Prácticas Cálculo I

Práctica 7 (27-X -2021)

Objetivo

- Utilizar Matlab como calculadora numérica y gráfica para la resolución de problemas.

1 Serie numérica

Dada una sucesión infinita de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, se denomina **serie numérica** a la suma de sus infinitos términos, se denota: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

- A la expresión a_n se le llama **término general de la serie**.
- La **suma parcial enésima** de la serie es $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Ejercicio 1

Vamos a ver que 2 es la suma de los infinitos términos de la sucesión siguiente:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots.$$

Realiza los siguientes pasos:

a) Observa que:

- La "suma" de un solo término es: 1
- La suma de los dos primeros términos: $1+\frac{1}{2}$
- La suma de los tres primeros términos: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$

....

es decir, el término enésimo de esta sucesión es la suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica de primer término 1 y razón ½. Escribe su expresión.

b) Representa las 10 primeras sumas:

$$1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\ ,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\ ,\ \ldots$$

¿Qué observas? ¿Cuál es su límite de esta sucesión de sumas?

Escribiremos $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2$

Indicación a)

La expresión del término general es:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}$$

Indicación b)

```
n=0:9;
%Término general de la serie
an=1./(2.^n);
%Cálculo de la suma parcial
sn(1)=an(1);
for k=2:10
    %sn(k)=sum(an(1:k));
    sn(k)=sn(k-1)+an(k);
end
%Representación de an y Sn
format long
plot(n,an,'or',n,sn,'og')
legend('an','Sn')
%Para calcular el límite debemos calcular
%la suma en simbólico
syms k n
suman=symsum(1/2^k,0,n-1)
limit(suman,n,inf)
```

Ejercicio 2

Dada la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, se pide

(a) Calcular el sumando 30 y la suma de los primeros 30 términos.
(b) Representar
  - Los puntos: $(n,\ a_n)$ para n desde 1 hasta 10
  - Los puntos: $(n,\ S_n)$ para n desde 1 hasta 10

Indicación (a)

```
%Sumando 30
n=30;
an=1./n.^2
%Suma de los primeros 30 números
n=1:30;
an=1./n.^2;
```

	`sum(an)`

Indicación b)	```%Cálculo de los diez primeros sumandos
	n=1:10;
	an=1./n.^2;
	%Cálculo de los diez primeros términos de la sucesión Sn
	sn(1)=an(1);
	for k=2:10
	    %sn(k)=sum(an(1:k));
	    sn(k)=sn(k-1)+an(k);
	end
	%Representación de an y Sn
	plot(n,an,'or',n,sn,'*g')
	legend('Sucesión an','Sucesión Sn')```
	
	Nota: Observa que los términos an tienden a cero y que la sucesión sn se aproxima a pi^2/6

Calculo de la suma con Matlab	`syms n` `symsum(1/n^2,1,inf)`

2 Serie geométrica

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + \dots + ax^n + \dots$ con x un número real es convergente para $|x| < 1$. En este caso el valor de su suma es $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}$.

$$S_n = a + ax + ax^2 + \dots + ax^{n-1} = a\frac{x^n - 1}{x-1}$$

Si $|x| < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{x^n-1}{x-1} = \frac{a}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}$

Ejercicio 3	Dada la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{2n+1}}$, se pide (a) Calcular el sumando 30 y la suma de los primeros 30 términos. (b) Representar ○ Los puntos: $(n,\ a_n)$ para n desde 1 hasta 10 ○ Los puntos: $(n,\ S_n)$ para n desde 1 hasta 10 (c) Comprueba que esta serie es geométrica y calcula su suma sin utilizar Matlab.

Indicación (a)

```
%Sumando 30
n=30;
an=3./2.^(2*n+1)
%Suma de los primeros 30 números
n=1:30;
an=3./2.^(2*n+1)
sum(an)
```

Indicación (b)

```
%Cálculo de los diez primeros sumandos
n=1:10;
an=3./2.^(2*n+1);
%Cálculo de los diez primeros términos de la sucesión Sn
sn(1)=an(1);
for k=2:10
    %sn(k)=sum(an(1:k));
    sn(k)=sn(k-1)+an(k);
end
%Representación de an y Sn
plot(n,an,'or',n,sn,'*g')
legend('Sucesión an','Sucesión Sn')
```

Nota: Observa que los términos an tienden a cero y que la sucesión sn se aproxima a 1/2

Por lo tanto, se puede considerar la función $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$ cuyo dominio es $|x|<1$. Además,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x} \text{ si } |x|<1$$

Ejercicio 4

(a) Representa la gráfica de la función $g(x)=\frac{1}{1-x}$ en 30 puntos del intervalo $[-2,2]$

(b) Representa en la misma figura una aproximación de $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ considerando los cinco primeros términos de la serie. Considera los mismos puntos x para representar f que los del apartado (a).

Indicación

```
clear all
x=linspace(-2,2,30);
s5=0;
for n=0:4
     s5=s5+x.^n;
end
g=1./(1-x);
plot(x,g,'r*',x,s5,'bo')
legend('g(x)','Suma aproximada')
```