Apellidos y Nombre: Núm:

NOTA: En todos los ejercicios se deberá justificar la respuesta explicando el procedimiento seguido en la resolución del ejercicio.

Prueba 6 octubre de 2014

OPCIÓN A

1

(a) Justificar la siguiente igualdad: $i^2 = -1$.

(b) Escribir en forma exponencial los siguientes números complejos:

$$z = \frac{\left(-1-\sqrt{3}\,i\right)^{27}}{\overline{i\,e^{2\pi i}}} \qquad w = \sum_{n=2}^{235} i^n$$

Comentarios solución:

El apartado a) está realizado en clase el primer día, también aparece en la guía del tema 1 (pag. 2).
El apartado b) es un ejercicio similar a los propuestos el día 29 de septiembre (ejercicio 4 de las actividades propuestas en el tema 1).

(b.1) $z = \dfrac{\left(-1-\sqrt{3}\,i\right)^{27}}{\overline{i\,e^{2\pi i}}} = 2^{27} e^{\frac{\pi}{2} i}$ ya que

$$\left(-1-\sqrt{3}\,i\right)^{27} = \left(2e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^{27} = 2^{27} e^{-\frac{2*27\pi}{3}i} = 2^{27} e^{-18\pi i} = 2^{27}$$

$$e^{2\pi i} = 1$$

$$\overline{ie^{2\pi i}} = \overline{i} = -i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

(b.2) Teniendo en cuenta que las potencias de i son -1, -i, 1, i agrupando las sumas de cuatro en cuatro términos se obtendrá que la suma de cada grupo de cuatro sumandos es 0. Como hay 234 sumandos, se pueden hacer 58 grupos de 4 y sobrarán los dos últimos sumandos:

$$w = \underbrace{\sum_{n=2}^{235} i^n}_{\substack{234\ sumandos \\ 234=4*58+2}} = \underbrace{\left(i^2+i^3+i^4+i^5\right)}_{=0} + \underbrace{\left(i^6+i^7+i^8+i^9\right)}_{=0} + \ldots + \underbrace{\left(i^{230}+i^{231}+i^{232}+i^{233}\right)}_{=0} + i^{234} + i^{235} =$$

$$= i^2 + i^3 = -1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

Apellidos y Nombre: Núm:

OPCIÓN B

1

(c) Justificar la razón por la cual el producto de dos números complejos de argumentos φ y α, es un número complejo cuyo argumento es $\varphi+\alpha$

(d) Escribir en forma exponencial los siguientes números complejos:

$$z=\frac{\left(-1-\sqrt{3}\,i\right)^{21}}{\overline{i^{2014}}\;e^{2\pi i}} \qquad w=\frac{2_{\pi}\left(2+2i\right)}{e^{3+\frac{\pi}{3}i}}$$

Comentarios solución:

El apartado a) está explicado en clase cuando se explicó como hacer el producto en forma trigonométrica.
El apartado b) es un ejercicio similar a los propuestos el día 29 de septiembre (ejercicio 4 de actividades del tema 1).

(a) Si se utiliza la forma exponencial se justificará demostrando que $e^{i\varphi}e^{i\alpha}=e^{i(\varphi+\alpha)}$. Para ello,

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi}e^{i\alpha} &= \left(\cos\varphi+isen\varphi\right)\left(\cos\alpha+isen\alpha\right)=\\
&=\left(\cos\varphi\cos\alpha-sen\varphi sen\alpha\right)+i\left(\cos\varphi sen\alpha+sen\varphi\cos\alpha\right)=\\
&=\cos\left(\varphi+\alpha\right)+isen\left(\varphi+\alpha\right)=e^{i(\varphi+\alpha)}
\end{aligned}$$

(b.1) $z=\dfrac{\left(-1-\sqrt{3}\,i\right)^{21}}{\overline{i^{2014}}\;e^{2\pi i}}=\dfrac{2^{21}}{-1}=-2^{21}=2^{21}e^{\pi i}$ ya que

$$\left(-1-\sqrt{3}\,i\right)^{21}=\left(2e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^{21}=2^{27}e^{-\frac{2*21\pi}{3}i}=2^{21}e^{-14\pi i}=2^{21}$$

$$i^{2014}=i^{2}=-1 \quad\Rightarrow\quad \overline{i^{2014}}=-1$$

$$e^{2\pi i}=1$$

(b.2) $w=\dfrac{2_{\pi}\left(2+2i\right)}{e^{3+\frac{\pi}{3}i}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{e^{3}}e^{\frac{11\pi}{12}i}$ ya que

$$\left.\begin{array}{l}
2_{\pi}=2e^{\pi i}\\
2+2i=2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\\
e^{3+\frac{\pi}{3}i}=e^{3}e^{\frac{\pi}{3}i}
\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{2_{\pi}\left(2+2i\right)}{e^{3+\frac{\pi}{3}i}}=\frac{2e^{\pi i}\;2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}{e^{3}e^{\frac{\pi}{3}i}}=\frac{4\sqrt{2}}{e^{3}}e^{\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)i}=\frac{4\sqrt{2}}{e^{3}}e^{\frac{11\pi}{12}i}$$

Apellidos y Nombre: Núm:

Errores habituales

Debéis tener en cuenta que:

- $e^a + e^b \neq e^{a+b}$
- $e^{a+bi} = e^a e^{bi}$
- $\arg\left(-1-\sqrt{3}\ i\right) \neq \frac{\pi}{3}$
- $\left|a+bi\right| \neq \sqrt{a^2+\left(bi\right)^2}$
- $\overline{i^{2014}} \neq -i^{2014}$
- $w = \sum_{n=2}^{235} i^n \neq i^{235}$

Apellidos y Nombre: Núm:

NOTA: En todos los ejercicios se deberá justificar la respuesta explicando el procedimiento seguido en la resolución del ejercicio.

