BLOQUE 1 – 15 DE OCTUBRE

1

(a) Determina si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas **justificando la respuesta**:

1. $\lim_{h\to 0}\dfrac{f\left(a+2h\right)-f\left(a\right)}{h}=2f'\left(a\right)$
2. Si una función f es positiva para todos los valores de su variable, cualquier función primitiva de ella es decreciente en cada uno de sus puntos.

(b) Si $f\left(x\right)=\left(x+1\right)^2$ y $g\left(x\right)$ es una función calcular la derivada de $h\left(x\right)=f\left(x+g\left(x\right)\right)$ sabiendo que g es una función derivable.

(c) Representa la gráfica de la función $f\left(x\right)=3sen\left(2x\right)$ a partir de la gráfica de la función $g\left(x\right)=sen\left(x\right)$. ¿Cuál es el periodo de la función $f\left(x\right)$?

(d) Escribe el código Matlab y la expresión de la suma de Riemann de la función $f\left(x\right)=\dfrac{sen\left(x^2\right)}{x^2+1}$ en el intervalo [0,1] considerando una partición regular de 30 subintervalos y tomando el extremo inferior de cada subintervalo.

Solución apartado a)

La primera afirmación es cierta, ya que se cumple

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(a+2h\right)-f\left(a\right)}{h}=\lim_{h\to 0}2\,\frac{f\left(a+2h\right)-f\left(a\right)}{2h}=2\cdot\lim_{w\to 0}\frac{f\left(a+w\right)-f\left(a\right)}{w}=2f'\left(a\right)$$

La segunda afirmación es falsa, se puede poner un contraejemplo por ejemplo, $f\left(x\right)=x^2$, o ver que la primitiva F de f cumple

$$F'\left(x\right)=f\left(x\right)>0$$

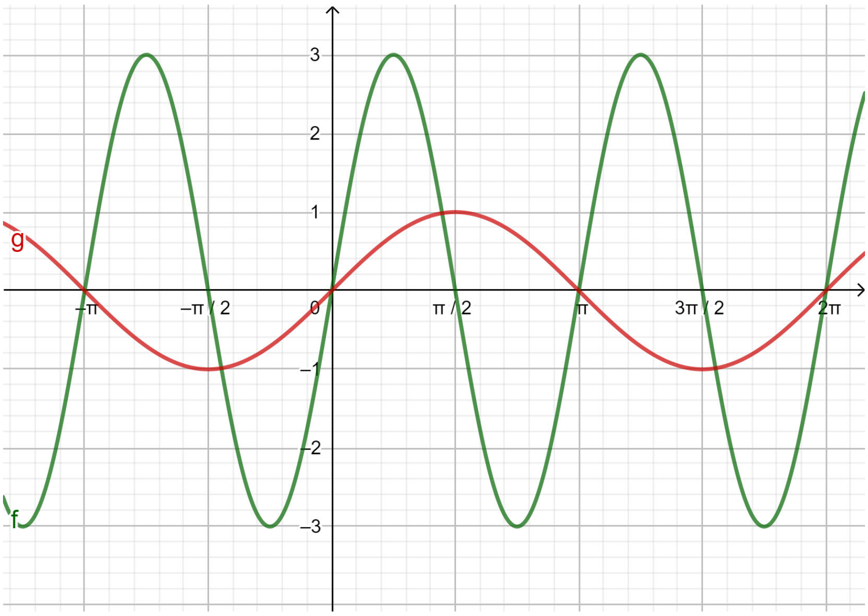
Solución apartado b)

Aplicando la regla de la cadena, se tiene que

$$h\left(x\right)=f\left(x+g\left(x\right)\right)=\left(x+g\left(x\right)+1\right)^2\Rightarrow h'\left(x\right)=2\left(x+g\left(x\right)+1\right)\left(1+g'\left(x\right)\right)$$

Solución apartado c)

La función es una comprensión en el eje horizontal de 2 unidades y una dilatación vertical de 3 unidades. El periodo de la función f es pi/2.



Solución apartado d)

Dada la función $f\left(x\right)=\dfrac{sen\left(x^2\right)}{x^2+1}$ y una partición en 30 subintervalos del intervalo [0,1], se considera los puntos del extremo inferior de cada subintervalo

$$c_i=\left(i-1\right)\Delta x \quad i=1,2,\ldots,30 \quad , \quad \Delta x=\frac{1}{30}$$

La suma de Riemann es

$$\int_0^1 f\left(x\right)dx \approx \sum_{i=1}^{30}\frac{sen\left(c_i^{\,2}\right)}{c_i^{\,2}+1}$$

El código Matlab para calcular esta suma será el siguiente:

```
>>incx=1/30;ci=0:incx:1-incx;
>>f=inline('sin(x.^2)./(x.^2+1)');
>>sum(f(ci))*incx
```

2

(a) Deduce la derivada de la función $f\left(x\right)=\arccos x$ en el punto $x=\dfrac{1}{2}$, a partir de la derivada de la función $g\left(x\right)=\cos x$. Calcula la recta tangente de la función $f\left(x\right)$ en el punto anterior y la recta tangente a $g\left(x\right)$ en el punto simétrico respecto de la recta $y=x$. Justifica la relación que hay entre ambas rectas tangentes.

(b) Halla los puntos de la curva $x^2+y^2+6x-2y-15=0$ en los que la pendiente de la recta tangente es $-\dfrac{3}{4}$. Representa la gráfica de la curva y escribe luego el código Matlab para representar en una misma figura la curva y la recta tangente en los puntos calculados.

