Prácticas Cálculo I

Práctica 6 (20- X-2021)

Objetivos

- Utilizar Matlab como calculadora numérica y gráfica para la resolución de problemas.
- Representar polinomios de Taylor de una función en un punto comprobando la aproximación que proporcionan en las proximidades de dicho punto.

Polinomios de Taylor:

Supongamos que $f(x)$ es una función derivable n veces en el punto $x = a$. Se define el polinomio de Taylor de grado n correspondiente a la función f en el punto $x = a$ como

$$T_n[f(x);a] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En el caso en que $a = 0$ el polinomio se llama de MacLaurin.

Ejercicio 1

Utilizando la herramienta `taylortool`,

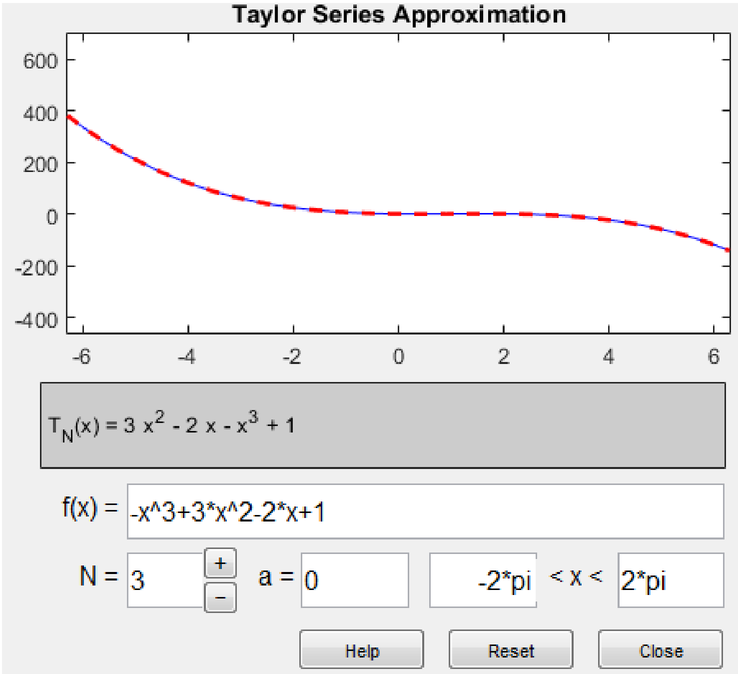
(a) Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 en el punto 0 del polinomio $p(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 1$. Observa que el polinomio de Taylor en el origen de un polinomio de grado n es el propio polinomio.

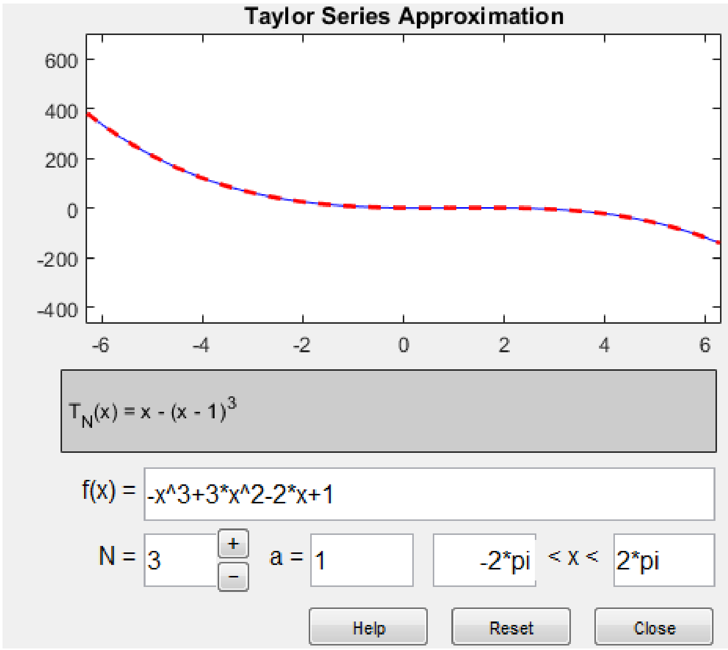
(b) Escribe el polinomio $p(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ en potencias de x-1. Observa que

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{p'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