Prueba 3 noviembre de 2014

1

(A) Una función $f(x)$ verifica que $f(2)=1$ y $f(2.01)=1.3$. Obtén un valor aproximado de la derivada de f en el punto 2.

(B) Indica qué teorema justifica que el polinomio de Taylor de una función f en el punto a permite aproximar el valor de f en un punto x próximo al punto a y que además esta aproximación es mejor cuanto más grande sea el grado del polinomio. Enuncia dicho teorema.

(C) Si $f(x)$ es una función de una variable definida en el conjunto de los números reales, ¿qué relación tiene la gráfica de $f(x)$ y la de la función $g(x)=f(x+3)+4$? Haz la representación de estas dos funciones cuando se considera $f(x)=\operatorname{sen}(x)$.

Comentarios solución:

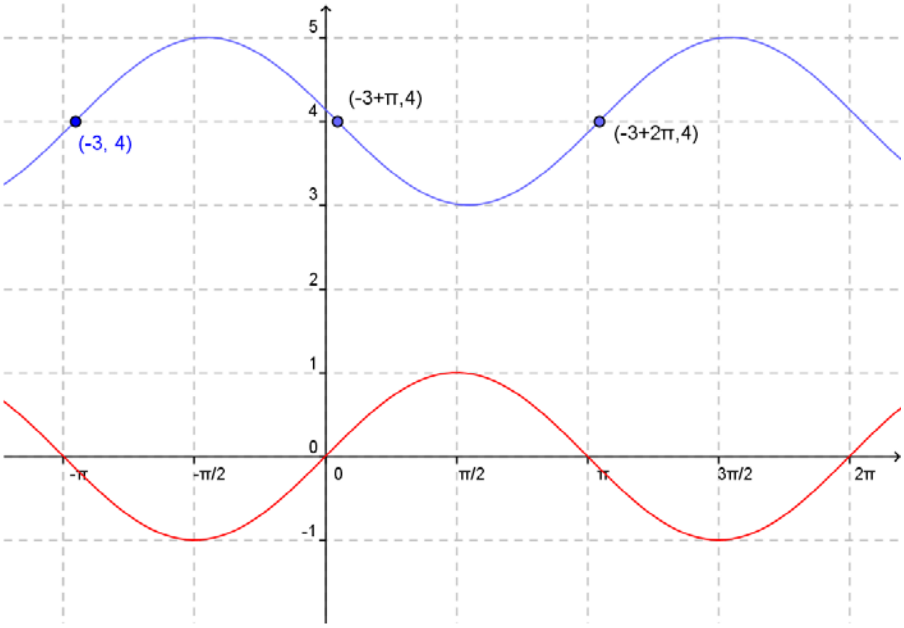
- En el apartado a) se utiliza la definición de pendiente de la recta tangente como el límite del cociente incremental (visto en clase el día 9 de octubre de 2014).
- En el apartado b) se debe enunciar el Teorema de Cauchy (ver página 16 del tema 2).
- En el apartado c) se deben realizar transformaciones elementales. Explicado en clase el día 13 de octubre y en el día 15 de octubre en la práctica 3 de ordenador.

(a) $f'(a)\approx\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ siendo a=2, h=2’01-2=0.01

$$f'(d)\approx\frac{f(2'01)-f(2)}{0'01}=\frac{1'3-1}{0'01}=30$$

Apellidos y Nombre: Núm:

(c) La gráfica de g es la gráfica de la función f trasladada horizontalmente 3 unidades a la izquierda y 4 unidades verticalmente hacia arriba. En el caso de que $f(x)=sen(x)$ las gráficas de f y g aparecen representadas en la siguiente imagen:



2

(A) Se considera la función $\left(x^2+y^2+1\right)^2=9+16x^2$. Calcula la recta normal a esa curva en el punto P$\left(1,\sqrt{3}\right)$.

(B) Dada las funciones f y g derivables se considera la función $h(x)=f\left(x^2g(x)\right)$. Calcula $h'(2)$ sabiendo que: $g(2)=1$, $g'(2)=2$, $f(4)=3$, $f'(4)=4$

Comentarios solución:

- En el apartado a) se debe utilizar la derivación implícita. Ver ejercicio 5 resuelto del tema 2 (página 47) y ejercicios 16 y 17 propuestos del mismo tema (pág. 39) realizados en clase el día 16 de octubre de 2014.
- Ver ejercicio propuesto como tarea el día 13 de octubre y resuelto en clase posteriormente.