Solución apartado a)

La derivada de la función $f\left(x\right)=\arccos x$ es

$$y=\arccos x \Leftrightarrow \cos y = x \Leftrightarrow -seny\cdot y'=1 \Leftrightarrow y'=\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

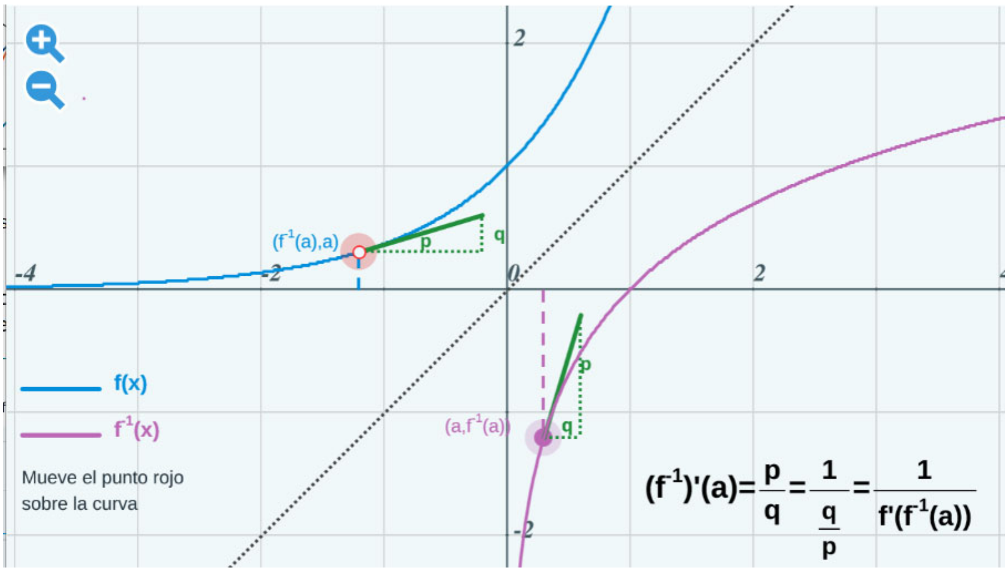
En el punto P$\left(1/2,\pi/3\right)$, la pendiente de la recta tangente a la función f es $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$. La ecuación de la recta tangente es

$$y=\frac{\pi}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

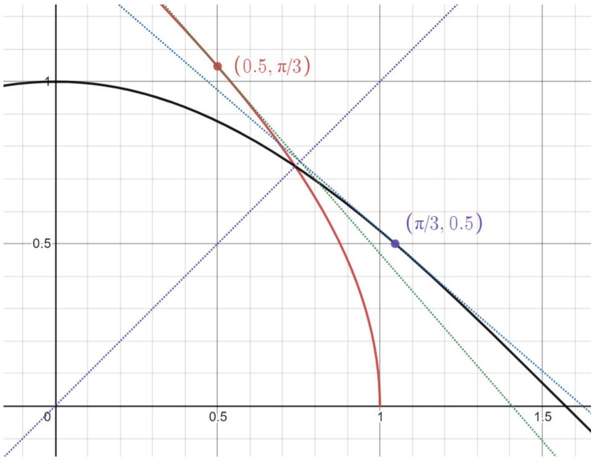
La función inversa es $g\left(x\right)=\cos x$. Su derivada es $g'\left(x\right)=-senx$. El punto simétrico de P respecto de la recta $y=x$, es Q $\left(\pi/3,1/2\right)$. La recta tangente en Q a la función g es

$$y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

Respecto a la relación entre las derivadas de una función y su inversa se debe tener en cuenta que



En este caso la representación de las funciones y las rectas tangentes se muestra en la siguiente figura



Solución apartado b)

Completando cuadrados, puede comprobarse que la curva es una circunferencia de centro (-3,1) y radio 5:

$$x^2+y^2+6x-2y-15=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=25$$

Para calcular la derivada, se deriva la función implícitamente

$$2x+2yy'+6-2y'=0 \Rightarrow y'=\frac{-2x-6}{2y-2}$$

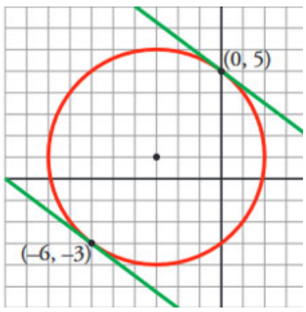
Los puntos cuya pendiente es -3/4 serán solución del siguiente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{-2x-6}{2y-2}=\dfrac{-3}{4} \\ (x,y) \ es \ un \ punto \, de \ la \ circunferencia \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-x-3}{y-1}=\dfrac{-3}{4} \Leftrightarrow (x+3)=\dfrac{3}{4}(y-1) \\ (x+3)^2+(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Sustituyendo la expresión de la primera ecuación en la segunda

$$\frac{9}{16}(y-1)^2+(y-1)^2=25 \Rightarrow \frac{25}{16}(y-1)^2=25 \Rightarrow y-1=\pm 4 \Rightarrow y=5,\ y=-3$$

Los dos puntos son (0,5) y (-6,-3)



3

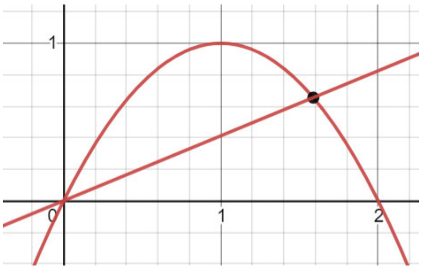
(a) Dada la función $f(x)=2x-x^2$ y la región $D=\left\{(x,y) / \quad x\geq 0,\ \ 0\leq y\leq f(x)\right\}$.

Determina un punto P en el gráfico de la función f, de forma que la recta que une P con el origen dividida a D en dos regiones con la misma área.

(b) Utilizando cálculo integral, calcula el área de la elipse $x^2+4y^2=4$.

Solución apartado a)

El punto P de la parábola será de la forma $\left(x_o, f\left(x_o\right)\right)$.



El área encerrada por la parábola en el intervalo [0,2] es,

$$\int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)_{x=0}^{x=2} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

La mitad será 2/3, por lo que el punto x_o será aquel que cumpla que el área de la región por debajo de la recta $y = \frac{f\left(x_o\right)}{x_o} x$ y la parábola en [0,2] es 2/3. Este área es la del triángulo de base x_o y altura $f\left(x_o\right)$ más el área por debajo de la parábola en el intervalo $\left[x_o, 2\right]$, es decir,

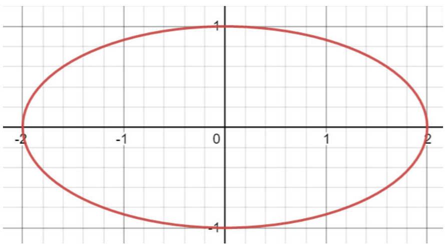
$$\frac{x_o f\left(x_o\right)}{2} + \int_{x_o}^2 \left(2x - x^2\right) dx = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x_o\left(2x_o - x_o^{\,2}\right)}{2} + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)_{x_o}^{2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\cancel{2x_o^{\,2}} - x_o^{\,3}}{2} + \frac{4}{3} - \left(\cancel{x_o^2} - \frac{x_o^{\,3}}{3}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{-x_o^{\,3}}{6} = -\frac{2}{3} \Rightarrow x_o = \sqrt[3]{4}$$

Solución apartado b)

Se trata de una elipse de semiejes a=2 y b=1.



