Prácticas Matlab

Práctica 6 (11- XI -2015)

Objetivos

- Estudiar la convergencia puntual de una serie de potencias.
- Estimar gráficamente el intervalo de convergencia de una serie de potencias.

Comandos de Matlab

En esta práctica no se incluye ningún comando nuevo, se utilizan los vistos en prácticas anteriores.

Ejercicios

Una expresión de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ recibe el nombre de *serie de potencias centrada en el punto* a.
Una serie de potencias puede ser interpretada como una función de x

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

1

Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ con x un número real, se pide:

a) Comprobar a mano que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ para $|x|<1$

Observar que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es una función cuyo dominio es $|x|<1$ y que coincide con $f(x)=\frac{1}{1-x}$ en $|x|<1$

b) Representar con Matlab en el intervalo $(-1,1)$, la función $f(x)$ y la aproximación considerando los 5 primeros términos de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

c) Calcular a mano el polinomio de Taylor de grado n de la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ en el punto 0.

Observar que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n}(0)}{n!} x^n \quad si \ |x| < 1$

Apartado a)

Hecho en clase

Apartado b). Órdenes Matlab

```
clear all
x=-0.9:0.1:0.9;
g=1;
for n=1:4
      g=g+x.^n;
end
f=1./(1-x);
plot(x,f,'ro',x,g,'bo')
legend('f(x)','Suma aproximada')
```

Apartado c)

Considerando la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, la derivada enésima es:

$$f^{(n}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}$$

y su polinomio de Taylor es

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(0)}{n!} x^n =$$

$$= 1 + x + \frac{2!}{2!} x^2 + \ldots + \frac{n!}{n!} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

Observar que

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(0)}{n!} x^n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

TEOREMA: Si la función f es infinitamente derivable en un intervalo I abierto centrado en a y si $R_n(x)$ es el resto de la fórmula de Taylor, entonces:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$ se llama *Serie de Taylor de la función* $f(x)$. En el caso particular en que $a=0$, la serie se denomina *Serie de MacLaurin de la función* $f(x)$.

2

(a) Dada la función $f(x)=\frac{1}{2+x}$ escribir esta función como suma de potencias y determinar para qué valores de x coincide con dicha serie.

(b) Representar la función $g(x)$ y los tres primeros términos de la serie en el intervalo de convergencia obtenido en el apartado (a).

Apartado a)

Observar que

$$f(x)=\frac{1}{2+x}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n \qquad si\ |x|<2$$

3

Repetir el ejercicio 2 considerando las siguientes funciones obteniendo primero su serie de potencias y también el intervalo de convergencia.

(a) $f_1(x)=\frac{1}{3+2x}$ (b) $f_2(x)=\frac{4}{2+3x}$

(c) $f_3(x)=\frac{5}{12+3x^2}$ (d) $f_4(x)=\frac{1}{(1+2x)(3x+2)}$

Resumen de comandos

Todos los comandos que se utilizan en esta práctica se han visto en prácticas anteriores.