Apellidos y Nombre: Núm:

(a) Derivando implícitamente

$$2\left(x^2+y^2+1\right)\left(2x+2yy'\right)=32x$$

Simplificando

$$\left(x^2+y^2+1\right)\left(x+yy'\right)=8x$$

Despejando y'

$$\left(x^2+y^2+1\right)yy'=8x-x\left(x^2+y^2+1\right)$$

$$y'=\frac{8x-x\left(x^2+y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)y}$$

Sustituyendo en el punto P se obtiene la pendiente de la recta tangente a la curva en P

$$y'(P)=\frac{8-(1+3+1)}{(1+3+1)\sqrt{3}}=\frac{3}{5\sqrt{3}}$$

La recta normal en P tiene por pendiente: $m=-\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$$y-\sqrt{3}=\frac{-5\sqrt{3}}{3}(x-1)$$

(b) Aplicando la regla de la cadena a la función $h(x)=f\left(x^2g(x)\right)$ se tiene que:

$$h'(x)=f'\left(x^2g(x)\right)\left(2xg(x)+x^2g'(x)\right)$$

Sustituyendo en x=2

$$h'(2)=f'\left(4g(2)\right)\left(4g(2)+4g'(2)\right)=f'(4)(4+8)=4\cdot 12=48$$

Errores habituales

Debéis tener en cuenta que:

Apellidos y Nombre: Núm:

- $\sqrt{\left(x^2+y^2+1\right)^2}=\sqrt{9+16x^2} \Rightarrow x^2+y^2+1=3+4x$. Esto no es correcto ya que $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$
- Escribir: $f(x)=\left(x^2+y^2+1\right)^2=9+16x^2$. La ecuación $\left(x^2+y^2+1\right)^2=9+16x^2$ define en las proximidades del punto P una función f que depende de x (que incluso en este caso podría despejarse) pero no significa que: $f(x)=\left(x^2+y^2+1\right)^2=9+16x^2$
- Al derivar implícitamente no poner paréntesis, escribiendo:

$$2\left(x^2+y^2+1\right)2x+2yy'=32x$$

3

(a) Dada la función $f(x)=\log\left(1-\frac{x}{2}\right)$, se pide calcular, utilizando un polinomio de Taylor, un valor aproximado de $\log(0.5)$ con un error menor que 10^{-2}.

(b) Escribir las órdenes Matlab necesarias para

- calcular el valor aproximado de $\log(0.5)$ por el polinomio obtenido en el apartado a.
- Representar la función $f(x)$ junto con su polinomio utilizando el comando plot.

Comentarios solución:

- El ejercicio (a) es idéntico al apartado d) del ejercicio 12 propuesto del tema 2, que se propuso como tarea el día 27 de octubre y aparece como segundo ejercicio de la práctica de ordenador del día 29 de octubre.
- El ejercicio (b) se pide lo mismo que en los ejercicios realizados en las clases de prácticas de los días 23 y del 29 de octubre.

Apellidos y Nombre: Núm:

(a) Como se pide obtener un valor aproximado para log(0.5) se tendrá que $\log\left(1-\frac{x}{2}\right)=\log\left(\frac{1}{2}\right)$ para x=1. Tomamos a=0.

En este ejercicio se trata de escribir el resto del polinomio de Taylor de grado n de la función f en el punto a=0 cuando el valor de x=1 y, una vez acotado, analizar para qué valor de n se podría asegurar que el resto es menor que 10^{-2}. La expresión del resto de orden n en general es:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad t\in(a,x)$$

En este caso

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!} \qquad t\in(0,1)$$

Calculamos entonces la derivada de orden n+1 de f.

$$f(x)=\log\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{x-2}=(x-2)^{-1}$$

$$f''(x)=(-1)(x-2)^{-2}$$

$$f'''(x)=(-1)(-2)(x-2)^{-3}$$

…

$$f^{(n}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!(x-2)^{-n}$$

El resto del polinomio de Taylor de grado n para a=0 y x=1 tiene por expresión:

$$R_n(1)=\frac{(-1)^n\,n!\,(t-2)^{-(n+1)}}{(n+1)!}=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(t-2)^{n+1}} \qquad t\in(0,1)$$

Acotando el resto:

$$\left|R_n(1)\right| = \left|\frac{1}{(n+1)(t-2)^{n+1}}\right| < \frac{1}{n+1} \qquad t \in (0,1)$$

Para asegurar que el resto sea menor que 10^{-2}, basta elegir n cumpliendo

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{100}$$

es decir, n=100.

Para calcular el valor aproximado de log(0.5) calculamos la aproximación por el polinomio de Taylor de grado 100

$$T_{100}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(100}(0)}{100!}x^{100}$$

Considerando siendo $f^{(n}(0) = -\frac{(n-1)!}{2^n}$ y x=1.

(b) Ver práctica de ordenador.

Errores habituales

- No derivar bien la función $f(x) = \log\left(1 - \frac{x}{2}\right)$
- Escribir como expresión del polinomio de Taylor

$$T_n(x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n}(x)}{n!}(x-a)^n$$

en lugar de

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

- Utilizar mal las propiedades del logaritmo, diciendo por ejemplo:

$$\log\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \log(1) - \log\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \text{ó} \qquad \log\left(\frac{2-x}{2}\right) = \frac{\log(2-x)}{\log(2)}$$

Apellidos y Nombre: Núm:

14 de noviembre de 2014

1

(a) Resolver la ecuación: $z^4 = i$ escribiendo los números complejos solución en forma exponencial con argumento comprendido entre $-\pi$ y π.

