Apellidos y Nombre: Núm:

NOTA: En todos los ejercicios se deberá justificar la respuesta explicando el procedimiento seguido en la resolución del ejercicio.

Prueba 28 octubre de 2015

1

(a) Dado $z=-9$ representa el hexágono T cuyos vértices son los afijos de las raíces sextas de z. Calcula la longitud de los lados de ese hexágono.

(b) Representa en una misma figura los dos hexágonos siguientes:
- Hexágono T1: el resultado de trasladar el hexágono T una unidad a la izquierda y dos unidades hacia arriba.
- Hexágono T2: el resultado de girar T un ángulo de 30 grados.

Apartado (a)

```
z=-9;
r=abs(z);
phi=angle(z);
k=0:6;
argu=(phi+2*k*pi)/6;
x=r^(1/6)*cos(argu);
y=r^(1/6)*sin(argu)
plot(x,y)
%Distancia
y(1)-y(6)
```

También se puede hacer:

```
z=-9;
phi=angle(z);
k=0:6;
w=abs(z)^(1/6)*exp((phi+2*k*pi)*i/6);
plot(w)
%Distancia
abs(w(1)-w(2))
```

Apartado (b)

```
hold on
plot(x-1,y+2)
w=(x+y*i).*exp(pi*i/6);
plot(real(w),imag(w))
hold off
```

Apellidos y Nombre: Núm:

2

Considera la función y=log(2x-1).

(a) Escribe la expresión del polinomio de Taylor de grado n en el punto $a=1$ y el resto de Taylor.

(b) Dibuja la gráfica correspondiente a los polinomios de Taylor de grado 3 y 4 de esta función en un intervalo que contenga al punto $a=1$ sin utilizar la herramienta `taylortool` para hacer la representación.

(c) Calcula el error relativo cometido al aproximar la función logaritmo por los polinomios anteriores en el punto $x=\frac{3}{2}$.

Nota: el error relativo es

$$x=\frac{valor\ obtenido - valor\ real}{valor\ real}$$

(d) Si consideráramos el punto $x=1.1$, ¿se obtendría mejor o peor aproximación? ¿Qué resultado teórico justificaría la respuesta dada a la pregunta anterior? Enuncia dicho resultado.

Apartado a)

$$f(x)=\log(2x-1)$$

$$f'(x)=\frac{2}{2x-1}=2(2x-1)^{-1} \qquad \rightarrow f'(1)=2$$

$$f''(x)=(-1)(2x-1)^{-2}2^2 \qquad \rightarrow f'(1)=-2^2$$

$$f'''(x)=(-1)(-2)(2x-1)^{-3}2^3 \qquad \rightarrow f''(1)=(-1)(-2)2^3$$

...

$$f^{(n}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!(2x-1)^{-n}2^n \qquad \rightarrow f^{(n}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!2^n$$

El polinomio de Taylor de grado n en a=1 es

$$T_n(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\ldots+\frac{f^{(n}(1)}{n!}(x-1)^n$$

$$T_n(x)=2(x-1)-\frac{2^2}{2!}(x-1)^2+\frac{2^4}{3!}(x-1)^3++\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,2^n}{n!}(x-1)^n=$$

$$T_n(x)=2(x-1)-2(x-1)^2+\frac{8}{3}(x-1)^3+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}2^n}{n}(x-1)^n$$

Apellidos y Nombre: Núm:

El resto de Taylor de orden n es:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}$$

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n\, n!\,(2t-1)^{-(n+1)}\,2^{n+1}}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}=\frac{(-1)^n\,2^{n+1}}{(n+1)\,(2t-1)^{n+1}}(x-1)^{n+1}$$

Siendo t un punto intermedio entre a=1 y x.

Apartado b)

```
t3=inline('2*(x-1)-2*(x-1).^2+8/3*(x-1).^3')
t4=inline('2*(x-1)-2*(x-1).^2+8/3*(x-1).^3-4*(x-1).^4')
x=0.6:0.1:1.5;
plot(x,t3(x),x,t4(x))
hold on
%Dibujamos la función
plot(x,log(2*x-1),'r')
hold off
```

Apartado c)

```
(t3(3/2)-log(2))/log(2)
(t4(3/2)-log(2))/log(2)
```

Apartado d)

Se obtiene mejor aproximación en el punto $x=1.1$. La justificación teórica para garantizar que en el punto 1.1 se obtiene mejor aproximación se debe al Teorema de Taylor.

TEOREMA DE TAYLOR: Si f es derivable n veces en el punto $x=a$ y $R_n\left[f(x);a\right]$ es su correspondiente resto de Taylor entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n\left[f(x);a\right]}{(x-a)^n}=0$$

Apellidos y Nombre: Núm:

Prueba seguimiento 11 – XI -2015

1

(a) Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva $y^2+5x=xe^{x(y-2)}$ en el punto (-1,2)

(b) Introduce el código Matlab para representar las curvas siguientes en una misma figura:

Curva 1:

$$y^2 5=e^{x(y-2)} \qquad x\in[-4,6],\, y\in[0,6]$$

Curva 2:

$$\begin{aligned} x(t)&=a\cos(t)\operatorname{sen}(t) \\ y(t)&=a\cos(t)\cos(t) \qquad t\in[0,2\pi] \end{aligned}$$

tomando 2 como valor de a.

Comentarios solución:

- La derivación implícita se explicó el 4 de noviembre (ver actividades propuestas de ese día y los ejercicios 1 y 2 de la práctica 5).
- La representación gráfica de funciones paramétricas se vio en la práctica 5 del 4 de noviembre. La curva 2 es el ejericio propupesto nº 3 de dicha práctica. En clase de dudas del día 27 de noviembre se explicó este ejercicio.