El área de la elipse se calculará de la forma siguiente:

$$4\int_0^2 \sqrt{\frac{4-x^2}{4}} dx = 2\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \underset{\substack{x=2sent \\ dx=2\cos t \\ x=0\to t=0 \\ x=2\to t=\frac{\pi}{2}}}{=} 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{4-4sen^2 t}\, 2\cos t dt =$$

$$= 8\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 8\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = 4\left(t + \frac{sen 2t}{2}\right)_{t=0}^{t=\pi/2} = 2\pi$$

4

(a) Calcula las siguientes integrales

$$\int \frac{3x+19}{x^2-2x+5}\,dx \qquad \int \arccos x\,dx \qquad \int 2^{\operatorname{sen} x-1}\cos x\,dx$$

(b) Ordena los siguientes números complejos según su argumento principal:

$$z_1=\overline{\left(-1+i\right)^6} \qquad z_2=\frac{\operatorname{Im}\left(1+3i\right)}{\left(1-\sqrt{3}\,i\right)e^{4i}} \qquad z_3=i^{387}-1$$

Solución apartado a)

La primera integral es la de una función racional

$$\int \frac{3x+19}{x^2-2x+5}\,dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x-2+2}{x^2-2x+5}dx+\int \frac{19}{x^2-2x+5}\,dx\;=$$

$$=\frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx+\int \frac{22}{\left(x-1\right)^2+4}\,dx\;=$$

$$=\frac{3}{2}\log\left(x^2-2x+5\right)+11\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}dx\;=\frac{3}{2}\log\left(x^2-2x+5\right)+11arctg\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$$

Para la segunda integral se aplica el método de integración por partes

$$\int \arccos x\,dx \underset{\left[\substack{\arccos x=u\to\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=du\\ dx=dv\to v=x}\right]}{=} x\arccos x+\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$$

La tercera integral es inmediata

$$\int 2^{\operatorname{sen} x-1}\cos x\,dx=\frac{2^{\operatorname{sen} x-1}}{\log 2}+C$$

Solución apartado b)

$$z_1=\overline{\left(-1+i\right)^6}=\overline{\left(\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^6}=8e^{-\frac{9\pi}{2}i}\Rightarrow \arg\left(z_1\right)=-\frac{9\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

$$z_2 = \frac{3}{2e^{\frac{\pi}{3}i}e^{4i}} \qquad \arg\left(z_2\right) = -\frac{\pi}{3} - 4 = -\frac{\pi}{3} - 4 + 2\pi = \frac{5\pi}{3} - 4 > 0$$

$$z_3 = i^{387} - 1 = -i - 1 \qquad \arg\left(z_3\right) = -\frac{3\pi}{4}$$

Nombre y Apellidos: Núm.:

BLOQUE 2 – 19 DE NOVIEMBRE

1

Se considera la función $f\left(x\right)=\log\left(\sqrt{1+x}\right)$. Se pide:

(a) Aproximar la función por un polinomio de Taylor de grado 4.

(b) Utiliza el polinomio anterior para aproximar $\log\left(\sqrt{0.95}\right)$ y acota el error cometido.

Solución a)

El polinomio de Taylor de la función en el punto a es

$$T_4\left(x\right)=f\left(a\right)+\frac{f'\left(a\right)}{1!}\left(x-a\right)+\frac{f''\left(a\right)}{2!}\left(x-a\right)^2+\frac{f'''\left(a\right)}{3!}\left(x-a\right)^3+\frac{f^{iv}\left(a\right)}{4!}\left(x-a\right)^4$$

Se tiene que a=0

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\log\left(1+x\right) \qquad \to f\left(0\right)=0$$

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+x\right)^{-1} \qquad \to f'\left(0\right)=\frac{1}{2}$$

$$f''\left(x\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(1+x\right)^{-2} \qquad \to f''\left(0\right)=-\frac{1}{2}$$

$$f'''\left(x\right)=\left(1+x\right)^{-3} \qquad \to f'''\left(0\right)=1$$

$$f^{iv}\left(x\right)=-3\cdot\left(1+x\right)^{-4} \qquad \to f^{iv}\left(0\right)=-3$$

Se tiene entonces que el polinomio de Taylor es

$$f\left(x\right)\approx T_4\left(x\right)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{8}x^4 \qquad x\approx 0$$

Solución b)

Para aproximar $\log\left(\sqrt{0.95}\right)$, hay que tener en cuenta que $\log\left(\sqrt{0.95}\right)=f\left(-0.05\right)$, por lo tanto

$$\log\left(\sqrt{0.95}\right)=f\left(-0.05\right)\approx T_4\left(-0.05\right)=\frac{1}{2}\left(-0.05\right)-\frac{1}{4}\left(-0.05\right)^2+\frac{1}{6}\left(-0.05\right)^3-\frac{1}{8}\left(-0.05\right)^4$$

El error que se comete en esta aproximación es

$$R_4\left(-0.05\right)=\frac{f^{v}\left(c\right)}{5!}\left(-0.05\right)^5 \qquad -0.05<c<0$$

Acotando este error

$$\left|R_4\left(-0.05\right)\right|=\left|\frac{12}{5!\left(1+c\right)^5}\left(-0.05\right)^5\right| \underset{-0.05<c<0}{<} \frac{12\left(0.05\right)^5}{5!\left(0.95\right)^5}$$

2

(a) Determina la convergencia de las siguientes series numéricas indicando el criterio que se utiliza

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cos\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n 2^{n+4}}{3^{4n+1}}$$

(b) Dada la siguiente serie de potencias determina su campo de convergencia

$$S\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n n^3}{4^n} x^{2n}$$

¿Cuál es el valor de $S\left(5\right)$?

(c) Calcula una primitiva de $\frac{1}{1+x^4}$ utilizando series.

Solución a)

- Como $n^2 \cos\left(\frac{1}{n^3}\right) \approx n^2$, la primera serie no es convergente por no cumplir la condición necesaria.
- Para la segunda serie, aplicando el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2(n+1)+1}}{\left(n+1\right)!} : \frac{3^{2n+1}}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+3} n!}{3^{2n+1}\left(n+1\right)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^2}{n+1} = 0 < 1$$

se tiene que es convergente.

