{3}\right)}^{\pi/2} \frac{9}{4}\cos^2 t dt = \frac{9}{4} \int_{arcsen\left(\frac{1}{3}\right)}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{9}{4}\left[\frac{1}{2}t + \frac{sen(2t)}{4}\right]_{t=arcsen\left(\frac{1}{3}\right)}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{16}\pi - \frac{9}{8} arcsen\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{9}{16} sen\left(2arcsen\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

Apartado b)

Dado que $g(t) = \dfrac{e^t}{t^2+1}$ es una función continua, aplicando el Teorema Fundamental del

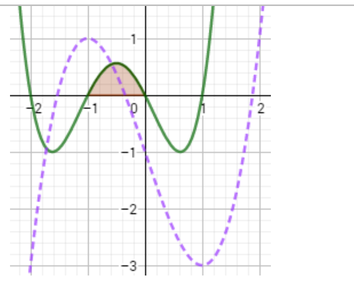
Cálculo: $$f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t^2+1} dt \to f'(x) = \frac{e^x}{x^2+1} \to f'(1) = \frac{e}{2}$$

Apartado c)

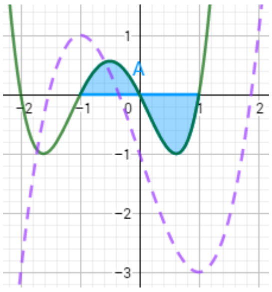
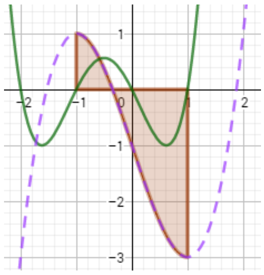
Integrales positivas

$$I_2 = \int_{-1}^{0} g(x)\, dx$$

Es positiva

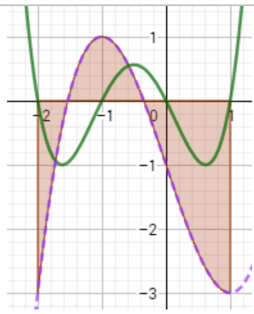
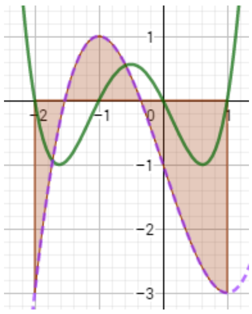
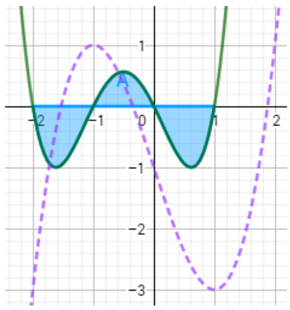


Nombre y Apellidos: Núm:

$I_3=\int_{-1}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx$ Es positiva	Integral g en (-1,1) es negativa 	Integral f en (-1,1) es negativa con valor más grande en valor absoluto que el de la integral de g 

Además $I_3 > I_2 > 0$

Integrales negativas

$I_1=\int_{-2}^{1}f(x)\,dx$ es negativa		
$I_4=\int_{-2}^{1}\left(f(x)-g(x)\right)dx$ negativa	Integral f en (-2,1) es negativa 	La integral g en (-2,1) es negativa con valor más pequeño en valor absoluto que el de la integral de f 

Además $I_1 < I_4 < 0$

Nombre y Apellidos: Núm:

3

Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{1-\sqrt{x}}\,dx$ $\quad\displaystyle\int \log\left(1+4x^2\right)dx$

(b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1+3senx}\,\cos x\,dx$ $\quad\displaystyle\int \frac{3x+2}{4x^2+3}\,dx$

(c) $\displaystyle\int x \;\; arctgx \;\; dx$ $\quad\displaystyle\int \frac{9x^2+6}{x^3+2x+3}\,dx$

Nombre y Apellidos: Núm:

Bloque 1 (Enero 2018)

Importante: En todos los ejercicios se deberá justificar las respuestas.

1

(a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $x\log\left(2y^2-1\right)+y=1$ en el punto (1,1).

(b) Determinar un infinitésimo equivalente para $x=0$ de la función $f\left(x\right)=\left(e^x-1\right)\log\left(1+x\right)$.

(c) La ley de Boyle para los gases perfectos establece que a temperatura constante $PV=k$ donde P es la presión, V el volumen y k una constante. Si la presión está dada por la expresión $P\left(t\right)=30+2t$ con P en cm de Hg, t en seg. y el volumen inicial es de $60cm^3$, se pide:

- determinar la razón de cambio del volumen V con respecto al tiempo t a los 10 segundos.
- Escribir el código octave para respresentar la función $V\left(t\right)$ en el intervalo $\left[0,15\right]$.