(a) El punto P(-1,2) es un punto de la curva: $2^2+5(-1)=(-1)e^{-(2-2)}$

Suponiendo que esta ecuación define implícitamente a y como función de x, la pendiente de la recta tangente a la curva en P es la derivada en dicho punto. Derivando implícitamente:

$$2yy'+5=e^{x(y-2)}+xe^{x(y-2)}(y-2+xy')$$

sustituyendo el punto P(-1,2) se calculara la pendiente de la recta pedida:

$$\begin{aligned} &2\cdot 2y_P'+5=e^{-(2-2)}-e^{-(2-2)}(2-2+(-1)y'_P) \\ &4y'_P+5=1+y'_P \quad\Rightarrow y'_P=-4/3 \end{aligned}$$

Apellidos y Nombre: Núm:

(b) Código Matlab. Una posibilidad podría ser:

```
ezplot('5*y^2=exp(x*(y-2))',[-4,6,0,6])
hold on
a=2;
t=0:0.1:2*pi;
x=a*cos(t).*sin(t);
y=a*cos(t).*cos(t);
plot(x,y)
```

Prueba 18 noviembre de 2015 **Parte I**

Nota: No se puede consultar ni apuntes ni la página de la asignatura

1

Dadas las ecuaciones paramétricas de la cicloide:

$$x = 2(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$
$$y = 2(1-\cos\theta) \qquad \theta \in [0, 4\pi]$$

(a) Calcula a mano la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ en $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

(b) Escribe el código Matlab que permitiría representar con Matlab la gráfica de esta curva y la de recta tangente en el punto $\left(x\left(\dfrac{\pi}{4}\right), y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

Comentarios solución:

Este ejercicio es el propuesto el día 5 de noviembre en el cuaderno de actividades del tema 2.

2

Dada la función $f(x) = \log(1+x)$ y su desarrollo en serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ con radio de convergencia 1, se pide:

a. calcular con Matlab el valor aproximado de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ mediante la suma de los 50 primeros términos del desarrollo en serie.

b. ¿se podría obtener una aproximación de $\log(3)$ utilizando esta

Apellidos y Nombre: Núm:

serie? Justificar la respuesta.

Comentarios solución:

Ver práctica 6

Prueba 18 noviembre de 2015 **Parte II**

Opcional (para subir nota)

Nota: No se puede consultar ni apuntes ni la página de la asignatura

3

(a) Obtener con Matlab las raíces quintas del número complejo z sabiendo que una de ellas es (1+i). Representar en una misma figura, el pentágono que tiene por vértices estos números complejos y el que tiene por vértices sus conjugados.

(b) Calcular con Matlab el número complejo $\dfrac{3^{\frac{\pi}{8}}}{2e^{\frac{\pi}{9}i}}$.

Comentarios solución:

Ver práctica 1, 2 y 3

4

Dada la función $f(x)=\sqrt{1+x}$, se pide

(a) Obtener a mano el polinomio de Taylor centrado en el punto 0 de grado 1 y 3.

(b) Para cada uno de los polinomios del apartado a), obtener con Matlab el valor aproximado de $f(x)=\sqrt{1+x}$ evaluándolos en seis puntos cualesquiera del intervalo [0.1, 1].

(c) Calcula con Matlab la diferencia entre el valor de $f(x)=\sqrt{1+x}$ en cada uno de los seis puntos considerados y las aproximaciones obtenidas. ¿En qué punto y para qué polinomio se consigue mejora aproximación?

Apellidos y Nombre: Núm:

Comentarios solución:

Ver práctica 4 del 21 de octubre.

Prueba 20 noviembre de 2015 **35 puntos**

1

(a) Hallar las raíces del polinomio $p(x)=x^4-6x^3+43x^2-54x+306$ sabiendo que una raíz es $x=3+5i$. Factorizar el polinomio.

(b) Obtener y representar el lugar geométrico de los números complejos que verifican $|z+3i|=|z-3|$

(c) Calcula $\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^{10}-\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^{10}$

Comentarios solución:

El apartado a) está realizado el 8 de octubre en clase, se trata del ejercicio propuesto 10c) de la guía del tema 1.

El apartado b) es un caso particular del ejercicio propuesto 6c) de la guía del tema 1, se realizó en clase el día 1 de octubre.

El apartado c) es idéntico al propuesto en el cuaderno de actividades del día 28 de septiembre.

2

Dada la función $f\left(x\right)=\sqrt{1-x}$, se pide:

(a) Escribir la fórmula de Taylor de grado n en el punto 0 de la función f.

(b) Calcular una cota del error que se obtendría al aproximar $\sqrt{0.5}$ por el polinomio de Taylor de grado 2.

Comentarios solución:

Este ejercicio es idéntico al resuelto número 15 de la guía del tema 2 y está incluido en el cuaderno de actividades del tema 2 del día 26 de octubre.

Apellidos y Nombre: Núm:

3

(a) Calcular la derivada enésima de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

(b) Obtener la recta normal a la curva $x + tg\left(\dfrac{y}{x}\right) = 2$ en el punto $P\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Comentarios solución:

El apartado a) es el ejercicio propuesto 10b) de la guía del tema 2, se realizó en clase el día 15 de octubre.

El ejercicio b) es similar al propuesto número 9 de la guía del tema 2, hecho en clase el día 9 de noviembre y a los ejercicios realizados en la práctica de ordenador del día 4 de noviembre.

4

(a) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, se sabe que $S_n = \dfrac{3n+2}{4n-1}$.

a. ¿Se podría calcular la suma de la serie? En caso afirmativo indicar su valor.

b. ¿Cumple la condición necesaria de convergencia? Justificar la respuesta

(b) Determinar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\left(\dfrac{2^n}{3^{2n+1}}\right)$. Enunciar el criterio que se utilice.

(c) Calcular el intervalo de convergencia de la serie $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n(n+1)\,3^n}$ y, si fuera posible, el valor de $f(4)$ y $f(6)$.

Comentarios solución:

Apellidos y Nombre: Núm:

El apartado a) es similar al resuelto número 3 y al propuesto número 2 de la guía del tema 2. Estos ejercicios se propusieron como actividades a realizar el día 5 de noviembre.

Apartado b)

Para calcular el carácter de la serie basta tener en cuenta que

$$arctg\left(\frac{2^n}{3^{2n+1}}\right) \approx \frac{2^n}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{9}\right)^n$$

Aplicando el criterio de comparación las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} arctg\left(\frac{2^n}{3^{2n+1}}\right) \text{ y } \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n$$

Tienen el mismo carácter. Como $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n$ es una serie geométrica de razón r=2/9 menor que uno la serie es convergente y, en consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\left(\frac{2^n}{3^{2n+1}}\right)$ también.

Este ejercicio es similar al ejecicio 4c) del cuaderno de actividades del tema 3 del día 12 de noviembre

Apartado c)

Utilizando el criterio del cociente se tendrá que las serie será convergente para los valores $x \in \mathbb{R}$ que cumplan que

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)\,3^{n+1}}\right|}{\left|\frac{(x-1)^n}{n(n+1)\,3^n}\right|} < 1$$

Calculando el límite

Apellidos y Nombre: Núm:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)\,3^n\,|x-1|^{n+1}}{(n+1)(n+2)\,3^{n+1}\,|x-1|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,|x-1|}{(n+2)\,3}=\frac{1}{3}|x-1|$$

$$\frac{1}{3}|x-1|<1\Leftrightarrow|x-1|<3\Leftrightarrow x\in(-2,4)$$

El radio de convergencia es 3.