- La tercera serie es geométrica con razón menor que 1 en valor absoluto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n 2^{n+4}}{3^{4n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^4}{3}\left(\frac{-2}{3^4}\right)^n = \frac{2^4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{3^4}\right)^n \qquad \left|r\right| = \left|\frac{-2}{3^4}\right| < 1$$

Solución b)

Para determinar el radio de convergencia analizamos los valores x para los cuales la serie converge en valor absoluto,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\left(-1\right)^{n+1}\left(n+1\right)^3}{4^{n+1}} x^{2(n+1)}\right| : \left|\frac{\left(-1\right)^n n^3}{4^n} x^{2n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n+1\right)^3 \left|x\right|^{2n+2}}{4^{n+1}} : \frac{n^3 \left|x\right|^{2n}}{4^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(n+1\right)^3 4^n \left|x\right|^{2n+2}}{n^3 4^{n+1} \left|x\right|^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n+1\right)^3 \left|x\right|^2}{n^3 4} = \frac{\left|x\right|^2}{4}$$

La serie será convergente si el valor obtenido es menor que 1, es decir,

$$\frac{\left|x\right|^2}{4} < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

En el punto x=2 la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n n^3}{4^n} 2^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n n^3$, que no es convergente por no cumplir la condición necesaria. De la misma forma, para x=-2, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n n^3}{4^n}\left(-2\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^3$, que tampoco converge por la misma razón, el término general no tiende a cero.

El campo de convergencia es, por lo tanto, $-2 < x < 2$, y la serie no converge en el punto 5.

Solución c)

Considerando el desarrollo en serie de la función $\dfrac{1}{1+x^4}$, se tiene que:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n x^{4n} \quad \text{si } \left|x\right| < 1$$

En este intervalo, las primitivas son

$$\int f\left(x\right) dx = \int \frac{1}{1+x^4} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + A$$

3

(a) Calcula el desarrollo en serie de potencias de la función $f\left(x\right) = \dfrac{1}{x^2+x-2}$ indicando su campo de convergencia.

(b) Determina un infinitésimo equivalente a la función $f\left(x\right) = \log\left(1+x\right) - xe^x$ en $x = 0$.

Solución a)

Teniendo en cuenta que

$$f\left(x\right) = \frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{\left(x-1\right)\left(x+2\right)}$$

Descomponiendo en fracciones simples

$$f\left(x\right) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \begin{cases} A\left(x+2\right) + B\left(x-1\right) = 1 \\ x = -2 \rightarrow B = -1/3 \\ x = 1 \rightarrow A = 1/3 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta el desarrollo de la serie geométrica se tiene que

$$f\left(x\right) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1/2}{\frac{x}{2}+1} = \underbrace{-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{\left|x\right|<1} - \underbrace{\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n x^n}_{\left|x\right|<2} \qquad si \left|x\right| < 1$$

$$f\left(x\right) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1 + \frac{\left(-1\right)^n}{2^{n+1}}\right] x^n \qquad si \left|x\right| < 1$$

Solución b)

Se tiene que un infinitésimo equivalente es el siguiente

$$f\left(x\right) = \log\left(1+x\right) - xe^x \approx \left(x - \frac{x^2}{2}\right) - x\left(1+x\right) \approx -\frac{3x^2}{2}$$

4

(a) Dada la función periódica de periodo 2 definida de la siguiente forma

$$f(t)=\begin{cases}-1 & 0\le t<1\\ 3 & -1<t<0\end{cases}$$

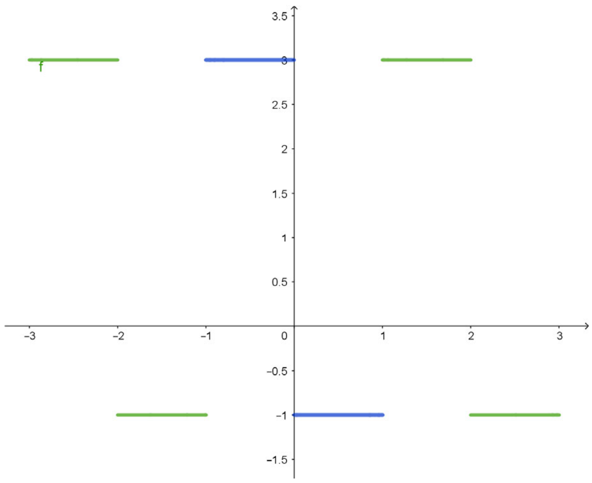
Se pide:

1. Comprobar razonadamente que cumple las condiciones para desarrollarse en serie de Fourier.
2. Determinar el desarrollo en serie de Fourier indicando su campo de convergencia.
3. Los armónicos de la serie obtenida, ¿tienen periodo 1? Justifica la respuesta.

(b) Dada la función $g(t)=e^{t}$ definida en $[0,\pi]$, escribir la expresión $S(t)$ del desarrollo en serie de Fourier de cosenos indicando la forma de calcular los coefiencientes (no es necesario calcularlos). ¿Cuánto vale $S\left(\pi+\dfrac{1}{2}\right)$ y $S\left(-\dfrac{1}{2}\right)$?

Solución a)

La función dada es periódica de periodo 2 y al ser continua en el intervalo [-1,1] salvo en el punto 0 que tiene una discontinuidad de salto finito, se cumple las condiciones del Teorema de Dirichlet.



Se tiene que el periodo T=2, el semiperiodo es p=1 y $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\pi$

Para obtener su desarrollo se calculan los coeficientes:

$$a_o=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(t)\,dt=\int_{-1}^{0}3dt+\int_{0}^{1}-dt=3-1=2$$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(t)\cos(nwt)\,dt=\int_{-1}^{0}3\cos(n\pi t)\,dt+\int_{0}^{1}-\cos(n\pi t)\,dt=$$

$$= 3\left.\frac{sen(n\pi t)}{n\pi}\right|_{t=-1}^{t=0} - \left.\frac{sen(n\pi t)}{n\pi}\right|_{t=0}^{t=1} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\,sen(nwt)\,dt = \int_{-1}^{0} 3sen(n\pi t)\,dt + \int_{0}^{1} -sen(n\pi t)\,dt =$$

$$= -3\left.\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right|_{t=-1}^{t=0} + \left.\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right|_{t=0}^{t=1} = -3\frac{1-(-1)^n}{n\pi} + \frac{(-1)^n - 1}{n\pi}$$