2

Considerando la función: $f\left(x\right)=\sqrt{1-2x}$, se pide:

(a) Calcular un valor aproximado de $\sqrt{0.8}$ utilizando la recta tangente a dicha función en el punto adecuado. Obtener una cota del error que se comete en la aproximación utilizada.

(b) Calcular la expresión de la fórmula de Taylor de grado 2 de $f\left(x\right)$ centrada en el origen.

(c) Calcular la derivada enésima de $f\left(x\right)$.

(d) Si se considera $g\left(x\right)=h\left(\operatorname{sen}^2 x+f\left(x\right)\right)$ calcular $g'\left(0\right)$ sabiendo que $h'\left(1\right)=3$.

Bloque 2 (Enero 2018)

Importante: En todos los ejercicios se deberá justificar las respuestas.

1

(a) Una serie tiene por suma parcial enésima $S_n=\dfrac{2n^2-1}{n+3}$. ¿Es la serie geométrica? ¿Es convergente? En caso afirmativo calcular la suma de la serie.

Nombre y Apellidos: Núm:

(b) Demuestra que las series geométricas de razón menor que 1 en valor absoluto son convergentes.

(c) Se considera la función $f(x)=\dfrac{3x+3}{(2x+1)(2+x)}$. Se pide

- Determina el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen de la función $f(x)$.
- La serie de potencias obtenida, ¿es convergente en el punto 2?
- Escribir el código octave para encontrar un valor aproximado de $\log\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$ considerando los 7 primeros términos del desarrollo y determinando una cota del error cometido.

2

(a) Determina el periodo fundamental de la siguiente función $f(x)=\operatorname{sen}(8x)+\cos(3x)$

(b) Dada la función 2-periódica definida en $[-1,1]$ de la forma siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & 0\le x<1 \\ -x+1 & -1<x\le 0 \end{cases}$$

justificar por qué esta función es desarrollable en serie de Fourier. ¿Es $S(x)$ una función par?

(c) Considerando la función 2-periódica definida en $[-1,1]$ de la forma $f(x)=-|x|$, se pide calcular el desarrollo en serie de Fourier en forma trigonométrica y compleja indicando dónde coincide con la función,

Bloque 3 (Enero 2018)

Importante: En todos los ejercicios se deberá justificar las respuestas.

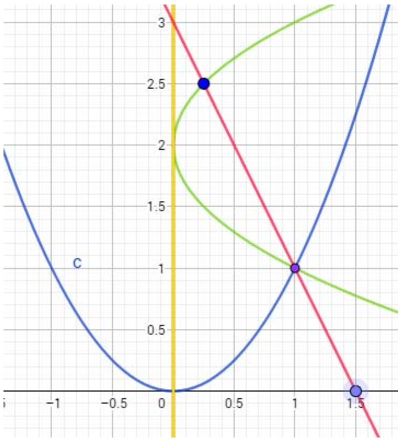
1

(a) Escribe el código octave para obtener un valor aproximado por exceso mediante sumas de Riemann de la siguiente integral $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$. Considera una partición regular de 30 subintervalos.

(b) Demostrar, sin integrar, que el valor de $I=\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx$ es inferior a 2.

Nombre y Apellidos: Núm:

(c) Hallar el área de la región del primer cuadrante que está acotada por las siguientes curvas $x = 0$, $y = 3 - 2x$, $x = (y-2)^2$, $y = x^2$



(d) Calcular el valor medio integral de $y = \sqrt{4 - x^2}$ en el intervalo $[0,2]$.

2

(a) Determinar y representar el dominio de la siguiente función $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\log(x+y)}$. ¿Es la función diferenciable en el punto (1,1)?

(b) Comprobar si son paralelos los planos tangentes a las superficies definidas por

$$S_1 \equiv x^2 y + y^2 z^2 + yz = 3 \qquad \text{y} \qquad S_2 \equiv z = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+3}}$$

en el punto P(1,1,1).

(c) Determinar el vector gradiente de una función f diferenciable sabiendo que su derivada direccional máxima es igual a 50 en el punto M(1,2) y que se alcanza en la dirección de M a N(3,-4).

(d) Si cortamos la superficie gráfica de la función $z = xy^2 \cos(xy - 1)$ por el plano y=1 se obtiene una curva C. Determinar la pendiente de la curva C en el punto T(1,1,1). Obtener un vector director de la recta tangente a C en el punto T.