(b) Escribir el código Matlab necesario para representar los números complejos solución del apartado anterior

Comentarios solución

El apartado b) es igual que el ejercicio 2c) de la práctica 1 realizada el 1 de octubre.

(a) Se trata de calcular las raíces cuartes de i

$$z = \sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{\pi/2+2k\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)} \quad k = 0,1,2,3$$

Escribiendo las 4 raíces con su argumento principal se tendrá:

$$z_o = e^{\frac{\pi}{8}i} \qquad z_1 = e^{\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)i} = e^{\frac{5\pi}{8}i}$$

$$z_3 = e^{\left(\frac{9\pi}{8}-2\pi\right)i} = e^{-\frac{7\pi}{8}i} \qquad z_4 = e^{i\left(\frac{13\pi}{8}-2\pi\right)} = e^{-i\frac{3\pi}{8}}$$

2

Calcula utilizando la diferencial un valor aproximado de $\log(1.5)$. Da una cota del error de la aproximación.

Comentarios solución:

Apellidos y Nombre: Núm:

Hecho en clase el día 27 de octubre. El ejercicio propuesto 8 del tema 2 de funciones de una variable es un ejercicio similar.

3

Calcular los ángulos que forman al cortarse las curvas definidas por $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-8=0$. Representar estas dos curvas.

Nota: El ángulo que forman dos curvas es el ángulo determinado por sus rectas tangentes. Se puede calcular así $tg\alpha=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ donde m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas tangentes a ambas curvas en el punto de intersección.

Comentarios solución:

Hecho en clase el día 16 de octubre. Ver ejercicio propuesto número 16 del tema 2 de funciones de una variable.

4

(a) Calcular la derivada enésima de la siguiente función:

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x-2)}$$

(b) Escribir como sumatorio el polinomio de Taylor de grado n de la función anterior en el punto 0.

Comentarios solución:

a) Hecho en clase. Ver también el ejercicio propuesto 7e) del tema 2 de funciones de una variable. Para calcular la derivada, basta descomponer en fracciones simples.
b) Una vez calculada la derivada enésima basta escribir la expresión del polinomio de Taylor de la función en el punto 0: $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k}(0)}{k!}x^k$

Apellidos y Nombre: Núm:

Descomponiendo en fracciones simples:

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2} \qquad A=-1,\ B=1$$

$$f(x)=\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x-2}=-(x+1)^{-1}+(x-2)^{-1}$$

Aplicando que la derivada de una suma es la suma de derivadas:

$$f'(x)=-(-1)(x+1)^{-2}+(-1)(x-2)^{-2}$$

$$f''(x)=-(-1)(-2)(x+1)^{-3}+(-1)(-2)(x-2)^{-3}$$

$$f'''(x)=-(-1)(-2)(-3)(x+1)^{-4}+(-1)(-2)(-3)(x-2)^{-4}$$

$$\dots$$

$$f^{(k}(x)=(-1)^k k!\left[-(x+1)^{-(k+1)}+(x-2)^{-(k+1)}\right] \qquad f^{(k}(0)=(-1)^k k!\left[-1+(-2)^{-(k+1)}\right]$$

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^{k+1}-\frac{1}{2^{k+1}}\right]x^k$$

5

(a) Determina la convergencia de las siguientes series, calculando su suma en el caso de ser convergente:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n+3}}{5\cdot 3^{2n-2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2\log\left(\frac{n+2}{n-1}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{e^{-n}}$$

(b) Escribir el código Matlab necesario para calcular la suma de los 20 primeros términos de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\log\left(\frac{n+2}{n-1}\right)$

Comentarios solución:

a), b) y c) son ejercicios análogos a los realizados en clase los días 6 y 10 de noviembre (ver cuaderno de actividades del tema 3).

Apellidos y Nombre: Núm:

d) Ver ejercicio 1 de la práctica 6 realizada el 5 de noviembre.

(a) Es una serie geométrica convergente de razón -2/9. Su suma es $S=\dfrac{\dfrac{2^5}{5\cdot 3^2}}{1+\dfrac{2}{9}}=\dfrac{32}{55}$

