Prácticas Cálculo I

Práctica 6 (4- XI-2020)

Objetivos

- Calcular desarrollos en serie de Taylor de funciones a partir de desarrollos conocidos.
- Aproximar una integral definida mediante una serie de potencias.

Ejercicio 1

(a) Encuentra el dominio de la función de Bessel de orden O definida por

$$J_o\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x^{2n}}{2^{2n}\left(n!\right)^2}$$

(b) Representa varios polinomios de Taylor para aproximar la función en el intervalo [0,20].

Nota 1: La solución de la ecuación diferencial

$$x^2y''+xy'+x^2y=0 \qquad y\left(0\right)=1, \quad y'\left(0\right)=0$$

es la función de Bessel de orden 0.

Estas funciones surgieron por primera vez cuando Bessel resolvió la ecuación de Kepler para describir el movimiento planetario. Desde ese momento, estas funciones se han aplicado en muchas situaciones físicas diferentes, incluida la temperatura distribución en una placa circular y la forma de un parche vibrante.

Nota 2: Friedrich Bessel (1784-1846) astrónomo alemán

Solución

```
syms x n
an=x^(2*n)/(2^(2*n)*factorial(n)^2);
an1=subs(an,n,n+1);
valor=simplify(an1/an)
limit(valor,n,inf)
clear all
syms x
nn=24;n1=nn-1;
k=0:n1;
Sn=sum((-1).^k.*x.^(2*k)./(2.^(2*k).*factorial(k).^2)
)
x1=linspace(0,20);
y1=subs(Sn,x,x1);
```

```
plot(x1,y1)
hold on
% Como comprobación dibujamos la función Matlab
plot(x1,besselj(0,x1),'r')
hold off
```

Ejercicio 1

Un gran asteroide se acerca a la Tierra desde las afueras del sistema solar. Su distancia de la órbita de la Tierra es actualmente 10 millones de millas, disminuyendo a una razón de 1 millón de millas por día. El asteroide se está acelerando hacia la órbita de la Tierra en 0.5 millones de millas/día^2. Debido a la fricción del polvo interplanetario, la aceleración está disminuyendo a una razón de 0.1 millones millas/día^3, quedando esta tasa bastante constante. ¿Aproximadamente cuándo va a cruzar el asteroide la órbita de la Tierra?

Solución

Si llamamos $d\left(t\right)$ a la distancia del asteroide de la órbita de la Tierra, en millones de millas se tienen los siguientes valores:

$$d\left(0\right)=10$$

$$d'\left(0\right)=-1$$

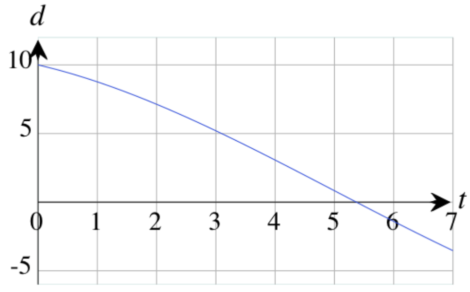
$$d''\left(0\right)=-0.5$$

$$d'''\left(0\right)=0.1$$

A partir de esos valores podemos escribir los primeros términos de la serie de Taylor

$$d\left(t\right)=10-t-\frac{0.5}{2}t^2+\frac{0.1}{3!}t^3+\ldots$$

Dibujando la gráfica se puede ver que el asteroide cruzará la órbita de la tierra entre el lugar 5 y 6 a partir de ahora.



DESARROLLOS EN SERIE DE POTENCIAS DE UNA FUNCIÓN

Si la función f es infinitamente derivable en un intervalo I abierto centrado en a se define la serie de Taylor a la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Si $T_n(f;a)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k$ es el polinomio de Taylor de grado n de f en el punto a y $R_n(x)$ el resto del polinomio, entonces

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

Puede probarse que para las funciones elementales: seno, coseno, exponencial, logaritmo ... las serie de Taylor correspondientes convergen a la función en el campo de convergencia.

Así, se puede demostrarse que

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad x\in\mathbb{R}$$

Ejercicio 3

A partir del desarrollo de Taylor de la función coseno, se pide:

a) Representar los siete primeros términos no nulos junto con la gráfica de la función en el intervalo $[0,3\pi]$.

b) Calcular el valor aproximado de $\int_0^1 \cos x\,dx$ utilizando los 7 primeros términos no nulos del desarrollo

c) Calcular el valor de $\int_0^1 \cos(x)\,dx$ que devuelve Matlab utilizando el comando `int`.

d) Calcular una cota del error que se comete cuando la aproximación se realiza con la suma de los siete primeros términos no nulos.