El valor $f(6)$ no puede calcularse porque el Teorema de Abel indica que en el conjunto $(-\infty,-2)\cup(4,\infty)$ la serie no converge. Sin embargo, este Teorema no establece si la serie puede converger en los puntos x=-2 y x=4.

> Ejercicios similares son los resueltos número 6 y el propuesto número 7 de la guía del tema 3.

Para ver si converge en x=4 consideramos la serie $f(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4-1)^n}{n(n+1)\,3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ y por comparación con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ se puede concluir que es convergente. Para calcular su suma tenemos en cuenta que

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Luego,

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+\ldots+a_n=\\&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1\qquad\Rightarrow f(4)=1$$

> El cálculo de f(4) se hizo en clase el día 9 de noviembre. Ejercicios sinilares son los resueltos en el número 5 de la guia del tema 3.

Apellidos y Nombre: Núm:

Prueba 16 diciembre de 2015 **Tipo A**

Nota: No se puede consultar ni apuntes ni la página de la asignatura

1

Dada la superficie $f(x,y) = -\sqrt{\operatorname{sen}(x^2+y^2)+4}$ se pide:

(a) Escribir el código Matlab para dibujar la gráfica de la función en $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] x \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

(b) Escribir el código Matlab para dibujar el plano tangente a la superficie en el punto P(0,0,-2) junto con la recta normal a este plano en P.

(c) Calcular de forma aproximada el valor de la función en el punto $(-0.1\,,\,0.3)$ utilizando la aproximación que da el plano tangente. Compararlo con el valor que da Matlab a $f(-0.1\,,\,0.3)$

Apartado a)

Código Matlab:

```
[X,Y]=meshgrid(-pi/2:0.1:pi/2);
Z=-sqrt(sin(X.^2+Y.^2)+4);
surf(X,Y,Z)
```

Apartado b)

Se calcula el plano tangente y la recta normal

$$f(0,0) = -2$$

$$f'_x(x,y) = \frac{-x\cos(x^2+y^2)}{\sqrt{\operatorname{sen}(x^2+y^2)+4}} \quad \rightarrow f'_x(0,0) = 0$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-y\cos(x^2+y^2)}{\sqrt{\operatorname{sen}(x^2+y^2)+4}} \quad \rightarrow f'_y(0,0) = 0$$

Plano tangente: $z = f(0,0) + f_x'(0,0)(x-0) + f_y'(0,0)(y-0) \quad \rightarrow \quad z = -2$

Apellidos y Nombre: Núm:

Recta normal: Como el plano tangente es horizontal la recta normal es el conjunto de puntos de la forma puntos $(0,0,\lambda)$ siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

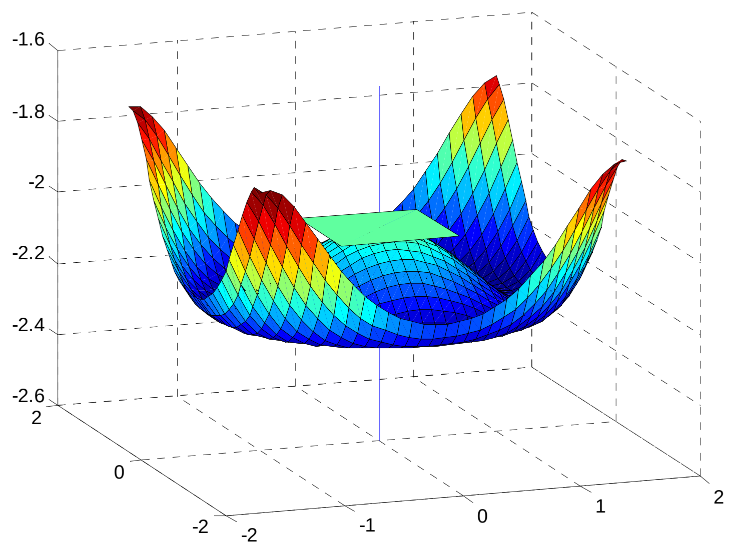
En general, la recta tangente se obtiene como la recta que pasa por el punto $(a,b,f(a,b))$ y tiene por vector director el perpendicular al plano tangente: $\mathbf{n} = \left(f'_x(a,b), f'_y(a,b), -1\right)$.

En este caso, sería

$$\begin{cases} x = 0 + \lambda f'_x(0,0) \\ y = 0 + \lambda f'_y(0,0) \\ z = f(0,0) + \lambda(-1) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Código Matlab para representar el plano tangente y la recta normal:

```
hold on
%Plano tangente
[X1,Y1]=meshgrid(-0.5:0.5);
Z1=-2*X1.^0;
surf(X1,Y1,Z1)
%Para representar un segmento de recta tangente, basta unir
%dos puntos del eje Z, por ejemplo P(0,0,-2.6) y Q(0,0,-1.6)
plot3([0 0],[0 0],[-2.6 -1.6])
```



Apartado c)

Apellidos y Nombre: Núm:

La aproximación pedida se obtiene teniendo en cuenta que:

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) \approx f(a,b) + f'_x(a,b)\Delta x + f'_y(a,b)\Delta y$$

En este caso

$$f(-0.1,\ \ 0.3) \approx -2$$

El valor que da Matlab para $f(-0.1,\ \ 0.3) \approx -2.0248$

```
f=inline('-sqrt(sin(x.^2+y.^2)+4)','x','y')
f(-0.1,0.3)
```

Puede consultarse la práctica 8, del 2 de Diciembre, para ver ejercicios similares.

2

Calcular con Matlab un valor aproximado de $\int_1^2 \frac{e^{x^2}}{x^4}dx$ utilizando:

(a) una partición regular de 100 subintervalos donde el punto considerado en cada subintervalo sea su extremo superior derecho.

(b) una partición regular de 100 subintervalos donde el punto considerado en cada subintervalo sea el punto medio.

Para cada uno de los dos apartados se deberá escribir a mano la suma de Riemann que se está calculando.

