Prácticas Cálculo I

Práctica 5 (8- XI-2017)

Objetivos

- Utilizar Octave como calculadora numérica y gráfica para la resolución de problemas.
- Representar polinomios de Taylor de una función en un punto comprobando la aproximación que proporcionan en las proximidades de dicho punto.

Serie de Taylor:

Supongamos que $f(x)$ es una función infinitamente derivable en el punto a. Se define la serie de Taylor a la función f en el punto a como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

En el caso en que $a = 0$ la serie se llama de MacLaurin.

Series de Taylor
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad x \in \mathbb{R}$
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad x \in \mathbb{R}$
$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots \quad x \in (-1,1]$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + .. + x^n + \ldots \quad \lvert x \rvert < 1$

A partir del desarrollo de algunas funciones se pueden obtener el de otras funciones teniendo en cuenta:

a) La composición de funciones.

b) Que una serie de potencias se puede derivar término a término en su intervalo de convergencia obteniendo una nueva serie con el mismo intervalo de convergencia.

c) Que una serie de potencias se puede integrar término a término en su intervalo de convergencia obteniendo una nueva con el mismo intervalo de convergencia.

Ejercicio 1

(a) Calcula el valor de

$$e^{-1}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}+\ldots=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}+..$$

considerando los cuatro primeros términos de la serie.

(b) Calcula el error que se comete en la aproximación del apartado a)

Indicación apartado a)

```
x=1
format long
aprox=1/2-1/6+1/factorial(4)-1/factorial(5)
%Valor dado por octave
valor=exp(-1)
%Para sumar los 100 primeros términos
n=2:101;
aprox1=sum((-1).^n./factorial(n))
```

Indicación apartado b)

Como la serie es alternada, si aproximamos con los cuatro primeros términos el error es menor que el valor absoluto del término quinto

$$error<\frac{1}{6!}$$

Ejercicio 2

Utilizando los desarrollos de la tabla "Series de Taylor",

(a) Calcula el valor de $\log 2$ con un error menor que 0.01.

(b) Calcula el valor de $\operatorname{sen} 1$ con un error menor que 0.01.

(c) Calcula el valor de $\frac{e-1}{e}$ con un error menor que 0.01.

Soluciones

(a) Se debe cumplir $\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{100}\Rightarrow n\geq 99$. El valor de la aproximación es 0.68817

(b) Se debe cumplir $\frac{1}{(2n+1)!}\leq\frac{1}{100}\Rightarrow n\geq 2$. El valor de la aproximación es 0.841666666666667

(c) Se debe cumplir $\frac{1}{(n+1)!}\leq\frac{1}{100}\Rightarrow n\geq 4$. El valor de la aproximación es 2.35039682539683

Ejemplo: Obtener una aproximación de $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ integrando la serie de potencias de e^{-x^2} término a término y considerando los cinco primeros términos.

Como

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad x \in \mathbb{R}$$

Reemplazando x por $-x^2$ se tendrá

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \ldots\right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \ldots$$

Como esta serie es alternada, si consideramos los cuatro primeros términos del desarrollo en serie, la aproximación de la integral será

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \approx 0.742857142\,.$$

Este valor aproximará al valor real con un error que verifica:

$$|error| < |a_5| = \frac{1}{9 \cdot 4!}$$

Ejercicio 3	(a) Utilizando la tabla de series de potencias, calcular el desarrollo en serie de potencias en el origen de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ (b) Calcula mediante una serie el valor de la siguiente integral $I = \int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ (c) Considera como aproximación de los cuatro primeros términos del desarrollo obtenido en el apartado b). ¿Cuál es el error cometido en esta aproximación?
Soluciones	(a) $\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots$ (b) $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} + \ldots$ (c) El error es menor que $\frac{1}{19 \cdot 9!}$

Ejercicio 4	(a) Representar la función $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ en el intervalo [-1,1]. Esta curva se conoce con el nombre de campana de Gauss. (b) Considerando una distribución normal de media 0 y desviación típica 1, la probabilidad de que x esté entre a y b se calcula mediante la siguiente integral: $$P(a<x<b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}dx$$ Calcular $P(0<x<1)$ con los primeros 4 términos de la serie.
Soluciones	(b) Observar que $$e^{-x^2/2}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^3\cdot 3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n\cdot n!}+\ldots\ x\in\mathbb{R}$$ $P(0<x<1)\approx 0.34124$

Resumen de comandos

En esta práctica no se ha introducido ningún comando nuevo.