Nota: Aplica el siguiente resultado para encontrar el error que se pide en el apartado d) al aproximar la suma de una serie alternada por su suma parcial enésima.

En una serie alternada convergente por Leibniz, el error que se comente al aproximar el valor de la serie por los n primeros términos es menor que el valor absoluto del primer término no considerado. Es decir, si $S=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ se cumple $|S-S_n|<a_{n+1}$

Solución

(a) Código Matlab

```
%Representación
clear all
syms x
nn=7;n1=nn-1;
k=0:n1;
Sn=sum((-1).^k.*x.^(2*k)./factorial(2*k)    )
x1=linspace(0,2*pi);
y1=subs(Sn,x,x1)
plot(x1,cos(x1),x1,y1)
```

(b) Teniendo en cuenta que

$$\cos(x)\approx\sum_{n=0}^{6}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\int_0^1 \cos(x)\,dx\approx\sum_{n=0}^{6}\left[\int_0^1\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\,dx\right]=\sum_{n=0}^{6}\left[\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!}\right]_{x=0}^{1}$$

$$\int_0^1 \cos(x)\,dx\approx\sum_{n=0}^{6}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n)!}$$

Código Matlab

```
nn=7;
n=0:(nn-1);
an=((-1).^n)./((2*n+1).*factorial(2*n));
format long
sum(an)     %Resultado: 0.841470984808658
```

(c) Código Matlab

```
%Comprobación valor de la integral
syms x
valor=int(cos(x),x,0,1)
double(valor)
```

(d) Para realizar este ejercicio hay que tener en cuenta que

En este caso, si consideramos 7 términos no nulos, el error de la aproximación

$$\int_0^1 \cos(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n)!} \approx \sum_{n=0}^{6} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n)!}$$

es menor que el valor absoluto del octavo término de la serie, es decir,

$$a_7 = \frac{1}{(2\cdot 7+1)14!} \approx 7.647163731819816\text{e-13}$$

En este ejercicio, la aplicación de las series de potencias es para comprobar cómo obtener un valor aproximado de la integral de una función mediante series de potencias aunque su aplicación para la función coseno no tendría ningún sentido. Sin embargo, sí puede comprobarse su utilidad.

4

Repite el ejercicio anterior considerando la función $f(x) = x\cos\sqrt{x}$. Los pasos a seguir son:

(a) Calcular a mano el desarrollo de serie de Taylor centrado en el punto $a = 0$ (cálculalo a partir del del coseno).

(b) Representar los siete primeros términos no nulos junto con la gráfica de la función en el intervalo $[0, 3\pi]$.

(c) Calcular el valor aproximado de $\int_0^1 x\cos\sqrt{x}\,dx$ utilizando los 7 primeros términos no nulos del desarrollo obtenido en (a)

(d) Calcular el valor de $\int_0^1 x\cos\sqrt{x}\,dx$ que devuelve Matlab utilizando el comando `int`.

(e) Calcular una cota del error que se comete cuando la aproximación se realiza con la suma de los cuatro primeros términos no nulos.

Indicaciones

(a) El desarrollo en serie de la función integrando es:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cos(\sqrt{x}) = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(2n)!} \quad (x \geq 0)$$

(b) Código Matlab

```
%Representación
clear all
syms x
nn=4;
```

```
k=0:(nn-1);
Sn=sum((-1).^(k).*x.^(k+1)./factorial(2*k)    )
x1=linspace(0,3*pi);
y1=subs(Sn,x,x1)
plot(x1,x1.*cos(sqrt(x1)),x1,y1)
```

(c) Teniendo en cuenta que

$$\int_0^1 x\cos\left(\sqrt{x}\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{\left(-1\right)^n x^{n+1}}{\left(2n\right)!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(n+2\right)\left(2n\right)!}$$

Código Matlab

```
nn=7;
n=0:(nn-1);
an=((-1).^n)./((n+2).*factorial(2*n));
format long
sum(an)      %Resultado: 0.343476316713466
```

(d) Código Matlab

```
%Comprobación valor de la integral
syms x
valor=int(x*cos(sqrt(x)),x,0,1)
double(valor)
```

(e) Para realizar este ejercicio hay que tener en cuenta que
En este caso, si consideramos 4 términos no nulos, el error de la aproximación

$$\int_0^1 x\cos\left(\sqrt{x}\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(n+2\right)\left(2n\right)!}\approx\sum_{n=0}^{3}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(n+2\right)\left(2n\right)!}$$

es menor que el valor absoluto del quinto término de la serie, es decir,

$$a_4=\frac{1}{\left(4+2\right)8!}\approx\ 4.133597883597884\text{e-}06$$