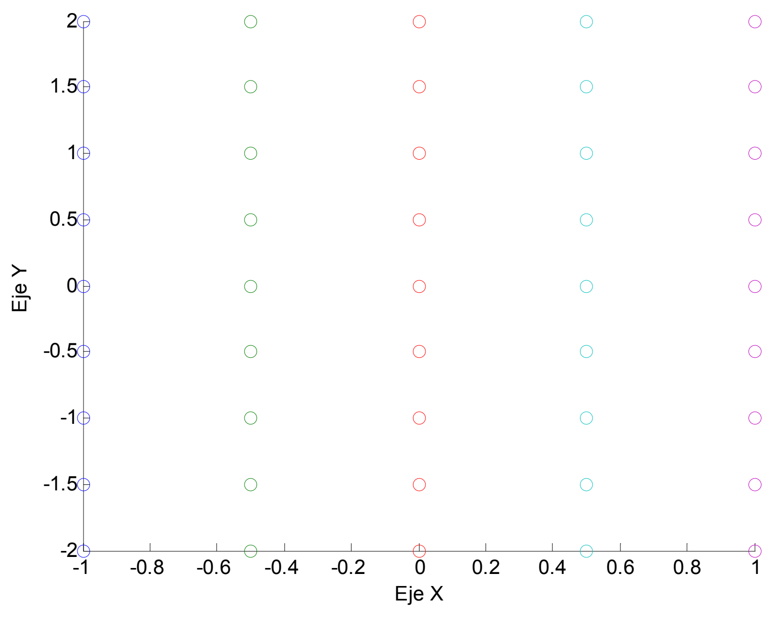
(b) Es divergente ya que es una serie de términos positivos que no cumple la condición necesaria de convergencia: $n^2\log\left(\dfrac{n+2}{n-1}\right)\approx n^2\left(\dfrac{n+2}{n-1}-1\right)\to\infty$

(c) Es divergente ya que es una serie de términos positivos y no cumple la condición necesaria de convergencia: $\dfrac{1+n}{e^{-n}}\approx e^n(1+n)\to\infty$

3 de Diciembre de 2014

TIPO 1A

(a) Representar los puntos siguientes en el espacio tridimensional considerando que están en el plazo z=0.



(b) Representar junto a los puntos del apartado anterior la superficie: $f(x,y)=x^2-xy+3$

Apellidos y Nombre: Núm:

TIPO 1B

(a) Representar en el espacio 40 puntos de la recta de ecuación:

$$x = y$$
$$z = 0$$

(b) Calcular la imagen por $f(x,y) = x^2 + xy + 3$ de los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $x = -2 + \frac{1}{5}k, \quad y = 1 + \frac{1}{4}k$ siendo k=0,1,...,10.

Ver práctica 7 del 26 de noviembre de 2014

10 de diciembre de 2014

1

(a) Calcular el dominio de la siguiente función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+1}(x-2)^n$

(b) Dada la función $f(x) = \log x$, se pide:

1. Obtener el desarrollo en serie de la función $f(x)$ en potencias de (x-1) calculando su campo de convergencia.
2. Obtener el valor de la suma de la siguiente serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
3. Calcular el valor aproximado de $\log 1.5$ con la suma de los 10 primeros términos de la serie obtenida en el apartado 1. dando una cota del error.

(c) Calcula el desarrollo en serie de potencias centrado en el punto 0 de la función $f(x) = \frac{1}{(1+x)(2+x)}$

Comentarios solución:

a) Ejercicios análogos se realizaron los días 20 y 24 de noviembre.

(a) Se trata de calcular el campo de convergencia de la serie de potencias. Utilizando la convergencia absoluta, se tiene que como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{n+1}}{n+2}|x-2|^{n+1}}{\frac{4^n}{n+1}|x-2|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)|x-2|}{(n+2)}=4|x-2|$$

la serie será convergente si $|x-2|<\frac{1}{4}$.

- Para $x=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ es divergente por ser la serie armónica.
- Para $x=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n+1}\left(-\frac{1}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ es convergente por Leibnitz (se deben comprobar las hipótesis del teorema).

El dominio de la función es $\left[\frac{7}{4},\frac{9}{4}\right)$

b) Hecho en clase. Puede verse la solución pinchando en el ejemplo 3 del apartado *Cálculo de polinomios* de la página http://www.giematic.unican.es/funciones-una-variable/material-interactivo

b.1. La serie de potencias de esta función es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n}(1)}{n!}(x-1)^n$$

siendo $f^{(n}(x)=(-1)^n(n-1)!x^{-n}\quad n\geq 1,\quad f(1)=0$. Luego, el desarrollo en serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x-1)^n$$

Nota: También podría haberse obtenido conocido el desarrollo de la función geométrica e integrando.

Apellidos y Nombre: Núm:

Para analizar la convergencia de esta serie basta aplicar el criterio del cociente a la serie de los valores absolutos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}|x-1|^{n+1}}{\frac{1}{n}|x-1|^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n|x-1|}{(n+1)|x-1|}=|x-1|$$

Si $|x-1|<1$ la serie de potencias es convergente. Analizando los extremos:

- En x=2, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(2-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ es convergente ya que se puede aplicar Leibnit (hay que demostrar las hipótesis del teorema)
- En x=0, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(0-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente por ser la serie armónica.

b.2. El valor pedido es el resultado de sustituir en la serie x por 2, luego

$$\log(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

b.3. Teniendo en cuenta que

$$\log(1.5)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(1.5-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ 2^n}$$

un valor aproximado con los 10 primeros términos

$$\log(1.5)\approx\sum_{n=1}^{10}\frac{(-1)^n}{n\ 2^n}$$

tendrá un error de aproximación menor que el valor absoluto del término 11 de la serie (al ser una serie alternada)

$$\left|\log(1.5)-\sum_{n=1}^{10}\frac{(-1)^n}{n\ 2^n}\right|<\frac{1}{11\cdot 2^{11}}$$

Apellidos y Nombre: Núm:

c) Hecho en clase el día 24 de noviembre. Ver ejercicio 10 del cuaderno de actividades del tema 4.

c) Descomponer en fracciones simples y utilizar el desarrollo de una serie geométrica. Ver ejercicio propuesto nº 9 del tema 3 de sucesiones y series de potencias.

