Prácticas Cálculo I

Práctica 5 (28- X-2020)

Objetivos

- Utilizar Matlab como calculadora numérica y gráfica para la resolución de problemas.
- Analizar la convergencia y divergencia de una serie numérica.
- Estimar el error al aproximar la suma de una serie alternada convergente por Leibniz por la suma de los n primeros términos.

Las series alternadas son de una de las formas siguientes:

i) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + \ldots. \quad (a_n > 0)$$

ii) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - \ldots. \quad (a_n > 0)$$

TEOREMA DE LEIBNIZ: La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \; (a_n > 0)$ converge si la sucesión (a_n) es monótona decreciente y se verifica $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ejercicio 1	

Se considera la serie geométrica alternada siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$$

Se pide:

a) Determina que es convergente considerando que es geométrica. ¿Cuál es el valor de su suma

b) Determina que es convergente aplicando el teorema de Leibniz.

c) Representa la sucesión a_n para n desde 1 hasta 20.

d) Calcula y representa las primeras cuatro sumas parciales de la serie.

e) Calcula y representa las primeras 10 sumas parciales de la serie.

Solución

Su suma es $S = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{2}{3}$

```
%Cálculo de la suma
syms n
symsum((-1)^(n-1)/2^(n-1),1,inf)
%Un vector con los 20 primeros términos
a=inline('(-1).^(x-1)./2.^(x-1)','x'
n=1:20;
plot(n,a(n),'o')
hold on
plot([0 20],[0 0])
legend('Sucesión an')
%Observa que el término general tiende a cero
%Calculamos las primeras cuatro sumas parciales
Sn=[a(1)  a(1)+a(2)   a(1)+a(2)+a(3)
a(1)+a(1)+a(2)+a(3)]
figure(2)
plot(1:4,Sn,'g*')
hold on
plot([0 4],[2/3 2/3])
legend('Suma parcial')
hold off
%Calculamos las 5 primeras sumas parciales
Sn(1)=a(1);
Sn(2)=a(2)+Sn(1);
Sn(3)=a(3)+Sn(2);
Sn(4)=a(4)+Sn(3);
Sn(5)=a(5)+Sn(4);
%Para más sumas se debería utilizar un ciclo for
nter=40;
suma=0;
for k=1:nter
    suma=a(k)+suma;
    Sn(k)=suma;
end
Sn
figure(2)
plot(1:nter,Sn,'g*')
hold on
plot([0 nter],[2/3 2/3])
legend('Suma parcial')
hold off
```

SUMA APROXIMADA: Si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \; (a_n > 0)$ es convergente porque verifica las hipótesis del Teorema de Leibniz, el valor absoluto del resto enésimo se puede acotar fácilmente.

En efecto, como

$$R_n = S - S_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \ldots = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots)$$

y la sucesión (a_n) es monótona decreciente el valor absoluto del resto enésimo es:

$$|R_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots = a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} \ldots$$

es decir,

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Obsérvese que este error será:

- por exceso si el primer término despreciado es negativo
- por defecto si el primer término despreciado es positivo

Ejercicio 2

Aproximación de la suma de series alternadas que verifican el criterio de Leibniz

a) Comprueba a mano que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^n}$ verifica las condiciones suficientes del criterio de Leibniz.

b) Comprueba con Matlab para los valores n = 5, 8, 10 que el error en valor absoluto que se comete al aproximar la suma de la serie por la suma parcial enésima $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ es menor que el valor absoluto del primer término no considerado en la serie

$$|S - S_n| \leq |a_{n+1}|$$

Esto significa que la suma de la serie está en el intervalo

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^n} \in \left(S_n - |a_{n+1}|,\; S_n + |a_{n+1}|\right)$$

y este intervalo tiene longitud menor a medida que n tiende a infinito.

Solución

```
%Suma de la serie
syms n
suma=symsum(n*(-1)^n/2^n,1,inf)
double(suma)
%Opción 1
```

```
a=inline(vectorize('x*(-1)^x/2^x'),'x')
%Un vector con los 20 primeros términos
valorn=[5 8 10];
S5=sum(a(1:5));
S8=sum(a(1:8));
S10=sum(a(1:10));
an1=[a(6) a(9)  a(10)];
Sn=[S5 S8 S10]
disp('numTerminos      Resto    Cota')
[valorn; abs(suma-Sn); abs(an1)]'
double(ans)
```