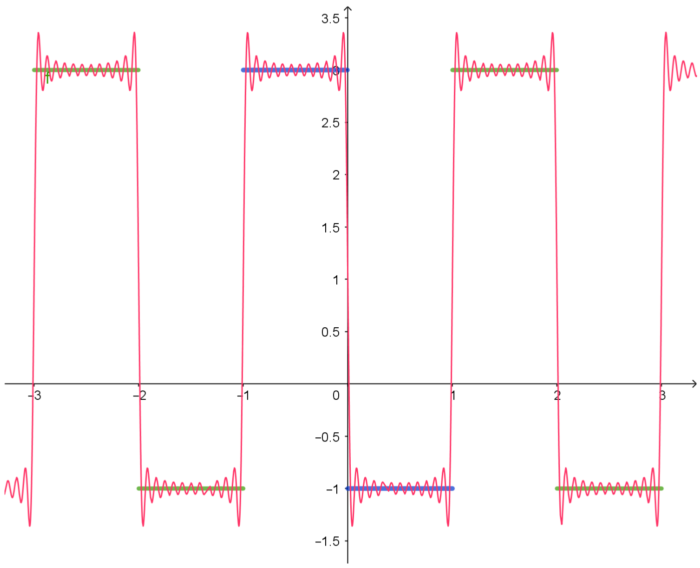
$$= 4\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} = \begin{cases} 0 \;\; n \;\; par \\ \dfrac{-8}{n\pi} \;\; n \;\; impar \end{cases}$$

El desarrollo en serie de Fourier es

$$S(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{(2n-1)\pi}\; sen((2n-1)\pi t)$$

Se cumple que $S(t) = f(t) \quad t \neq k \in \mathbb{Z}$. En los números enteros la serie converge a 1,

$$S(k) = \frac{f(k^+) + f(k^-)}{2} = 1 \quad k \in \mathbb{Z}$$

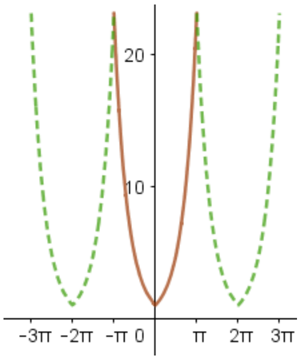


Solución b)

Para calcular el desarrollo en serie de cosenos de la función $g(t)$ periódica de periodo 2π se considera $h(t)$ extensión par de la función en el intervalo $[-\pi, \pi]$, definida en ese intervalo de la forma

$$h(t)=\begin{cases} e^{t} & 0\le t\le \pi \\ e^{-t} & -\pi\le t\le 0 \end{cases}$$

Se tiene que el periodo de h es 2π y $\omega=1$.



Los coeficientes del desarrollo en serie de cosenos se calculan de la siguiente forma:

$$a_{o}=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} h(t)dt=\frac{2}{p}\int_{0}^{p} g(t)dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^{t}dt$$

$$a_{n}=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} h(t)\cos(n\omega t)dt=\frac{2}{p}\int_{0}^{p} g(t)\cos(nt)dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^{t}\cos[nt]dt$$

El desarrollo en serie de Fourier es

$$S(t)=\frac{a_{o}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n}\cos(nt)=h(t)\quad t\in\mathbb{R}$$

Por lo tanto, el desarrollo de $g(t)=e^{t}$ en $[0,\pi]$ es el siguiente

$$S(t)=\frac{a_{o}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n}\cos(nt)=g(t)\quad 0\le t\le \pi$$

Los valores pedidos son

$$S\left(-\frac{1}{2}\right)=h\left(-\frac{1}{2}\right)=e^{1/2}$$

$$S\left(\pi+\frac{1}{2}\right)=h\left(\pi+\frac{1}{2}\right)=h\left(\left(\pi+\frac{1}{2}\right)-2\pi\right)=h\left(-\pi+\frac{1}{2}\right)=e^{-\left(-\pi+\frac{1}{2}\right)}=e^{\left(\pi-\frac{1}{2}\right)}$$

Apellidos y nombre: Núm:

BLOQUE 3 – FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

1

(a) Dada la función $f(x,y)=y\cos(xy)+y^2x^2$, calcular de forma aproximada el valor de $f(1.5,0.5)$ utilizando el plano tangente en un punto adecuado. Comprobar si se cumple que f''_{xy} coincide con f''_{xy} en todo el plano sin calcular estas derivadas.

(b) Si cortamos la superficie definida por la función $f(x,y)=xy+x^2$ por un plano paralelo a $x=0$ por el que pasa el punto P(1,2,3), calcular la curva que se obtiene así como la pendiente de la recta tangente a dicha curva en P. Determina un vector director de la recta tangente.

(c) Calcular $E=y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}$ siendo $z=f(u,v)$, $u=\sqrt{x^2+y^2}, v=arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Solución a)

Consideramos el punto $P(1,0)$ que es un punto próximo donde conocemos el valor de la función y sus derivadas parciales. Se tiene que

$$f(x,y)=y\cos(xy)+y^2x^2 \to f(1,0)=0$$

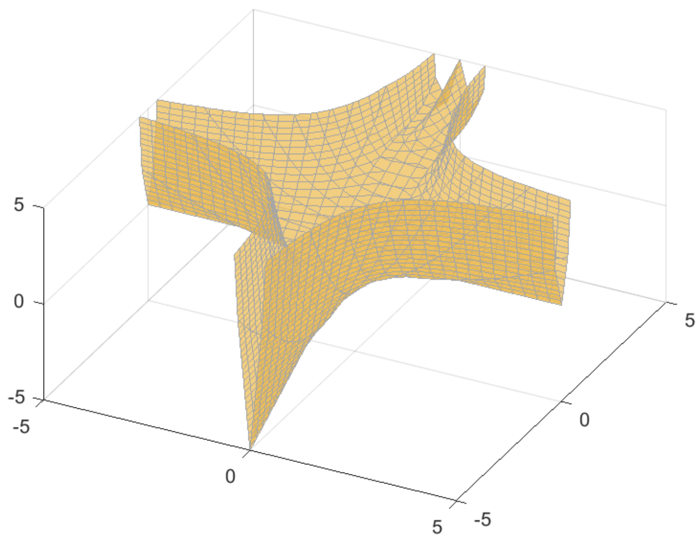
$$f'_x(x,y)=-y^2\,sen(xy)+2y^2x \to f'_x(x,y)=0$$

$$f'_y(x,y)=\cos(xy)-yxsen(xy)+2yx^2 \to f'_y(x,y)=1$$

Por lo tanto,

$$f(1.5,0.5)\approx f(1,0)+f'_x(1,0)(1.5-1)+f'_y(1,0)(0.5-0)=0+0+0.5=0.5$$

Como se cumplen las condiciones del Teorema de Swartz en todo el plano (la función tiene derivadas parciales de cualquier orden continuas), se cumple $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$