Nota: $\int_1^2 \frac{e^{x^2}}{x^4}dx \approx 2.2306$

Apartado a)

La expresión de la suma de Riemann pedida es: $\sum_{i=1}^{100} \frac{e^{c_i^2}}{c_i^4}\Delta x$ siendo

$$\Delta x = \frac{2-1}{100} = \frac{1}{100} \qquad c_i = 1 + i\ \Delta x \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 100$$

Código Matlab

```
n=100;
incx=1/n;
ci=1+incx:incx:2;
f=inline('exp(x.^2)./(x.^4)','x');
sum(f(ci)*incx)
double(int(exp(x^2)/x^4,1,2))
```

Apellidos y Nombre: Núm:

Apartado b)

La expresión de la suma de Riemann pedida es: $\sum_{i=1}^{100} \frac{e^{c_i^2}}{c_i^4} \Delta x$ siendo

$$\Delta x = \frac{2-1}{100} = \frac{1}{100} \qquad c_i = 1 + \frac{\Delta x}{2} + (i-1)\,\Delta x \qquad i = 1, 2, ..., 100$$

Código Matlab

```
incx=1/n;
ci=1+incx/2:incx:2-incx/2;
f=inline('exp(x.^2)./(x.^4)','x');
sum(f(ci)*incx)
double(int(exp(x^2)/x^4,1,2))
```

Puede consultarse la práctica 9, del 9 de Diciembre, para ver ejercicios idénticos.

Apellidos y Nombre: Núm:

NOTA: En todos los ejercicios se deberá justificar la respuesta explicando el procedimiento seguido en la resolución del ejercicio.
Puntuación: Nota examen*10/3

Prueba 18 diciembre de 2015

1

(a) Calcular y representar el dominio de la función $f(x,y) = arc\,\text{sen}\dfrac{x}{x+y}$ y las curvas de nivel de la función $g(x,y) = e^{xy}$

(b) Una función con derivadas parciales continuas tiene en el punto (1, 2) derivadas direccionales de valores: 2 en la dirección al punto (2,2) y -2 en la dirección al punto (1,1). Hallar el vector gradiente y calcular el valor de la derivada direccional en ese punto en la dirección del punto (4,6).

(c) Demostrar que la derivada direccional máxima de una función de dos variables con derivadas parciales continuas se alcanza en la dirección del gradiente.

Comentarios solución apartado a)

Pueden verse los ejercicios resueltos en clase de la guía del tema 4 siguientes: los ejercicios propuestos número 1 y número 16ª y el resuelto número 1.

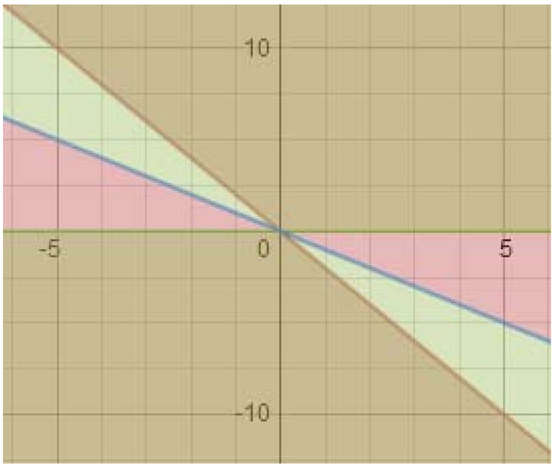
El dominio de f es el conjunto de los puntos (x,y) del plano que verifican

$$\begin{cases} -1 \le \dfrac{x}{x+y} \le 1 \\ x+y \ne 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \begin{cases} -x-y \le x \le x+y & x+y>0 \\ ó \\ -x-y \ge x \ge x+y & x+y<0 \end{cases} \\ x+y \ne 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} -2x \le y & y \ge 0 & y > -x \\ ó \\ -2x \ge y & 0 \ge y & y < -x \end{cases} \\ x+y \ne 0 \end{cases}$$

Es decir, la zona coloreada de marrón en el siguiente gráfico

Apellidos y Nombre: Núm:



Las curvas de nivel son hipérbolas ya que:

$$f(x,y)=C \qquad e^{xy}=C>0 \qquad \Leftrightarrow \qquad xy=\log C \ \ (C>0)$$

Comentarios solución apartado b)

Este ejercicio es análogo al ejercicio 8A de la guía del tema 4 que se realizó en clase el día 3 de diciembre.

Comentarios solución apartado c)

Demostrado en clase el día 3 de diciembre.

2

(a) Demostrar que la función $z=y\,g\left(x^2-y^2\right)$, siendo g una función derivable, satisface la ecuación $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$

(b) Justificar si la función z definida implícitamente como función de x y de y por $z^2+\frac{2}{x}=\sqrt{y^2-x^2}$ satisface la relación $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}$.

¿Qué condiciones deben cumplirse para que z defina implícitamente una función de x y de y en un entorno del punto (x_o,y_o,z_o)?

Apellidos y Nombre: Núm:

Comentarios solución apartado a)

Se puede considerar: $z = y\, g(u)$ siendo $u = x^2 - y^2$. Aplicando la regla de la cadena

$$\left.\begin{array}{l} z_x' = y\, g'(u)\, \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ z_y' = g(u) + y g'(u) \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z_x' = y\, g'\left(x^2 - y^2\right) 2x \\ z_y' = g\left(x^2 - y^2\right) + y g'\left(x^2 - y^2\right)(-2y) \end{array}\right\}$$

Sustituyendo en la expresión:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}\left(2xy\, g'\left(x^2 - y^2\right)\right) + \frac{1}{y}\left(g\left(x^2 - y^2\right) - 2y^2 g'\left(x^2 - y^2\right)\right) =$$

$$= 2y\, g'\left(x^2 - y^2\right) + \frac{g\left(x^2 - y^2\right)}{y} - 2y\, g'\left(x^2 - y^2\right) = \frac{g\left(x^2 - y^2\right)}{y} = \frac{z}{y^2}$$

> Ejercicios similares se realizaron en clase el día 11 de diciembre, ver, de la guía del tema 4, el propuesto número 12 y los resueltos 7 y 8 del mismo tema.

Comentarios solución apartado b)

Derivando implícitamente, se tiene que:

$$2 z z_x' - \frac{2}{x^2} = \frac{-x}{\sqrt{y^2 - x^2}} \quad \to z_x' = \frac{-\dfrac{-x}{\sqrt{y^2 - x^2}} + \dfrac{2}{x^2}}{2z}$$

$$2 z z_y' = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}} \quad \to z_y' = \frac{\dfrac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}}}{2z}$$

Sustituyendo en la expresión dada en el enunciado se puede ver que no se cumple la identidad.

