Prácticas Cálculo I

Práctica 8 (3-XI -2021)

Objetivo

- Estudiar la convergencia de una serie numérica.
- Estimar el error al aproximar la suma de una serie alternada convergente por Leibniz por la suma de los n primeros términos.
- Utilizar Matlab como calculadora numérica y gráfica para la resolución de problemas.

1 Criterios de convergencia

Ejercicio 1

Se consideran las siguientes series

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{n \cdot 3^{2n}}$$ (2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n+2}}{(n+1)^2 \cdot 2^{2n}}$$

Comprueba si cumplen la condición necesaria de convergencia. ¿Son convergentes?

Indicación

```
syms n
%Término general de la serie
an=(n+1)*(5^n)/(n*3^(2*n));
%Comprobación condición necesaria
limit(an,n,inf)
%Término general de la serie
an=8^(n+2)/((n+1)^2*2^(2*n));
%Comprobación condición necesaria
limit(an,n,inf)
```

Ejercicio 2

Determina el carácter de las siguientes series aplicando el criterio del cociente o el de comparación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3+2n)\sqrt{n+2}}{(n^2+3)3^{2n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{n^2}$$

Indicación	

```
%Ejemplo para aplicar el criterio del cociente
an=(n+1)*2^n/(n^3*3^(2*n+1));
an1=subs(an,n,n+1);
limit(an1/an,n,inf)
```

2 Series alternadas

Las series alternadas son de una de una de las formas siguientes:

i) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + \ldots. \quad (a_n > 0)$$

ii) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - \ldots. \quad (a_n > 0)$$

TEOREMA DE LEIBNIZ: La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \; (a_n > 0)$ converge si la sucesión (a_n) es monótona decreciente y se verifica $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ejercicio 3

Se considera la serie geométrica alternada siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$$

Se pide:

a) Determina que es convergente considerando que es geométrica. ¿Cuál es el valor de su suma

b) Determina que es convergente aplicando el teorema de Leibniz.

c) Representa la sucesión a_n para n desde 1 hasta 20.

d) Calcula y representa las primeras diez sumas parciales de la serie.

SUMA APROXIMADA: Si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \; (a_n > 0)$ es convergente porque verifica las hipótesis del Teorema de Leibniz, el valor absoluto del resto enésimo se puede acotar fácilmente.

En efecto, como

$$R_n = S - S_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \ldots = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots)$$

y la sucesión (a_n) es monótona decreciente el valor absoluto del resto enésimo es:

$$|R_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots = a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0}\ldots$$

es decir,

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Observa que este error será:

- por exceso si el primer término despreciado es negativo
- por defecto si el primer término despreciado es positivo

Ejercicio 4

Aproximación de la suma de series alternadas que verifican el criterio de Leibniz

(a) Comprueba a mano que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n \cdot 3^{2n}}$ verifica las condiciones suficientes del criterio de Leibniz.

(b) Comprueba con Matlab para los valores $n = 10,30,50$ que el error en valor absoluto que se comete al aproximar la suma de la serie por la suma parcial enésima $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ es menor que el valor absoluto del primer término despreciado

$$|S - S_n| \leq |a_{n+1}|$$

Esto significa que la suma de la serie está en el intervalo

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n \cdot 3^{2n}} \in \left(S_n - |a_{n+1}|,\ S_n + |a_{n+1}|\right)$$

y este intervalo tiene longitud menor a medida que n tiende a infinito.

Indicación

Paso 1: Define simbólicamente el término general de la serie y calcula la suma exacta de la serie $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n \cdot 3^{2n}} =$

Puedes expresarla en forma decimal con 16 cifras significativas, utilizando el comando `double` con `format long`.

Paso 2: Define el vector *valorn* con los tres valores de n: 10, 30 y 50. Escribe en una fila los datos siguientes, para cada valor de n:

n $\qquad |\text{Error}| = |S - S_n|$ $\qquad |a_{n+1}|$

Paso 3: Escribe en una fila los datos siguientes, para cada valor de n:

n $\qquad \left(S_n - |a_{n+1}| \ ,\ S_n + |a_{n+1}| \right)$

Ejercicio 5	(a) Calcula el valor de $$e^{-1}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{\left(-1\right)^{n}}{n!}+\ldots=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)!}+..$$ considerando los cuatro primeros términos de la serie. (b) Calcula una cota del error que se comete en la aproximación del apartado a)

Indicación apartado a)

```
x=1
format long
aprox=1/2-1/6+1/factorial(4)-1/factorial(5)
%Valor dado por octave
valor=exp(-1)
%Para sumar los 100 primeros términos
n=2:101;
aprox1=sum((-1).^n./factorial(n))
```

Indicación apartado b)

Como la serie es alternada, si aproximamos con los cuatro primeros términos el error es menor que el valor absoluto del término quinto

$$error<\frac{1}{6!}$$