Solución b)

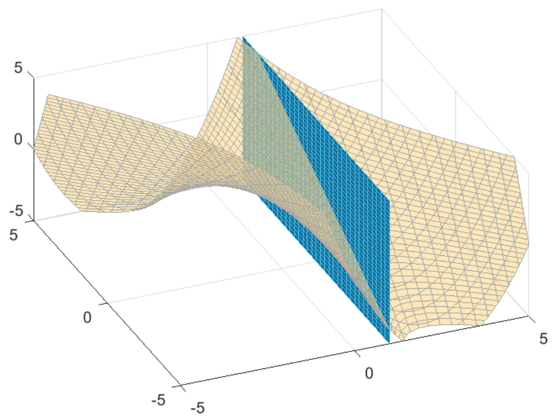
El plano paralelo a $x=0$ que pasa por el punto P es el plano $x=1$. Cortando la superficie se obtiene la siguiente curva en el plano x=1.

$$z = f\left(1, y\right) = y + 1$$

es decir,

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = y \qquad\qquad y \in \mathbb{R} \\ z = y + 1 \end{cases}$$

La pendiente de esta recta es 1, que coincide con la derivada parcial respecto de y en el punto (1,2). Un vector director de esta recta (0,1,1).
En la figura se muestra la gráfica de la función y el plano x=1.



Solución c)

Aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=z_u^{'}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+z_v^{'}\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=z_u^{'}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+z_v^{'}\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=z_u^{'}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+z_v^{'}\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=z_u^{'}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+z_v^{'}\frac{x}{x^2+y^2}$$

Por lo tanto,

$$E=y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y\left(\cancel{z_u^{'}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}+z_v^{'}\frac{-y}{x^2+y^2}\right)-x\left(\cancel{z_u^{'}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}+z_v^{'}\frac{x}{x^2+y^2}\right)=$$

$$=z_v^{'}\frac{-y^2-x^2}{x^2+y^2}=-z_v^{'}$$

2

(a) Calcular el valor máximo de la derivada direccional de la función $f\left(x,y\right)=xy\log\left(\sqrt{1+x^2}\right)$ en el punto (0,1). Demostrar por qué el valor obtendido es el valor máximo de la derivada direccional.

(b) Dada la superficie definida por $1+y^2z+xyz-e^{xyz}=0$, determina si esta ecuación define a z como función diferenciable de x e y en un entorno del punto P(1, 1, 0) . Calcular el plano tangente a la superfice en P.

(c) ¿Una pieza metálica cilíndrica, subre un aumento de longitud de 1cm/seg., manteniendo constante su volumen de $400\pi\mathrm{cm}^3$. Se pide obtener la velocidad a la que varía r cuando la longitud de la pieza es 100 cm.

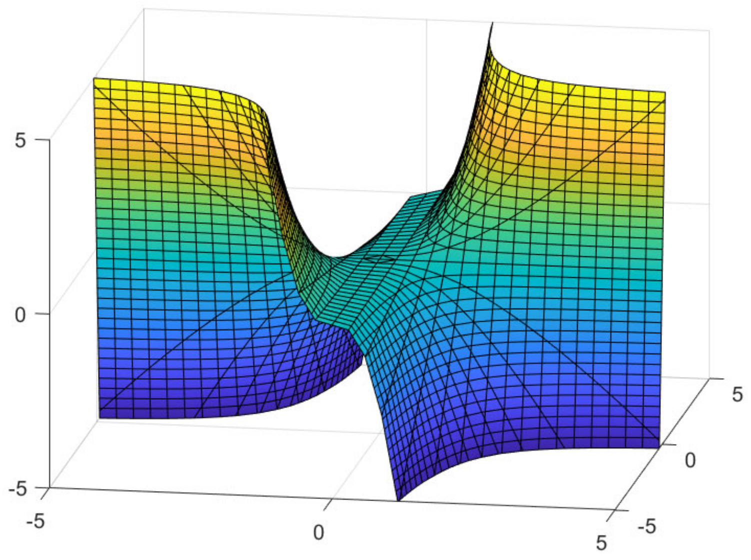
Solución a)

La función tiene derivadas parciales de cualquier orden continuas por lo que es diferenciable en todo el plano. Por lo tanto, la derivada direccional de la función en el punto (0,1) es el producto escalar del gradiente en (0,1) por la dirección. Se tiene que,

$$f_x^{'}\left(x,y\right)=y\log\left(\sqrt{1+x^2}\right)+xy\frac{x}{1+x^2}\to f\left(0,1\right)=\log 1+0=0$$

$$f_y^{'}\left(x,y\right)=x\log\left(\sqrt{1+x^2}\right)\to f_y^{'}\left(0,1\right)=0$$

Por lo tanto, el gradiente en (0,1) es nulo y la derivada direccional en cualquier dirección es 0.



Solución b)

Dada la ecuación $F(x,y,z) = 1 + y^2z + xyz - e^{xyz} = 0$, define una función implícita $z = f(x,y)$ diferenciable en las proximidades del punto P(1,1,0) por cumplirse las condiciones del Teorema de la Función Implícita:

- El punto está en la superficie definida por la ecuación: $F(1,1,0) = 1 + 0 + 0 - e^0 = 0$
- Las derivadas parciales de F son continuas en un entorno del punto P (de hecho son continuas en $\mathbb{R}^3$)

  $F'_x(x,y,z) = yz - yze^{xyz}$

  $F'_y(x,y,z) = 2yz - xze^{xyz}$

  $F'_z(x,y,z) = y^2 + xz - xye^{xyz}$
- La derivada parcial respecto de z es no nula en un entorno del punto: $F'_z(1,1,0) = 1 \neq 0$

El plano tangente a la superficie en el punto P(1,1,0) es:

$$z = f(1,1) + f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1) = 0 - \frac{F'_x(1,1,0)}{F'_z(1,1,0)}(x-1) - \frac{F'_y(1,1,0)}{F'_z(1,1,0)}(y-1)$$

$$F'_x(1,1,0)(x-1) + F'_y(1,1,0)(y-1) + F'_z(1,1,0)(z-0) = 0 \to \boxed{z=0}$$

Solución c)

