Prácticas Cálculo I

Práctica 9 (17- XI-2021)

Objetivo

- Utilizar herramientas gráficas y de cálculo para la resolución de problemas.
- Comprobar la aproximación que proporcionan las series de Fourier.

1 Definiciones básicas

Definición (Función armónica o armónico).- Se llama función armónica o simplemente armónico a una función periódica definida por una de las ecuaciones siguientes:

$$f(x) = A\cos(\omega x + \Phi) \quad \text{ó} \quad f(x) = A\mathrm{sen}(\omega x + \Phi)$$

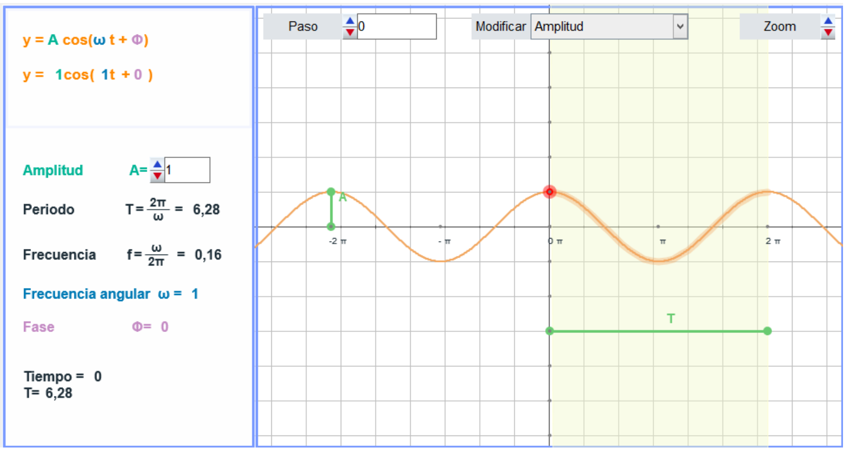
Como se desprende de la definición, los armónicos son ondas senoidales o cosenoidales cuya forma viene determinada por los valores siguientes:

- A, es la **amplitud** o altura de la sinusoide.
- Φ, es el **ángulo de fase** e indica el punto de arranque dentro del ciclo.
- ω, es la **frecuencia angular** medida en rad/seg.

La frecuencia angular ω es el parámetro determinante de la forma de la senoide y va a jugar un papel fundamental en todo el Análisis de Fourier.

Su expresión es $\omega = 2\pi f$ siendo f la frecuencia en $ciclos / sg$.

Puesto que el periodo T es la duración de un ciclo u oscilación se verifica $f = \frac{1}{T}$ y, por tanto $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Ejercicio 1	Con la herramienta de **representación de armónicos** de la página https://personales.unican.es/alvareze/Descartes/armonicos-JS/index.html de la página https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/analisis_fourier.html analiza el significado de la amplitud, la frecuencia y la fase en una onda cosenoidal.
Herramienta	

Definición (Serie trigonométrica o de Fourier).- Una serie de funciones del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \operatorname{sen} n\omega x)$$

