Prácticas Cálculo I

Práctica 6 (7- XI-2018)

Objetivo

- Utilizar Octave como calculadora numérica y gráfica para la resolución de problemas.
- Obtener aproximaciones de integrales definidas mediante sumas de Riemann

1 Suma de Riemann

Si P es una partición del intervalo $[a,b]$ en *n* subintervalos,

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \;/\; a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$$

y $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ es un punto de cada subintervalo, la expresión $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ con $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ se llama *Suma de Riemann* de $f(x)$ en $[a,b]$ correspondiente a dicha partición.

Si para cualquier partición P, existe el límite siguiente: $\lim\limits_{\substack{\|P\|\to 0 \\ (n\to\infty)}} \left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \right)$ con $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$

el valor del límite recibe el nombre de integral definida o integral de Riemann de $f(x)$ sobre $[a,b]$ y se denota por $\int_a^b f(x)dx$.

2 Integración numérica de funciones de una variable con Octave/Matlab

```
f=inline('sin(x^2)')
% Para calcular la integral de la función entre 0 y 1
quad(f,0,1)
```

Ejercicio 1

Calcular con Octave un valor aproximado de $\int_1^2 \frac{e^{x^2}}{x^4}\,dx$ utilizando:

(a) una partición regular de 100 subintervalos donde el punto considerado en cada subintervalo sea su extremo superior derecho.

(b) una partición regular de 100 subintervalos donde el punto considerado en cada subintervalo sea el punto medio.

Para cada uno de los dos apartados se deberá escribir a mano la suma de Riemann que se está calculando.

Nota: $\int_1^2 \frac{e^{x^2}}{x^4}\,dx \approx 2.2306$

Indicación apartado a)

La expresión de la suma de Riemann pedida es: $\sum_{i=1}^{100} \frac{e^{c_i^2}}{c_i^4}\Delta x$ siendo

$$\Delta x = \frac{2-1}{100} = \frac{1}{100}$$

$$c_i = 1 + i\,\Delta x \qquad i = 1, 2, \ldots, 100$$

```
n=100;
incx=1/n;
ci=1+incx:incx:2;
f=inline('exp(x.^2)./(x.^4)','x');
valor=sum(f(ci))*incx
```

Indicación apartado b)

La expresión de la suma de Riemann pedida es: $\sum_{i=1}^{100} \frac{e^{c_i^2}}{c_i^4}\Delta x$ siendo

$$\Delta x = \frac{2-1}{100} = \frac{1}{100}$$

$$c_i = 1 + \frac{\Delta x}{2} + (i-1)\,\Delta x \qquad i = 1, 2, \ldots, 100$$

```
n=100;
incx=1/n;
ci=1+incx/2:incx:2-incx/2;
f=inline('exp(x.^2)./(x.^4)','x');
sum(f(ci)*incx)
double(int(exp(x^2)/x^4,1,2))
```

Ejercicio 2

Considera la función $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$.

(a) Dibuja su gráfica en el intervalo $[0,1]$ ¿Es creciente o decreciente?

(b) Calcular un valor aproximado de $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ utilizando sumas de Riemann con $n = 50$ subintervalos y considerando como punto de cada subintervalo las siguientes opciones

1. El extremo inferior del subintervalo
2. El extremo superior del subintervalo
3. El punto medio del subintervalo

(c) Al ser una función creciente, ¿cuál de las sumas anteriores es una cota superior del valor exacto de la integral y cuál es una cota inferior?

Un valor aproximado de la integral es 0.310268301723381

Ejercicio 3

Considera la función $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$.

(a) Dibuja su gráfica en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ ¿Es creciente o decreciente?

(b) Calcular un valor aproximado de $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ utilizando sumas de Riemann con $n = 50$ subintervalos y considerando como punto de cada subintervalo las siguientes opciones

1. El extremo inferior del subintervalo
2. El extremo superior del subintervalo
3. El punto medio del subintervalo

(c) Al ser una función creciente, ¿cuál de las sumas anteriores es una cota superior del valor exacto de la integral y cuál es una cota inferior

Un valor aproximado de la integral es -0.104719313790505

Resumen de comandos

El comando utilizado en esta práctica que se dará por conocido en las prácticas siguientes es el siguiente:

- Para integrar numéricamente funciones de una variable: : `quad`