Descomponiendo en fracciones simples,

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)(2+x)}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{2+x}$$

siendo A=1 y B=-1

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad si\ |x|<1$$

$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n \qquad si\ |x|<2$$

Luego,

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)(2+x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n \qquad si\ |x|<1$$

7 enero de 2015

1

Se pide escribir el código Matlab para

(a) Representar la función $f(x)=(x-1)\sin(x^2)$ en el intervalo $[-2,0]$.

(b) Obtener la suma aproximada de la integral $I=\int_{-2}^{-1.5}(x-1)\sin(x^2)dx$ utilizando sumas de Riemann superiores considerando una partición regular de 10, 20 y 30 subintervalos. ¿Este valor obtenido es una aproximación por defecto o por exceso? Justifica la respuesta.

(c) Calcular el valor de la integral $I=\int_{-2}^{-1.5}x\sin(x^2)dx$

Apellidos y Nombre: Núm:

Comentarios solución:

Ver práctica 10 del día 17 de diciembre de 2014. Para realizar este ejercicio se dejó todo tipo de material, incluido la práctica citada donde se daba el código para resolverlo.

EXAMEN BLOQUE 2 - 9 ENERO DE 2015

1

Dada la función $f(x,y)=x^2\sin(xy)$ se pide:

(a) Calcular su dominio y determinar si la función $f(x,y)$ es o no diferenciable en él justificando la respuesta.

(b) Calcular la matriz hessiana de $f(x,y)$ en el punto (0,0).

(c) Calcular un vector tangente a la superficie gráfica de la función $f(x,y)$ en el punto $(\pi,1,0)$ que está contenido en el plano $x=\pi$. Justificar la respuesta.

Comentarios solución:

(a) El dominio de la función es $\mathbb{R}^2$. La función es diferenciable en su dominio ya que

- la función es continua (por ser composición de funciones continuas)
- tiene derivadas parciales primeras

$$f_x'(x,y)=2x\sin(xy)+x^2 y\cos(xy)$$

$$f_y'(x,y)=x^3\cos(xy)$$

- tiene al menos una de las derivadas parciales de primer orden continua (en este caso son las dos derivadas parciales continuas).

(b) La matriz hessiana en el punto (0,0) es

$$H=\begin{pmatrix} f_{xx}''(0,0) & f_{xy}''(0,0) \\ f_{yx}''(0,0) & f_{yy}''(0,0) \end{pmatrix}$$

Apellidos y Nombre: Núm:

Al cumplirse el teorema de Schwarz, la matriz es simétrica $f''_{yx}(0,0)=f''_{xy}(0,0)$. Calculando las derivadas de orden 2 y sustituyendo se tiene que:

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La justificación del apartado c) está dada en clase el día 5 de diciembre (ver también pág. 12 del tema 4 de funciones de varias variables).
Ejercicios análogos realizados en clase son los apartados del propuesto número 6 del tema 4 de funciones de varias variables.

(c) El vector tangente es $T=\left(0,1,f'_y(\pi,1)\right)$.

2

Dada la función $f(x,y)=x^2\sin(xy)$ se pide:

(a) Obtener la derivada direccional de la función $f(x,y)$ en el punto $P(\pi,1,0)$ en la dirección del vector **u** que une los puntos $(\pi,1)$ y $(2\pi,\pi+1)$ A partir del valor obtenido, ¿la función crece o decrece desde el punto P al movernos en la dirección de **u**? Justificar la respuesta

(b) Demostrar que la derivada direccional máxima de cualquier función diferenciable en un punto se alcanza en la dirección del gradiente de dicha función en el punto considerado. ¿Cuál es el valor de esa derivada direccional máxima?.

Comentarios solución:

a) Ver ejercicio propuesto nº 10 y 11. El ejercicio propuesto 14ª) del cuaderno de actividades del tema 4 es idéntico.
b) Ver apuntes de clase. Se explicó en clase el día 1 de diciembre de 2014 y está propuesto además como ejercicio 12ª) en el cuaderno de actividades del tema 4.

(a) Como la función es diferenciable la derivada direccional es el producto escalar del gradiente por la dirección: $D_u f(\pi,1)=\nabla f(\pi,1)\bullet u$. Como

$$\nabla f(\pi,1)=\left(-\pi^2,-\pi^3\right) \qquad u=\frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Apellidos y Nombre: Núm:

$$D_u f(\pi,1) = -\pi^2 - \pi^3$$

La función decrece.