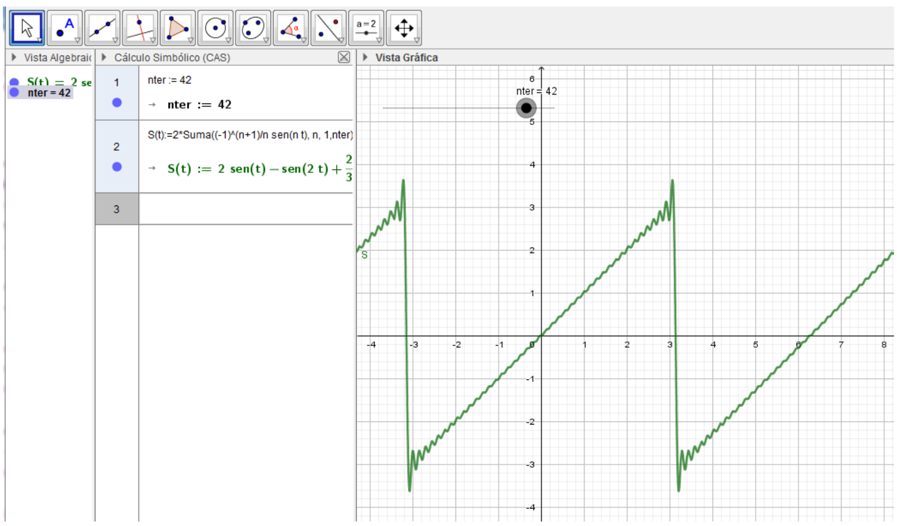
se llama serie trigonométrica y las constantes $a_0, \ a_n, \ b_n \ (n = 1, 2, \ldots)$ se llaman coeficientes de la serie trigonométrica.

OBSERVACIÓN.- Las funciones de la serie trigonométrica anterior son armónicos con ángulo de fase cero, frecuencia angular $n\omega$ y periodo propio $T = 2\pi / n\omega$ y, por tanto, todas ellas tienen como periodo común $2\pi / \omega$.

Ejercicio 2

Se considera la serie de Fourier $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,sen(nt)}{n}$

a) Dibuja el primer armónico.
b) Dibuja la suma de los dos primeros armónicos. ¿Cuál es su periodo?
c) Dibuja la suma de los primeros armónicos. ¿Cuál es su periodo?
d) Dibuja la suma de los diez primeros armónicos. ¿Cuál es su periodo?



Definición (Desarrollo de una función en serie trigonométrica).- Desarrollar una función $f(x)$ con período $T = 2p$ en serie trigonométrica significa hallar una serie trigonométrica convergente, cuya suma $S(x)$ sea igual a la función $f(x)$.

TEOREMA DE DIRICHLET.- Si $f(x)$ es una función periódica de período $2p$, y continua en un intervalo de un período o tiene en este intervalo a lo sumo un número finito de puntos de discontinuidad de salto finito, así como un número finito de máximos y mínimos, entonces se puede representar por una serie de Fourier convergente que tiene por suma el valor de la función $f(x)$ en los puntos en que ésta es continua y el promedio de los límites por la derecha y por la izquierda en los puntos en los que es discontinua.

TEOREMA.- Supongamos que la función periódica $f(x)$ de período $2p$ cumple el criterio de Dirichlet en $\left[-p,p\right]$. Entonces si se considera

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega x+b_n \operatorname{sen} n\omega x\right)$$

siendo,

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx\,,\quad a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos n\omega x dx\,,\quad b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\operatorname{sen} n\omega x dx$$

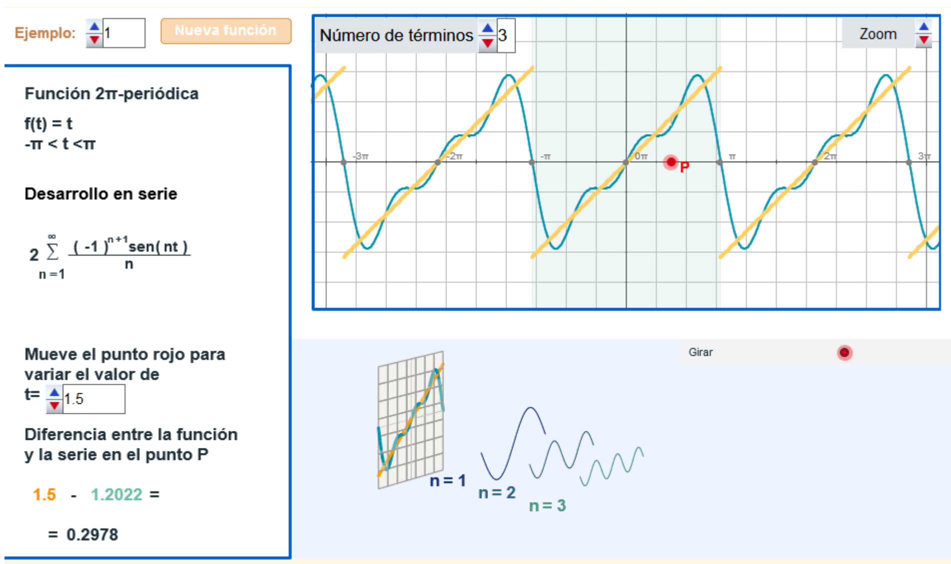
se cumplirá que la serie $S(x)$ converge a:

- $f(x)$, si x es punto de continuidad de f.
- $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$, si x es punto de discontinuidad de f.

Ejercicio 3

Con la herramienta **ejemplos de desarrollos** de la página
https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/seriesFourier-JS/index.html
observa cómo se obtienen los desarrollos en Serie de Fourier

Herramienta



Ejercicio 4

Consideramos la función periódica de periodo 2π definida por $f\left(t\right)=t$ en $-\pi<t<\pi$. Obtener el desarrollo en serie de Fourier.

Solución

Se tiene $T=2\pi=2p\rightarrow p=\pi$ $\qquad \omega=\dfrac{2\pi}{T}=1$

Calculamos los coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos\left(nt\right)dt = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t sen\left(nt\right)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t sen\left(nt\right)dt =$$

$$= 2\frac{-n\pi\cos\left(n\pi\right)+sen\left(n\pi\right)}{n^2\pi} = 2\frac{-n\pi\left(-1\right)^n}{n^2\pi} = 2\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}$$

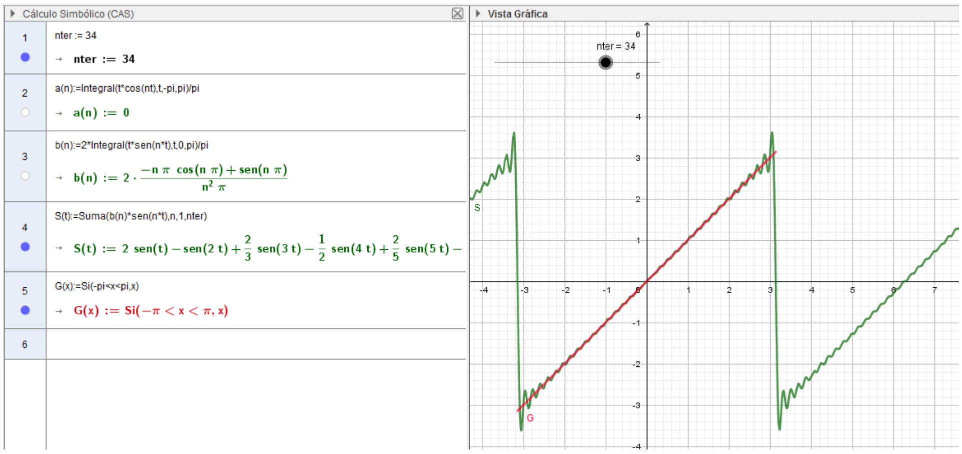
Nota: Observa que si f es una función impar los coeficientes $a_n = 0$

La serie de Fourier es

$$S\left(x\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1} sen\left(nt\right)}{n}$$

$$f\left(x\right) = S\left(x\right) \qquad x \neq k\pi$$

Ayúdate de la herramienta Geogebra CAS para realizar los cálculos
https://www.geogebra.org/cas?lang=es



Ejercicio 5

Consideramos la función periódica de periodo 6 definida por $f\left(t\right) = \left|t\right|$ en $-3 < t < 3$. Obtén el desarrollo en serie de Fourier.

Solución

Ejercicio resuelto número 8 del tema de series de Fourier (página 20).
Observa que si la función es par los coeficientes s $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$