Solución

```
>>taylortool
```





$$p(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \quad \rightarrow \quad p(1) = \boxed{1}$$

$$p'(x) = -3x^2 + 6x - 2 \quad \rightarrow \quad \frac{p'(1)}{1!} = \frac{1}{1!} = \boxed{1}$$

$$p''(x) = -6x + 6 \quad \rightarrow \quad \frac{p''(1)}{2!} = \boxed{0}$$

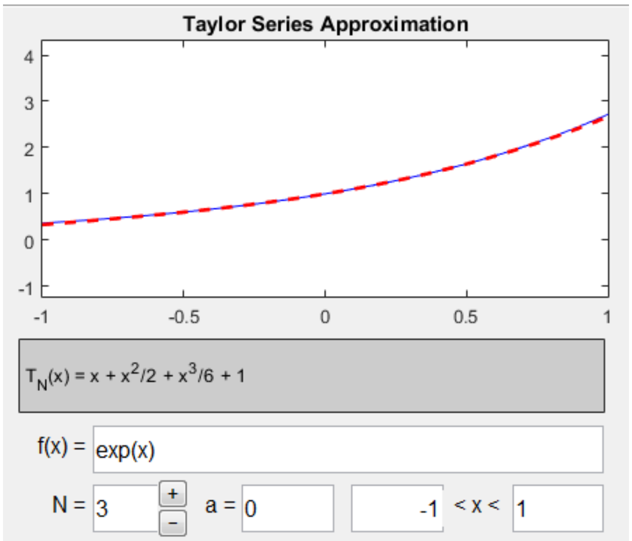
$$p'''(x) = -6 \quad \rightarrow \quad \frac{p'''(1)}{3!} = \frac{-6}{6} = \boxed{-1}$$

Ejercicio 2

(a) Representar en una misma figura la gráfica de la función exponencial y de su polinomio de Taylor de grado 3 en el punto 0 en el intervalo [-1,1].
(b) Calcula el valor que devuelve el polinomio de Taylor de grado 3 calculado en los puntos -0.4, 0.1 y 0.7. Comprueba el valor que da Octave/Matlab para esos valores y cuántos decimales de aproximación consigue el polinomio de Taylor para cada punto. ¿En qué punto aproxima mejor el polinomio al valor de la función?
(c) Repite el apartado (b) considerando el polinomio de Taylor de grado 6. ¿Con qué polinomio se consigue mejor aproximación para cada punto?

Solución (a)

Con la herramienta taylortool



Para dibujar la función y el polinomio de Taylor de grado 3 puedes utilizar un fichero-M y escribir las siguientes órdenes:

```
x=-1:0.1:1;
y1=exp(x);
y2=1+x+x.^2/2+ x.^3/6;
plot(x,y1,x,y2)
```

o también

```
g=inline('1+x+x.^2+x.^3/6');
x=-1:0.1:1;
plot(x,exp(x),x,g(x))
```

Solución (b)

```
format long
puntos=[-0.4 0.1 1];
disp('Valor de la exponencial en el punto:')
vf=exp(puntos)
disp('Valor del polinomio en el punto:')
vg=g(puntos)
disp('Diferencia:')
```

```
vf-vg
```

Ejercicio 3

Considera la función $g(x) = e^{-x^2}$

(a) Calcula el polinomio de Taylor de grado 6 para la función $g(x) = e^{-x^2}$. Observa que es el polinomio de Taylor de grado 3 donde se ha sustituido x por $-x^2$.

(b) Calcula una aproximación de la integral $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ utilizando el polinomio de Taylor obtenido en el apartado a).

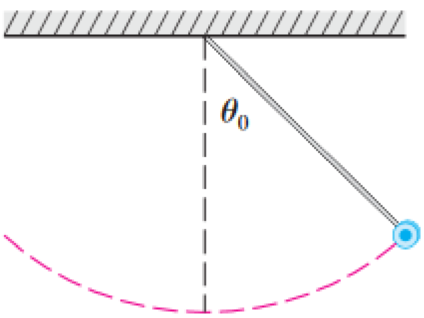
Solución

```
syms x
%Polinomio de Taylor de grado 6
pol=taylor(exp(-x^2),x,'ExpansionPoint',0,'Order',7);
valor=int(pol,x,0,1);
disp('Valor de la aproximación')
double(valor)
disp('Valor de la integral')
double(int(exp(-x^2),x,0,1))
```

Ejercicio 4

La figura muestra un péndulo con longitud L que forma un ángulo máximo θ_o con la vertical. Usando la segunda ley de Newton, se puede demostrar que el periodo T (el tiempo de una oscilación completa) esta dado por

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2 sen^2 x}}$$



donde $k = sen\left(\frac{1}{2}\theta_o\right)$ y g es la aceleración debida a la gravedad. Si L=1 metro y $\theta_o = 42^o$, utiliza un polinomio de Taylor de la función integrando para obtener el valor del periodo.
Solucion: El valor de la integral es $T \approx 2.0766$

Solución	(code below)

Solución

```
L=1;g=9.8;phi0=42*pi/180;k=sin(phi0/2);
syms x
%Polinomio de Taylor de grado 4
pol=taylor((1-k^2*sin(x)^2)^(-0.5),x,
'ExpansionPoint',0,'Order',5);
valor=int(pol,x,0,pi/2);
double(valor*4*sqrt(L/g))
```