El volumen es $V = \pi r^2 l$. La velocidad de variación de la longitud es $\frac{dl}{dt} = 1cm/seg$. Derivando respecto al tiempo t, se tiene la relación entre las velocidades

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}l + \pi r^2\frac{dl}{dt}$$

Como el volumen es constante,

$$0 = 2\pi r\frac{dr}{dt}l + \pi r^2\frac{dl}{dt} \to \frac{dr}{dt} = -\frac{\pi r^2}{2\pi r l}\frac{dl}{dt} \qquad (1)$$

Si $l = 100cm$, $\qquad 400\pi = \pi r^2 100 \to r = 2\,cm$

Sustituyendo en la expresión (1)

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{4\pi}{400\pi}1=-0.01\frac{cm}{seg}$$

3

(a) Sea la función $z=f\left(x,y\right)$ diferenciable en $\mathbb{R}^2$ cuyo plano tangente en el punto $P\left(1,3\right)$ es $2x+3y-2z=1$. Calcular la derivada direccional en ese punto en la dirección que une P con el punto $Q\left(2,0\right)$.

(b) Dadas las funciones y los puntos siguientes:

$$g\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{P(0,0)}$$

$$f\left(x,y\right)=\frac{\sqrt{\left(x-1\right)y}}{x-y} \qquad \text{Q(2,1)}$$

se pide:

- Determinar si ambas funciones son diferenciables en los puntos indicados justificando la respuesta.
- Escribir el código Matlab para representar ambas funciones en un rectángulo donde las dos funciones estén definidas.

Solución a)

Despejando z de la ecuación del plano tangente a la superficie, se tiene

$$2x+3y-2z=1\rightarrow z=x+\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}\rightarrow\begin{cases}f_x'\left(1,3\right)=1\\ f_y'\left(1,3\right)=\frac{3}{2}\end{cases}$$

Por lo tanto, $\nabla f\left(1,3\right)=\left(1,\frac{3}{2}\right)$. Para tomar la dirección se considera el vector unitario que une P y Q,

$$u=\frac{PQ}{\left|PQ\right|}=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

Como la función es diferenciable, la derivada direccional pedida es

$$D_uf\left(1,3\right)=\nabla f\left(1,3\right)\bullet u=\left(1,\frac{3}{2}\right)\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{9}{2\sqrt{10}}=-\frac{7}{2\sqrt{10}}$$

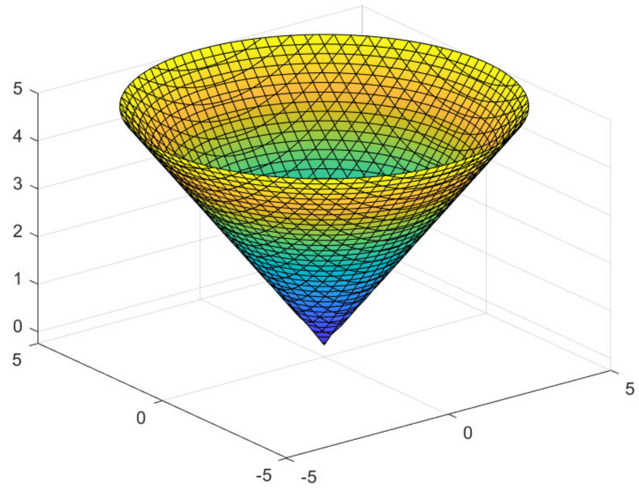
Solución b)

La función $g\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+y^2}$ es continua en el origen. Veamos que no es diferenciable en el (0,0) al no existir las derivadas parciales en el origen. Para ello consideramos la definición de derivada direccional respecto a x

$$g_x'\left(0,0\right)=\lim_{h\to0}\frac{g\left(h,0\right)-g\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{h^2}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left|h\right|}{h}\ \text{no existe ya que}\ \lim_{h\to0^+}\frac{h}{h}=1\neq\lim_{h\to0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

Análogamente puede obtenerse que tampoco existe la derivada parcial respecto de y en el origen.

Nota: Observa que la gráfica de la función es un cono por lo que gráficamente es fácil ver que la en el (0,0) la función no es diferenciable.



La función f es diferenciable en el punto (2,1) ya que es continua

$$f(x,y) = (x-1)^{1/2}\, y^{1/2}\,(x-y)^{-1} \qquad \lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y) = f(2,1)$$

y, además, las derivadas parciales primeras son también continuas en el punto (2,1)

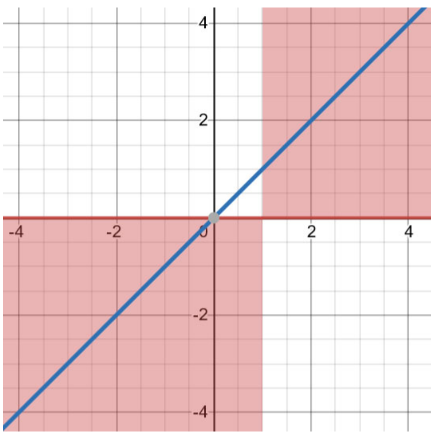
$$f_x'(x,y) = \frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}\, y^{1/2}\,(x-y)^{-1} - (x-1)^{1/2}\, y^{1/2}\,(x-y)^{-2} \qquad \lim_{(x,y)\to(2,1)} f_x'(x,y) = f_x'(2,1) = -\frac{1}{2}$$

$$f_y'(x,y) = \frac{1}{2}(x-1)^{1/2}\, y^{-1/2}\,(x-y)^{-1} + (x-1)^{1/2}\, y^{1/2}\,(x-y)^{-2} \qquad \lim_{(x,y)\to(2,1)} f_y'(x,y) = f_y'(2,1) = \frac{3}{2}$$

El dominio de la función g es $\mathbb{R}^2$. El dominion de la función f es el conjunto de puntos siguiente:

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-1)y \geq 0,\ x \neq y\right\}$$

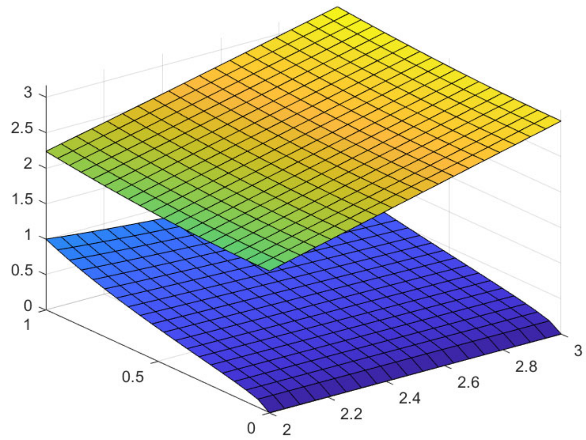
El conjunto D_f se muestra en la figura siguiente:



Un rectángulo donde estén definidas las dos funciones puede ser por ejemplo R=[2,3]x[0,1]. El código Matlab para representar estas dos funciones en el rectángulo R es el siguiente:

```
x=linspace(2,3,20);y=linspace(0,1,20);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
g=sqrt(X.^2+Y.^2);
surf(X,Y,g)
```

```
hold on
f=sqrt((X-1).*Y)./(X-Y);
surf(X,Y,f)
hold off
```



BLOQUE 1 CONVOCATORIA ORDINARIA

1

(a) Dados los números complejos:

$$z_1 = 8\left(\cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right)^8 \qquad z_2 = \frac{1}{\left(4i\right)^3 \cdot 2_{5\pi/6}} \qquad z_3 = \frac{3+4i}{i}\operatorname{Im}\left(\overline{3-i}\right)$$

se pide calcular $w = \dfrac{z_2}{z_1} + z_3$

(b) Dada la curva C de ecuación

$$4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$$

se pide:

- Determinar las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a la curva C en el punto P$\left(-2,3\right)$.
- Calcular un valor aproximado de la función $y\left(x\right)$ definida por la ecuación dada, en el punto $x = -2.1$
- Escribir el código Matlab para representar, en una misma gráfica, la función, las dos rectas calculadas en el primer apartado del ejercicio junto con el punto P$\left(-2,3\right)$.

(c) Se sabe que $f\left(2\right) = 3,\ f'\left(2\right) = 4,\ f''\left(2\right) = -1,\ g\left(2\right) = 2$ y $g'\left(2\right) = 5$, calcular el valor de la derivada de la función $h\left(x\right)$ en $x = 2$, siendo

$$h\left(x\right) = f^2\left(x\right) + f\left(g\left(x\right)\right) + f\left(x^2 - 2\right)$$

2

(e) Determina si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas **justificando la respuesta**:

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(a+2h\right)-f\left(a\right)}{h}=2f'\left(a\right)$
2. Si una función f es positiva para todos los valores de su variable, entonces cualquier función primitiva de f es decreciente en cada uno de sus puntos.

(f) Calcular el área encerrada entre las gráficas de las siguientes funciones $f\left(x\right)=\left|x^2-3\right|$ y $g\left(x\right)=2x^2+1$. Hacer a mano la integral y escribir también la expresión que permitiría obtener su valor en Matlab.

(g) Calcular las siguientes integrales

$$\int\frac{4x-2\cos x}{x^2-senx}dx \qquad \int\frac{3x+5}{x^2-2x+5}dx$$

Puntuación: 15=4+5+6 puntos

BLOQUE 2 CONVOCATORIA ORDINARIA

1

(a) Desarrollar en serie de potencias centrada en el origen la función $f\left(x\right)=\dfrac{5x+3}{x^2-3x+2}$ determinando la convergencia de la serie.

(b) Se considera la función $f\left(x\right)=e^{-x}$. Obtener una cota del error que se comete al aproximar el valor de $f\left(0.4\right)$ utilizando cuatro y cinco términos de su desarrollo de potencias en el origen. No utilizar el resto de Lagrange y justificar adecuadamente por qué es posible considerar la acotación realizada.

(c) Se considera la función $f\left(x\right)=\log\left(\sqrt[3]{x}\right)$. Calcular una cota del error que se comete al aproximar $f\left(1.1\right)$ por el polinomo de Taylor de orden 3 en un punto adecuado de la función.

2

(a) Obtener el desarrollo en serie de Fourier de senos de la función definida como $f(t) = \left|t-1\right|$ para $t \in \left[0,1\right]$. Estudiar la convergencia de la serie y obtener el periodo de los 3 primeros armónicos no nulos.

(b) Determinar la convergencia de las siguientes series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{\left(n+3\right)e^{3n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} arctg\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$$

¿Hay algún caso en el que la sucesión de sumas parciales tienda a cero? Justificar la respuesta.

(c) Se considera la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n 2^{n+2}}{e^{3n}}$.

1. Escribir el código Matlab para representar los 10 primeros sumandos junto con los 10 primeros términos de la sucesión de sumas parciales.
2. Escribir el código Matlab para obtener el valor de la suma de esta serie.
3. Sin utilizar Matlab, ¿a qué valor convergerá el término general de la serie? ¿A qué valor convergerá la sucesión de sumas parciales? Justificar la respuesta.

BLOQUE 3 CONVOCATORIA ORDINARIA

1

(a) Dada la función $f\left(x,y\right) = \dfrac{x^2+y^2}{x+y+1}$, se pide

1. Utilizando la definición de derivada parcial respecto de x, calcular el valor de $f_x'\left(1,3\right)$
2. Calcular y representar la curva de nivel que pasa por el punto (1,3).
3. Determinar el gradiente de f en el punto (1,3). ¿Es ortogonal el gradiente a la curva de nivel que pasa por dicho punto? Si es así, comprobarlo.
4. Determinar la derivada direccional de la función en la dirección que une el punto (1,3) con el (4,7). En esta dirección, ¿el valor de f aumenta o disminuye respecto $f\left(1,3\right)$?
5. Calcular mediante la diferencial un valor aproximado de $f\left(1.1,\ 2.8\right)$.
6. Escribir un vector director de la recta tangente en el punto (1,3,2) a la curva intersección de la superficie con el plano x=1 .

(b) Sea g una función diferenciable. Probar que la función $f(x,y) = x^3 g(x^2 - y)$, satisface la ecuación siguiente

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + 2x^2\frac{\partial f}{\partial y} = 3f$$

2

(a) Determinar los puntos del hiperboloide de ecuación $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ en los cuales la recta normal es paralela a la recta que pasa por los puntos $\left(3,-1,0\right)$ y $\left(5,3,6\right)$.

(b) Considerar la función $z = \sqrt{1+xy}$

1. Calcula y representa su dominio.
2. Representar con Matlab la gráfica de la función y de su plano tangente en el punto (1,0) en un rectángulo contenido en su domino.
3. Si se parte del punto (1,0), ¿en qué dirección hay que desplazarse para que la variación de la función sea ¼?