Las condiciones que deben cumplirse son las hipótesis del teorema de la función implícita.

> Ejercicios similares se realizaron en clase el día 11 de diciembre, ver, de la guía del tema 4, el propuesto número 13.

Apellidos y Nombre: Núm:

3

(a) Estudiar los extremos relativos de la función $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$

(b) Utilizando la definición de integral definida, calcular el valor de $\int_2^3 x\,dx$.

Nota: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Comentarios solución apartado b)

Como la función es diferenciable, los puntos críticos son los puntos solución del sistema:

$$\begin{cases} f_x^{'}(x,y)=3x^2+3y^2-15=0 \\ f_y^{'}(x,y)=6xy-12=0 \end{cases}$$

Despejando de la segunda ecuación, se tiene que $y=\frac{2}{x}$. Sustituyendo en la primera ecuación

$$x^2+\left(\frac{2}{x}\right)^2-5=0 \qquad \rightarrow x^4+4-5x^2=0 \qquad \rightarrow \qquad x^2=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\begin{cases} x^2=4 & \rightarrow x=\pm 2 \\ x^2=1 & \rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

Los puntos críticos son entonces de la forma $\left(x,\frac{2}{x}\right)$ con $x=\pm 2$, $x=\pm 1$, es decir,

$$(2,1) \quad (-2,-1) \quad (1,2) \quad (-1,-2)$$

Dado que

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix}=36x^2-36y^2 \qquad f_{xx}^{''}(x,y)=6x$$

basta aplicar el teorema del hessiano para clasificar los puntos críticos.

- $H(2,1)=\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}>0$, $f_{xx}^{''}(2,1)=12>0$, en el punto (2, 1) hay un mínimo de valor $f(2,1)$
- $H(-2,-1)=\begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix}>0$, $f_{xx}^{''}(-2,-1)=-12<0$, en el punto (-2, -1) hay un máximo de valor $f(-2,-1)$

Apellidos y Nombre: Núm:

- $H(1,2)=\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix}<0$, en el punto (1,2) hay un punto de silla
- $H(-1,-2)=\begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix}<0$, en el punto (-1,-2) hay un punto de silla

Ejercicios similares se han realizado en clase los días 7 y 11 de diciembre. Pueden consultarse los propuestos en la guía de actividades del tema 5 correspondiente a esos días.

Comentarios solución apartado b)

Como la función $f(x)=x$ es integrable, se puede calcular la integral de la siguiente forma

$$\int_2^3 x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

considerando

$$f(x)=x \qquad \Delta x=\frac{3-2}{n} \qquad c_i=2+i\,\Delta x$$

Es decir,

$$\int_2^3 x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[2+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[2+\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right]=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

Este ejercicio se ha realizado en clase el día 14 de diciembre. Pueden verse también ejercicios similares en la guía de actividades del el tema 5 correspondiente a ese día.

Apellidos y Nombre: Núm:

NOTA: En todos los ejercicios se deberá justificar la respuesta explicando el procedimiento seguido en la resolución del ejercicio.

Bloque 2: 30 +9 puntos

1

(a) Calcula el valor medio de la función $f(x)=\sqrt{4-(x-1)^2}$ en el intervalo [0,3].

(b) Calcula la primitiva de $f(x)=\log(1-x^2)$ que pasa por el punto (0,1)

Puntuación: 5+5 puntos

Apartado a)

El valor medio es

$$\mu=\frac{1}{3}\int_0^3\sqrt{4-(x-1)^2}\;dx$$

Para calcular la integral, se hace el siguiente cambio,

$$\operatorname{sen} t=\frac{x-1}{2}\;\rightarrow\;\cos t\,dt=\frac{dx}{2}$$

$$\left\{\begin{array}{c} x=0\rightarrow t=-\dfrac{\pi}{6} \\ x=3\rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\}$$

$$\sqrt{4-(x-1)^2}=\sqrt{4\left(1-\frac{(x-1)^2}{4}\right)}=2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}=2\cos t$$

Se obtendría:

$$\mu=\frac{1}{3}\int_0^3\sqrt{4-(x-1)^2}\;dx=\frac{4}{3}\int_{-\pi/6}^{\pi/2}\cos^2 t\;dt=\frac{4}{3}\int_{-\pi/6}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{2}{3}\left[t+\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_{t=-\frac{\pi}{6}}^{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}+0+\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{4\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Apartado b)

Se calculan las primitivas de la función $f(x)=\log(1-x^2)$ integrando por partes:

Apellidos y Nombre: Núm:

$$\int \log\left(1-x^2\right)dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \log\left(1-x^2\right) \rightarrow du = \dfrac{-2x}{1-x^2}dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right\} = x\log\left(1-x^2\right) - \int \frac{-2x^2}{1-x^2}dx =$$

$$= x\log\left(1-x^2\right) + \int\left(-2+\frac{2}{1-x^2}\right)dx = x\log\left(1-x^2\right) - 2x + \int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx =$$

$$= x\log\left(1-x^2\right) - 2x + \log\left(|1+x|\right) - \log\left(|1-x|\right) + C$$

Para que pase por el punto (0,1) se tendrá que cumplir que C=1, la primitiva pedida es

$$F(x) = x\log\left(1-x^2\right) - 2x + \log\left(|1+x|\right) - \log\left(|1-x|\right) + 1$$

2

(a) Dada la superficie $z = x\sqrt{x+y}$

- a.1 Hallar la pendiente de la recta que es paralela al plano XZ y tangente a la superficie en el punto P(1, 3,2).
- a.2 Calcular la ecuación de la recta tangente del apartado anterior
- a.3 Calcular la derivada direccional de la función en el punto (1,3) en la dirección del vector que une los puntos (1,3) con (2,4).

(b) Sea la superficie $z = f(x,y)$ definida implícitamente por

$$z^3 + z\log\left(x^2+y^2\right) + y^2 = 8$$

Se pide

b.1) calcular las derivadas parciales de z en el punto (1,0)

b.2) la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (1,0)

b.2) la ecuación de la recta normal a la superficie en el punto (1,0,2).