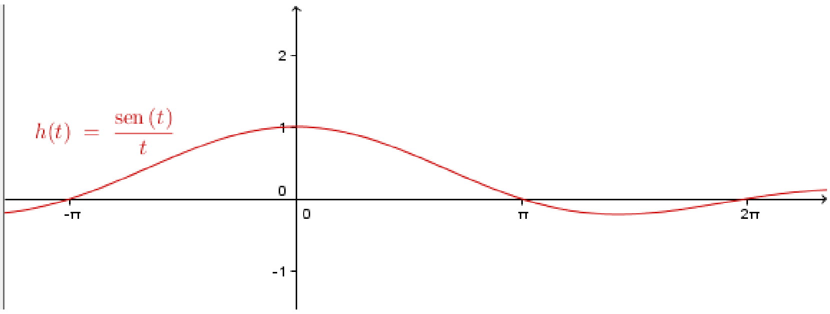
3

(a) Ordenar, sin obtener su valor, las siguientes integrales

$$I_1 = \int_{-1}^{1} x^2 \sin(x)dx \qquad I_2 = \int_{-1}^{1} |x|dx \qquad I_3 = \int_{-1}^{1} x^2 dx$$

Enunciar los resultados que se utilicen.

(b) Considerando que la función $h(t) = \dfrac{sen(t)}{t}$ tiene como gráfica la representada en la figura siguiente:



justificar **gráficamente** que la función $f(x) = \int_0^x \dfrac{sen(t)}{t} dt$ tiene un máximo en $x = \pi$ y un mínimo en $x = 2\pi$. Demostrar después **analíticamente** que esos dos puntos son extremos de la función $f(x)$.

(c) Escribir la expresión de la suma de Riemann superior para aproximar el valor de la integral $\int_0^1 \dfrac{sen(t)}{t} dt$ utilizando una partición regular de 10 subintervalos.

Comentarios solución:

a) Las propiedades de la integral definida se explicaron en clase el día 15 de diciembre.
b) Este ejercicio está hecho en clase el día 7 de Enero y es el ejercicio propuesto nº6 del tema 4 de integración de funciones de una variable (pag. 32).
c) Este ejercicio es idéntico al resuelto número 11 del tema 5 de integración de funciones de una variable (pag. 45). En este caso además solo se pide escribir la expresión de la suma, no calcularla.

Apellidos y Nombre: Núm:

(a) La primera integral es 0 por ser el integrando una función impar. Las otras dos son positivas ya que el integrando es mayor o igual que cero en el intervalo de integración. Como en el intervalo $[-1,1]$ se cumple que $x^2 < |x|$, se tiene que $I_1 = 0 < I_3 < I_2$.

4

(a) Obtener el valor promedio integral de la función $f(x)=\sqrt{3-x^2-2x}$ en el intervalo [0, 1]

(b) Calcular:

$$\int \frac{5}{\sqrt{2x-3}}\,dx \qquad\qquad \int \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$$

Comentarios solución:

a) El tipo de integral que hay que resolver en este apartado se explicó en clase el día 18 de diciembre.
b) Esas dos integrales formaban parte del trabajo de integración que se pidió entregar el día 7 de enero de 2015.

(a) El valor promedio integral es

$$m = \frac{\int_0^1 \sqrt{3-x^2-2x}\,dx}{1-0} = \int_0^1 \sqrt{4-(x+1)^2}\,dx$$

y se resuelve haciendo el cambio

$$2sen(t) = x+1 \qquad 2\cos(t)dt = dx$$

$$x=0 \quad \rightarrow \quad sen(t)=\frac{1}{2} \quad \rightarrow t=\frac{\pi}{6}$$

$$x=1 \quad \rightarrow \quad sen(t)=1 \quad \rightarrow t=\frac{\pi}{2}$$

Luego,

$$\int_0^1 \sqrt{4-(x+1)^2}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{4-4sen^2(t)}\;2\cos(t)dt = 4\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2(t)dt$$

$$=4\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \left[2t+sen(2t)\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \pi+0-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Apellidos y Nombre: Núm:

La primera integral es inmediata

$$\int \frac{5}{\sqrt{2x-3}}\,dx = \frac{5}{2}\int 2(2x-3)^{-1/2}\,dx = \frac{5}{2}\frac{(2x-3)^{1/2}}{1/2} = 5\sqrt{2x-3}+K$$

La segunda se realiza por partes

$$\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx \underset{\left\{\begin{array}{l} u=\log x \to du=\frac{1}{x}dx \\ dv=\frac{1}{\sqrt{x}}dx \to v=2\sqrt{x}\end{array}\right\}}{=} 2\sqrt{x}\;\log x - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx = 2\sqrt{x}\;\log x - 4\sqrt{x}+k$$

EXAMEN CONVOCATORIA FEBRERO – BLOQUE 1

NOTA: En todos los ejercicios se deberá justificar la respuesta explicando el procedimiento seguido en la resolución del ejercicio.

1

(a) Determinar el lugar geométrico de los números complejos z que verifican $|z-2| = |z-3|$

(b) Calcular el siguiente número complejo:

$$z = \frac{\sqrt[6]{2}\,e^{-\frac{3\pi}{2}i}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\overline{i^{101}}}{(1+i)^3}$$

(c) Escribir el código Matlab para calcular el valor del número complejo anterior.

Comentarios solución:

a) Este ejercicio es idéntico al ejercicio propuesto 6e del tema 1 (pag. 15). En la pág. 21 del tema 1 está resuelto $|z-2| > |z-3|$. Realizando los mismos pasos se puede concluir que la solución de este ejercicio es la recta $x = \frac{5}{2}$

Apellidos y Nombre: Núm:

2

(a) Calcular el valor de $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ mediante un polinomio de Taylor de grado adecuado para conseguir que el error de la aproximación sea menor que una décima.

