Prácticas Cálculo I

Práctica 9 (25- XI-2020)

Objetivo

- Utilizar herramientas gráficas y de cálculo para la resolución de problemas.
- Comprobar la aproximación que proporcionan las series de Fourier.

1 Definiciones básicas

Definición (Función armónica o armónico).- Se llama función armónica o simplemente armónico a una función periódica definida por una de las ecuaciones siguientes:

$$f(x) = A\cos(\omega x + \Phi) \quad \text{ó} \quad f(x) = A\operatorname{sen}(\omega x + \Phi)$$

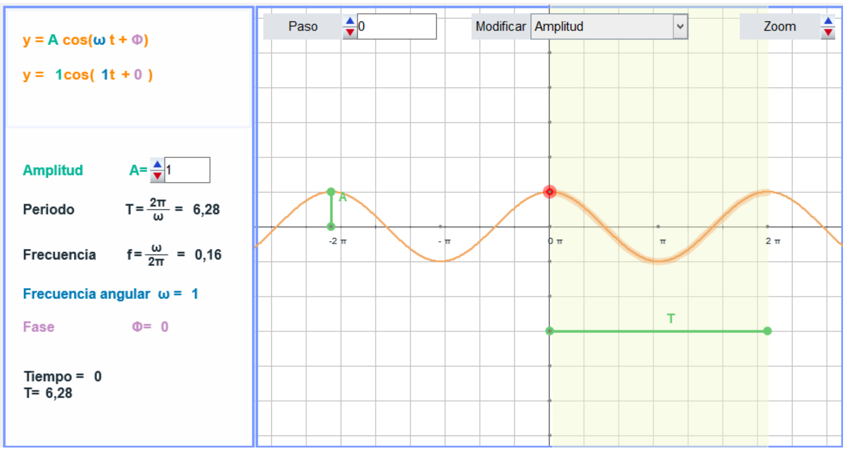
Como se desprende de la definición, los armónicos son ondas senoidales o cosenoidales cuya forma viene determinada por los valores siguientes:

- A, es la **amplitud** o altura de la sinusoide.
- Φ, es el **ángulo de fase** e indica el punto de arranque dentro del ciclo.
- ω, es la **frecuencia angular** medida en rad/seg.

La frecuencia angular ω es el parámetro determinante de la forma de la senoide y va a jugar un papel fundamental en todo el Análisis de Fourier.

Su expresión es $\omega = 2\pi f$ siendo f la frecuencia en $ciclos \,/\, sg$.

Puesto que el periodo T es la duración de un ciclo u oscilación se verifica $f = \dfrac{1}{T}$ y, por tanto $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Ejercicio 1	Con la herramienta de **representación de armónicos** de la página https://personales.unican.es/alvareze/Descartes/armonicos-JS/index.html de la página https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/analisis_fourier.html analiza el significado de la amplitud, la frecuencia y la fase en una onda cosenoidal.
Herramienta	

Definición (Serie trigonométrica o de Fourier).- Una serie de funciones del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \operatorname{sen} n\omega x)$$

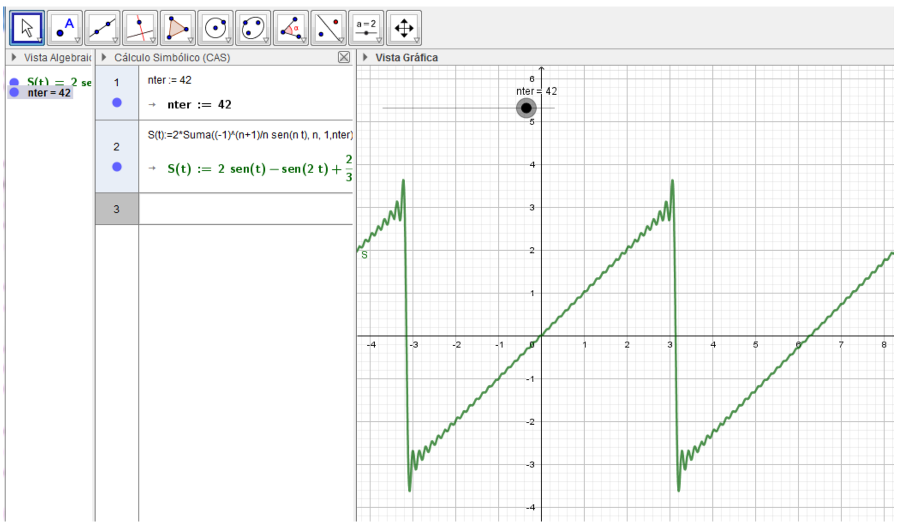
se llama serie trigonométrica y las constantes a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ se llaman coeficientes de la serie trigonométrica.