(c) Utilizando la diferencial primera obtener un valor aproximado de

$$\sqrt{e^{0.1} + 3\cos(-0.2)}$$

Puntuación: 8+7+5 puntos

Apartado a)

a.1 Se trata de calcular la derivada parcial de la función en el punto (1, 3)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{x+y} + \frac{x}{2\sqrt{x+y}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(1,3) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

Apellidos y Nombre: Núm:

a.2 La ecuación de la recta tangente es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 3 \\ z = 2 + \dfrac{9}{4}t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

a.3 Como f es diferenciable en el punto (1,3) por tener derivadas parciales continuas, la derivada direccional se calculará multiplicando escalarmente el gradiente por la dirección:

$$D_u f(1,3) = \nabla f(1,3) \cdot \mathbf{u}$$

Como

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{2\sqrt{x+y}} \quad \to \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,3) = \frac{3}{4}$$

$$\nabla f(1,3) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(1,3), \frac{\partial z}{\partial y}(1,3)\right) = \left(\frac{9}{4}, \frac{3}{4}\right) \qquad \mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

se tendrá

$$D_u f(1,3) = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Apartado b)

Derivando implícitamente

$$z^3 + z\log\left(x^2 + y^2\right) + y^2 = 8$$

se tendrá:

$$3z^2 z_x^{'} + z_x^{'}\log\left(x^2+y^2\right) + z\frac{2x}{x^2+y^2} = 0 \qquad \to \qquad 3 \cdot 2^2 z_x^{'} + z_x^{'}\log 1 + 2\,\frac{2}{1} = 0$$

$$\to \qquad z_x^{'}(1,0) = -\frac{1}{3}$$

$$3z^2 z_y^{'} + z_y^{'}\log\left(x^2+y^2\right) + z\frac{2y}{x^2+y^2} + 2y = 0 \quad \to 3 \cdot 2^2 z_y^{'} + z_y^{'}\log 1 = 0$$

$$\to \qquad z_y^{'}(1,0) = 0$$

Plano tangente:

Apellidos y Nombre: Núm:

$$z = z(1,0) + z_x'(1,0)(x-1) + z_y'(1,0)(y-0) \qquad \to \qquad z = 2 - \frac{1}{3}(x-1)$$

Recta normal:

Se obtiene como la recta que pasa por el punto $(1,0,f(1,0))$ y tiene por vector director el perpendicular al plano tangente: $\mathbf{n} = \left(-\frac{1}{3}, 0, -1\right)$, es decir

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{3}\lambda \\ y = 0 \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Apartado c)

Se considera $f(x,y) = \sqrt{e^x + 3\cos(y)}$, el punto $(a,b) = (0,0)$ y $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = -0.2$ Se tiene

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) \approx f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y$$

Operando:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x + 3\cos(y)}} \to \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-3\operatorname{sen} y}{2\sqrt{e^x + 3\cos(y)}} \quad \to \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\sqrt{e^{0.1} + 3\cos(-0.2)} \approx f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot 0.1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot(-0.2) = 2 + \frac{1}{40} = \frac{81}{40}$$

3

Dada la función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, se pide

(a) Escribir la expresión que aproxima $F(1)$ mediante la suma de Riemann centrada considerando una partición de $[0,1]$ en 10 subintervalos iguales.

(b) Escribir el código Matlab para calcular el valor aproximado de $F(1)$ mediante la suma de Riemann del apartado anterior.

(c) Escribir el código Matlab para representar $F'(x)$ en [0,10].

Puntuación: 6 (apartados a+b)+3 puntos (apartado c)

Apartado a) y b)

Considerando

$$f(x)=e^{-x^2} \qquad \Delta x=\frac{1-0}{10} \qquad c_i=\frac{\Delta x}{2}+(i-1)\Delta x \qquad i=1,2,\ldots,10$$

se tendrá,

$$F(1)\approx\sum_{i=1}^{10} f(c_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{10}\frac{e^{-c_i^2}}{10}$$

Para realizar los cálculos en Matlab se deberá escribir el siguiente código:

```
n=10;
inc=1/10;
i=1:10;
ci=inc/2:inc:1;
sum(exp(-ci.^2))/10
```

Apartado c)

Como $f(x)=e^{-x^2}$ es continua, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$F'(x)=e^{-x^2}$$

El código Matlab para representar la función derivada en el intervalo [0,10] es

```
x=0:0.1:10;
plot(x,exp(-x.^2))
```

Bloque 1: Total: 35 + 16 puntos

4

(a) Dada la función $f(x)=\sqrt{1+3x}$

- Escribir el polinomio de Taylor de orden n centrado en el punto 0 de $f(x)$.
- Utilizar el polinomio de grado 3 para dar un valor aproximado de

Apellidos y Nombre: Núm:

$f(0.3)$ estimando el error cometido en la aproximación.

(b) Calcula el desarrollo en serie de potencias de la función $f(x)=\dfrac{1}{-x^2+3x-2}$ indicando su campo de convergencia.

(c) Calcular la suma de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \qquad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+2}}{3^{2n-1}}$$

Puntuación: 10+8+7 puntos

Apartado a)

$$f(x)=\sqrt{1+3x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+3x)^{-1/2}(3) \qquad \to f'(0)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)(1+3x)^{-\frac{3}{2}}(3)^2 \qquad \to f''(0)=\frac{-3^2}{2^2}$$

$$f'''(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)(1+3x)^{-\frac{5}{2}}(3)^3 \qquad \to f'''(0)=\frac{(-1)\cdot(-3)\cdot 3^3}{2^3}$$

$$f^{iv}(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)(1+3x)^{-\frac{7}{2}}(3)^4 \qquad \to f^{iv}(0)=\frac{(-1)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot 3^4}{2^4}$$

...

$$f^{(n}(x)=\frac{(-1)(-3)(-5)\dots(2n-3)}{2^n}(1+3x)^{-\frac{2n-1}{2}}(3)^4 \qquad \to f^{(n}(0)=\frac{(-1)(-3)(-5)\dots(2n-3)}{2^n}(3)^4$$

El polinomio de Taylor de grado n en a=0 es

$$T_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^{(n}(0)}{n!}x^n$$

$$T_n(x)=1+\frac{3}{2}x-\frac{3^2}{2^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 3^3}{2^3\cdot 3!}x^3+\dots+\frac{(-1)^n 1\cdot 3\dots(2n-3)}{2^n\ n!}3^{n+1}x^n$$

El polinomio de Taylor de grado 3: $T_3(x)=1+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{9}{8}x^2+\dfrac{27}{16}x^3$

El resto de Taylor de orden 3 es:

Apellidos y Nombre: Núm:

$$R_3(x)=\frac{f^{(iv}(t)}{4!}x^4=\frac{-1\cdot 3\cdot 5\cdot 3^4}{2^4\ 4!}(1-3t)^{-\frac{7}{2}}(0.3)^4 \qquad \text{con } t\in(0,0.3)$$

$$|R_3(x)|=\left|\frac{5\cdot 3^8}{2^7\,10^4\,(1+3t)^{\frac{7}{2}}}\right|\le\frac{5\cdot 3^8}{2^7\,10^4} \qquad t\in(0,0.3)$$

Apartado b)

Descomponiendo en fracciones simples

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1/3}{x-1}-\frac{1/3}{2+x}$$

Utilizando el desarrollo de la serie geométrica se tendrá:

$$f(x)=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-x}-\frac{1}{6}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\underbrace{-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n}_{si\ |x|<1}\underbrace{-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n}_{si\ \left|\frac{x}{2}\right|<1} \qquad si\ |x|<1$$

Apartado c)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$ es divergente, ya que basta aplicar el criterio de comparación por paso al límite.

$$\log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\approx\frac{n+1}{n+2}-1=\frac{-1}{n+2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n+2}=-\infty$$

Además: $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=-\infty$

La serie $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+2}}{3^{2n-1}}$ es geométrica con razón r=2/9 menor que 1, por lo tanto, es convergente y su suma es

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{3^{-1}}\left(-\frac{2}{9}\right)^n=\frac{12\left(-\frac{2}{9}\right)^2}{1+\frac{2}{9}}=\frac{16}{33}$$

5

(a) Uno de los vértices de un hexágono regular inscrito en una circunferencia con centro en el origen tiene por coordenadas el punto ($P\left(-1,\sqrt{3}\right)$. Hallar las coordenadas de los otros vértices y escribirlas en

Apellidos y Nombre: Núm:

forma binómica y en forma exponencial.

(b) Representar el conjunto de números complejos z que verifican $|z| \geq |2z-1|$.

Puntuación: 10 puntos

Comentarios solución a)

Los vértices del hexágono son:

$$z = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+k\frac{\pi}{3}\right)} \qquad k = 0,1,2,3,4,5$$

$$z_k = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}+k\frac{\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+k\frac{\pi}{3}\right)\right] \qquad k = 0,1,2,3,4,5$$

$$z_0 = -1+\sqrt{3}i = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} \quad z_1 = -2 = 2e^{\pi i} \quad z_2 = -1-\sqrt{3}i = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$$

$$z_3 = 1-\sqrt{3}i = 2e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad z_4 = 2 = 2e^{0i} \quad z_5 = 1+\sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$$

Apartado b)

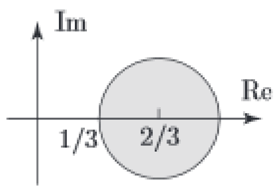
El conjunto de los números complejos que verifican $|z| \geq |2z-1|$ son aquellos $z = x+iy = (x,y)$ que verifican

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{(2x-1)^2+(2y)^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 4x^2-4x+1+4y^2 \Leftrightarrow$$

$$3x^2+3y^2-4x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3} \leq 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2-\frac{4}{9}+\frac{1}{3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2 \leq \frac{1}{9}$$

Se trata del círculo de centro (2/3,0) y radio 1/3.



$|z| \geq |2z-1|$

Apellidos y Nombre: Núm:

6

Escribe el código Matlab para

(a) Calcular la parte real y la parte imaginaria del siguiente número

$$z=\left(1+\sqrt{2}\ i\right)^{8} e^{1+\pi i}$$

Calcula también el número complejo w resultado de girar 120 grados el número z.

(b) Representar la gráfica de la curva $x^6+2x^3y-y^7=2$ junto con su recta tangente en el punto P(1,1).

(c) Calcular la diferencia entre el valor de la función $f(x)=e^x$ y la aproximación que se obtiene con el polinomio de Taylor centrado en el origen de grado 10 de la dicha función cuando x se considera los primeros 20 números pares.

Puntuación: 6+6+4 puntos

Solución

```
%Apartado a
z=(1+sqrt(2)*i)^8*exp(1+pi*i)
real(z)
imag(z)
w=z*exp(2*pi/3*i)
%Apartado b
ezplot('x^6+2*x^3*y-y^7=2')
hold on
ezplot('y-1=12/5*(x-1)')
axis equal
%Apartado c
x=2:2:40;
poli=1-x+x.^2/2-x.^3/6+x.^4/24;
exp(x)-poli
```

Nota: En el apartado b hay que tener en cuenta que la recta tangente se calcula obteniendo previamente su pendiente mediante derivación implícita:

$$6x^5+6x^2y+2x^3y'-7y^6y'=0 \rightarrow y'=-\frac{6x^5+6x^2y}{2x^3-7y^6}$$

$$y'_P=+\frac{12}{5} \qquad r\equiv y-1=+\frac{12}{5}(x-1)$$

Apellidos y Nombre: Núm:

http://www.unioviedo.es/bayon/calculo/problemas-tema4.pdf

http://cvb.ehu.es/open_course_ware/castellano/tecnicas/ejer_resu_infini/ejercicios-resueltos/tema-5-derivadas-de-funciones-de-varias-variables.pdf

Apellidos y Nombre: Núm:

EXAMEN DE SEPTIEMBRE – PARTE I

NOTA: En todos los ejercicios se deberá justificar la respuesta explicando el procedimiento seguido en la resolución del ejercicio.

Calificación: 3 puntos (puntos preguntas * 3/15)

1

La distancia del afijo $z = x + iy$ al origen es dos unidades mayor que su abscisa, entonces:

(a) $y^2 = 4x + 4$

(b) $|z| = 2 + \operatorname{Im} z$

(c) Las dos afirmaciones anteriores son ciertas

(d) Ninguna de las afirmaciones es cierta

Puntuación: 1.5 puntos

Apellidos y Nombre: Núm:

2

Elige la opción con los complejos que no pueden ser raíces enésimas, para el valor de n indicado, del mismo número complejo

(a) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)$, $\sqrt{2}e^{-\pi i/8}$, para n=8

(b) $3\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{12}\right)$, $3e^{-11\pi i/12}$, para n=4

(c) $2e^{-2\pi i/3}$, $2e^{\pi i/6}$, para n=3

(d) Todas las opciones contienen complejos que son raíces enésimas para el n indicado, del mismo complejo.