(b) Escribir el código Matlab para

- Representar la gráfica de la función elegida para resolver el apartado (a) junto con la gráfica de la función trasladada dos unidades horizontalmente a la derecha y una unidad verticalmente hacia abajo.
- Calcular el valor de la aproximación por el polinomio de Taylor de grado 25 de la función y el punto que se haya considerado en el apartado (a).

Comentarios solución:

a) Este ejercicio es el ejercicio resuelto 7 del tema 2. (pag. 49)

3

(a) Utilizando la diferencial, calcular un valor aproximado de $\sqrt[3]{8'02}$ dando una cota del error cometido.

(b) Dada la función $h(x) = f\left(x\ f(x)\right)$

1. Expresar en función de $f(a)$ y sus derivada $f'(a)$, la derivada de la función $h(x)$ en el punto a.
2. Determinar también cuál sería la expresión de la función $h(x)$ si se considera la función $f(x) = x^2$.

a) Este ejercicio es el ejercicio 8d) resuelto y análogo al ejercicio 10 propuesto del tema 2 (pag. 35 y 36)
b) El ejercicio (b) forma parte del cuaderno de actividades del tema 2.

Apellidos y Nombre: Núm:

4

(a) Calcular el polinomio de Taylor de la función $f(x)=\log(x)$ en el punto $a=1$. Escribir este polinomio en forma de sumatorio.

(b) Determinar el valor de b para que el punto P (0, b) de la curva $2x^2+y^2-4x+2y=1$ tenga una recta tangente paralela a la recta $y=\sqrt{2}\,x+5$

Comentarios solución:

a) Este ejercicio se pidió realizar en el examen del segundo bloque.

5

Dada la serie $S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{3^{2n+1}}$ determinar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones **justificando** la respuesta:

(a) La serie es convergente porque su término general tiende a cero.

(b) La sucesión de sumas parciales de la serie no es convergente.

(c) La sucesión a_n es una sucesión convergente.

(d) El valor de S es $-1/12$

Comentarios solución:

Esta serie es geométrica con razón -1/9. (a) es falso, (b) es falso, (c) es cierto y (d) es cierto.

Apellidos y Nombre: Núm:

EXAMEN CONVOCATORIA FEBRERO – BLOQUE 2

NOTA: En todos los ejercicios se deberá justificar la respuesta explicando el procedimiento seguido en la resolución del ejercicio.

1

(a) Calcular el desarrollo en serie de potencias de x la función $f(x)=\dfrac{x+3}{(x+1)(3+2x)}$ indicando su campo de convergencia.

Nota: La serie debe escribirse con un solo sumatorio.

(b) Determinar el campo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n\,4^n}(x-5)^n$.

Comentarios solución:

a) Este ejercicio realiza de la misma forma que el resuelto 7a del tema 3 (página 30).
b) Este ejercicio es similar al resulto nº8 del tema 3 (pag. 35)

2

(a) Dada la función $f(x,y)=\log(x)+\sqrt{y-x^2}$, se pide:

1. Obtener y representar su dominio.
2. Calcular mediante una aproximación lineal el valor de $f(1.1\,,4.9)$
3. Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y)=\log(x)+\sqrt{y-x^2}$ cuando desde un punto cualquiera (a, b) nos dirigimos en dirección norte.

(b) Demostrar que la derivada direccional máxima de una función f cualquiera en un punto se alcanza en la dirección del gradiente en dicho punto.

Apellidos y Nombre: Núm:

3

(a) Calcular $E = y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y}$ siendo $z = f(u,v)$, $u = \sqrt{x^2 + y^2}, v = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$

(b) Escribir el código Matlab para representar la función $f(x,y) = \frac{sen\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2}$ en el rectángulo $[-1,1]x[-0.5,0.5]$ y sus curvas de nivel.

Comentarios solución:

a) Ejercicio 12 de los propuestos del tema 4 (pag. 35)
b) Ver práctica de ordenador del 26 de noviembre de 2014.

4

(a) Calcular, mediante integración, el área de un círculo de radio R.

(b) Escribir el código Matlab para obtener una aproximación de la integral $\int_0^1 \cos\left(x^2\right)dx$ mediante sumas de Riemann regulares de 20 subintervalos considerando como punto de cada subintervalo el punto medio. Escribir también la expresión de esta suma.

Comentarios solución:

a) Como la ecuación de una circunferencia de radio R es $x^2 + y^2 = R^2$, se trata de calcular $4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$

(b) Ver práctica del día 17 de diciembre y ejercicio resuelto nº 2 del tema 5.

Apellidos y Nombre: Núm:

5

(a) Calcular el valor promedio integral de la función $f(x) = arctg\left(\frac{x}{2}\right)$ en $[0,\ 2]$

(b) Calcular el área entre las curvas $y = \sqrt{x+1}$, $y - x = 1$, $x = -1$, $x = 1$

Comentarios solución:

a) El valor promedio es $\frac{1}{2}\int_0^2 arctg\left(\frac{x}{2}\right) dx$. La primitiva se obtiene por partes.

(b) Ver e.