OBSERVACIÓN.- Las funciones de la serie trigonométrica anterior son armónicos con ángulo de fase cero, frecuencia angular $n\omega$ y periodo propio $T = 2\pi / n\omega$ y, por tanto, todas ellas tienen como periodo común $2\pi / \omega$.

Ejercicio 2

Se considera la serie de Fourier $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,sen(nt)}{n}$

a) Dibuja el primer armónico.
b) Dibuja la suma de los dos primeros armónicos. ¿Cuál es su periodo?
c) Dibuja la suma de los primeros armónicos. ¿Cuál es su periodo?
d) Dibuja la suma de los diez primeros armónicos. ¿Cuál es su periodo?



Definición (Desarrollo de una función en serie trigonométrica).- Desarrollar una función $f(x)$ con período $T = 2\pi$ ó $T = 2p$ en serie trigonométrica significa hallar una serie trigonométrica convergente, cuya suma $S(x)$ sea igual a la función $f(x)$.

TEOREMA.- Supongamos que la función periódica $f(x)$ de período $2p$ cumple el criterio de Dirichlet en $[-p, p]$. Entonces si se considera

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \operatorname{sen} n\omega x)$$

siendo,

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx\,, \quad a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos n\omega x dx\,, \quad b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen} n\omega x dx$$

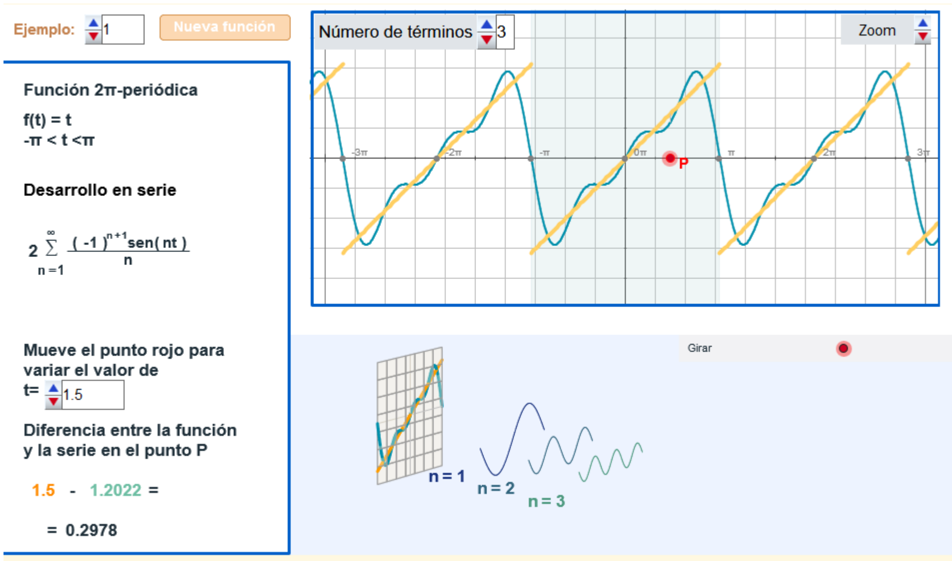
se cumplirá que la serie $S(x)$ converge a:

- $f(x)$, si x es punto de continuidad de f.
- $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, si x es punto de discontinuidad de f.

Ejercicio 3

Con la herramienta **ejemplos de desarrollos** de la página
https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/seriesFourier-JS/index.html
observa cómo se obtienen los desarrollos en Serie de Fourier

Herramienta



Ejercicio 4

Consideramos la función periódica de periodo 2π definida por $f(t)=t$ en $-\pi<t<\pi$. Obtener el desarrollo en serie de Fourier.

Solución

Se tiene $T=2\pi=2p\rightarrow p=\pi$ $\qquad \omega=\dfrac{2\pi}{T}=1$

Calculamos los coeficientes

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\,dt=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\cos(nt)\,dt=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\,sen(nt)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}t\,sen(nt)\,dt=$$

$$=2\frac{-n\pi\cos(n\pi)+sen(n\pi)}{n^2\pi}=2\frac{-n\pi(-1)^n}{n^2\pi}=2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

La serie de Fourier es

$$S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, sen(nt)}{n}$$
$$f(x) = S(x) \qquad x \neq k\pi$$