Puntuación: 1.5 puntos

Apellidos y Nombre: Núm:

3

Elige la fracción que se descompone en suma de dos fracciones irreducibles cuyo denominador es un polinomio, de coeficientes reales, de grado 1

(a) $\dfrac{x^2}{x^2-6x+7}$

(b) $\dfrac{x}{x^2+6x+7}$

(c) $\dfrac{x}{x^2+6x+11}$

(d) Ninguna de las anteriores

Puntuación: 2 puntos

Apellidos y Nombre: Núm:

4

Se supone que $y = f(x)$ es derivable en un entorno de $x = x_o$ y se denota por $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$; el alumno A dice que $dy(x_o) = f'(x_o)\Delta x$, el alumno B asegura que $dy(x_o)$ sirve para aproximar Δy y el alumno C añade que eso es porque $f'(x_o)$ es aproximadamente la relación $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

(a) Todos tienen razón

(b) Sólo A está diciendo lo correcto

(c) B y C están diciendo lo correcto

(d) Todos se equivocan

Puntuación: 1 punto

Apellidos y Nombre: Núm:

5

Si x e y cumplen $x^2\left(y+4\right)-2x\operatorname{sen}y=4$, entonces

a) $x=1$ e $y=0$ no cumplen esa relación

b) la tasa de cambio de $y\left(x\right)$ respecto de x en $x=1$, cuando $y=0$, es 8

c) esa relación no es suficiente para saber cómo varía y respecto de x en el entorno del punto $P\left(1,0\right)$.

d) Ninguna de las anteriores es correcta.

Puntuación: 1.5 punto

Apellidos y Nombre: Núm:

6

Cuando utilizamos el polinomio de Taylor de grado 1 de centro 0 de la función $f(x)=\sqrt{1+x}$ para aproximar el valor de $\sqrt{0.8}$ (utilizando el resto de Lagrange), tendremos que:

(a) $\sqrt{0.8}\approx 0.95$ con un error menor que 0.01

(b) $\sqrt{0.8}\approx 0.9$ con un error menor que $2^{-5}\cdot 0.3$

(c) $\sqrt{0.8}\approx 0.85$ con un error menor que $2^{-5}\cdot 0.03$

(d) Ninguna de las anteriores

Nota: Se puede utilizar que una cota superior de la función $g(t)=(1+t)^{-3/2}$ en el intervalo $[-0.2,0]$ es 15/8

Puntuación: 2 punto

Apellidos y Nombre: Núm:

7

Elige la opción que presenta la relación correcta entre las parciales de la función dada

(a) Función $z(x,y)=\dfrac{1}{\log\left(x^2+y^2\right)}$, relación $yz_x^{'}=xz_y^{'}$

(b) Función $z(x,y)=\log\left(x^2+xy+y^2\right)$, relación $xz_x^{'}-yz_y^{'}=2$

(c) Las dos opciones son válidas

(d) Ninguna de las dos es válida

Puntuación: 1.5 punto

Apellidos y Nombre: Núm:

8

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces $G(x)=F(3x)$ es una primitiva

a) $f(3x)$

b) $\frac{1}{3}f(x)$

c) $3f(x)$

d) Ninguna de las anteriores

Puntuación: 1 punto

Apellidos y Nombre: Núm:

9

El área de la región del plano XY limitada entre $x=0$, $x=\frac{3}{2}\pi$ y las gráficas de $f(x)=1+\operatorname{sen}x$ y $g(x)=1-2\operatorname{sen}x$ es

(a) $\int_0^{3\pi/2} 3\operatorname{sen}x\,dx=3$

(b) $\int_0^{\pi/2} 3\operatorname{sen}x\,dx-\int_{\pi/2}^{3\pi/2} 3\operatorname{sen}x\,dx=3+0=3$

(c) $\int_0^{\pi} 3\operatorname{sen}x\,dx-\int_{\pi}^{3\pi/2} 3\operatorname{sen}x\,dx=6+3=9$

(d) Ninguna de las anteriores es correcta

Puntuación: 1.5 punto

Apellidos y Nombre: Núm:

10

Sea $z = f(u)$ una función derivable dos veces. Si $u = u(x,y)$ admite derivadas parciales y se cumple

$$z_x' = -z_y' = f'(u) \qquad z_{xx}'' = z_{yy}'' = -z_{xy}'' = f''(u)$$

elige una opción posible para $u(x,y)$:

(a) $u = x - y$

(b) $u = x + y$

(c) Las dos son posibles

(d) Ninguna de las otras opciones propuestas es posible

Puntuación: 1.5 puntos

Apellidos y Nombre: Núm:

EXAMEN SEPTIEMBRE – PARTE II

NOTA: En todos los ejercicios se deberá justificar la respuesta explicando el procedimiento seguido en la resolución del ejercicio.

Puntuación: 7

1

a) Calcular el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen de las funciones $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x)=\sqrt{1-x}$ indicando, en ambos casos, su campo de convergencia.

b) Escribir el código Matlab que permita, dado el punto $x=0.1$, aproximar el valor de $g(x)=\sqrt{1-x}$ por los diez primeros términos de la serie de potencias obtenida en el apartado a).

(d) Determinar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\left(\dfrac{2^n}{3^{2n+1}}\right)$. Enunciar el criterio utilizado

Puntuación: 3.0 puntos (1.7+0.5+0.8)

Apellidos y Nombre: Núm:

2

Dada la función $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x+y+1}$, se pide

(a) Escribir el código Matlab para representar esta función en un rectángulo que contenga al punto (1,3).

(b) Determinar el gradiente de f en el punto (1,3). Comprueba que el gradiente es ortogonal a la curva de nivel que pasa por dicho punto.

(c) Determinar la derivada direccional de la función en la dirección que une el punto (1,3) con el (4,7). En esta dirección, ¿el valor de f aumenta o disminuye respecto a $f(1,3)$?

(d) Escribir el código Matlab para calcular un valor aproximado de $f(1.1,\ 2.8)$ utilizando la diferencial.

Puntuación: 2 puntos (0.5+0.5+0.5+0.5)

Apellidos y Nombre: Núm:

3

(a) Calcular el valor medio integral de la función $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ en el intervalo [0,1]. ¿Se alcanza este valor medio? Justificar la respuesta.

(b) Calcular la primitiva de $f(x)=\log(1-x^2)$ que pasa por el punto (0,1)

Puntuación: 2 puntos (1+1)

Apellidos y Nombre: Núm: