Prácticas Cálculo I

Práctica 4 (21- X-2020)

Objetivos

- Utilizar Matlab como calculadora numérica y gráfica para la resolución de problemas.
- Obtener polinomios de Taylor de una función en un punto y comprobar la aproximación que facilitan en las proximidades del punto.

> Polinomios de Taylor:
>
> Supongamos que $f(x)$ es una función derivable n veces en el punto $x=a$. Se define el polinomio de Taylor de grado n correspondiente a la función f en el punto $x=a$ como
>
> $$T_n\left[f(x);a\right]=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k=$$
> $$=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$
>
> En el caso en que $a=0$ el polinomio se llama de MacLaurin.

Polinomios de Taylor de grado siendo $x\to 0$
$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$
$\operatorname{sen}(x)\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos(x)\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\log(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$
Nota: Ver más equivalencias en los apuntes del tema 2 (página 5).

A partir de ciertos polinomios conocidos se pueden obtener el de otras funciones teniendo en cuenta que:

> Sean f y g dos funciones y $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ los polinomios de Taylor de grado n en a respectivamente. Entonces:
>
> a) El polinomio de Taylor de grado n en a para $f+g$ es $P_n(x)+Q_n(x)$

b) El polinomio de Taylor de grado n en a para fg es la parte hasta el grado n del polinomio producto

c) El polinomio de Taylor de grado n en a para f / g se obtiene dividiendo el polinomio entre el polinomio, pero ordenados de la potencia menor a la potencia mayor, hasta llegar al grado n en el cociente

Ejemplo: El polinomio de Taylor de grado 2 de $\operatorname{sen}(x)+\cos(x)$ es

$$T_2(x) = \underbrace{(x)}_{\substack{polinomio \\ \operatorname{sen}(x)}} + \underbrace{\left(1-\frac{1}{2!}x^2\right)}_{polinomio\ \cos(x)} = 1 + x - \frac{1}{2!}x^2$$

Si $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de f grado n en a y $Q_n(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n en $f(a)$ para la función g entonces el polinomio de Taylor de grado n para la función compuesta, $g \circ f$, en a se obtiene como el polinomio de grado n del polinomio $Q_n(T_n(x))$

Ejemplo: El polinomio de Taylor de grado 2 de $\cos(e^x-1)$ teniendo en cuenta que:

$$f(x) = e^x - 1 \qquad P_2(x) = x + \frac{x^2}{2!}$$

$$g(x) = \cos x \qquad Q_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$$

sería para $(g \circ f)(x) = \cos(e^x-1)$, el polinomio de grado 2 de

$$1 - \frac{1}{2!}\left(x + \frac{x^2}{2!}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2!}\left(x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!}\right)$$

es decir,

$$T_2(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2$$

Ejercicio

1

(a) Utilizando la tabla anterior, calcular los dos primeros términos no nulos de los polinomios de Taylor en el punto $a=0$ de las siguientes funciones:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \log(1+x^2) \qquad \log(1-x^2)$$

$$x(1-x)\log(1+x) \qquad sen(x^2)\log(2+x) \qquad x^5 e^{x^2}$$

(b) Calcula infinitésimos equivalentes a las siguientes funciones para x=0

$$f_1(x) = \operatorname{sen} x - x\cos x \qquad f_2(x) = x^2(\operatorname{sen} x - x\cos x)$$

$$f_3(x) = arctg(x^2)(\operatorname{sen} x - x)$$

Ordena los infinitésimos según su orden e indica qué infinitésimos son del mismo orden.

(c) Usar los polinomios de Taylor necesarios para calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx - tgx}{x^3},\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\frac{2\left(1-chx\right)}{x^3}\right),\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x\cdot arctgx}{\log^2\left(x+1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)}$$

Solución

(a) $\cosh x \approx 1+\frac{x^2}{2}$ $\quad\log\left(1+x^2\right)\approx x^2-\frac{x^4}{2}$

$\log\left(1+x^2\right)\approx -x^2-\frac{x^4}{2}$ $\quad x\left(1-x\right)\log\left(1+x\right)\approx x^2-\frac{3x^3}{2}$

$sen\left(x^2\right)\log\left(2+x\right)\approx x^2\log\left(2\right)+\frac{x^3}{2}$ $\quad x^5e^{x^2}\approx x^5+x^7$

(b) $f_1\left(x\right)=\operatorname{sen}x-x\cos x\approx\frac{x^3}{3!}$ $\quad f_2\left(x\right)=x^2\left(\operatorname{sen}x-x\cos x\right)\approx\frac{x^5}{3!}$

$f_3\left(x\right)=arctg\left(x^2\right)\left(\operatorname{sen}x-x\right)\approx\frac{x^7}{120}$

PROPOSICIÓN.- Consideremos una función $y=f\left(x\right)$ con derivadas hasta el orden $n+1$ en el punto a, entonces se podrá escribir

$$f\left(x\right)-f\left(a\right)=f'\left(a\right)\left(x-a\right)+\frac{f''\left(a\right)}{2!}\left(x-a\right)^2+\ldots+\frac{f^{(n}\left(a\right)}{n!}\left(x-a\right)^n+o\left(\left(x-a\right)^n\right)$$

Supongamos que $f'\left(a\right)=f''\left(a\right)=\ldots=f^{(n-1}\left(a\right)=0$, entonces

- Si n es par y $f^{(n}\left(a\right)>0$ entonces en el punto a la función tiene un mínimo local.
- Si n es par y $f^{(n}\left(a\right)<0$ entonces en el punto a la función tiene un máximo local.
- Si n es impar en el punto a hay un punto de inflexión.

Ejercicio 2

Determina qué tipo de extremo tiene las siguientes funciones en los puntos indicados:

(a) $f\left(x\right)=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$, $a=1$

(b) $f\left(x\right)=x^2e^{x^4}$, $a=0$

(c) $f\left(x\right)=0.1\ sen\left(x^2\right)\left(\cos x-1\right)$, $a=0$

(d) $f\left(x\right)=sen\left[-\left(x-1\right)^2\right]e^{2x-2}$, $a=1$

Comprueba el resultado que has obtenido dibujando gráficamente la función en las proximidades del punto.

Solución

(a) Mínimo
(b) Mínimo
(c) Máximo
(d) Máximo

```
x=0:0.1:2;
y=x.^4+4+x.^3+6*x.*2+4*x+1;
plot(x,y)
```

Nota: Este ejercicio no se ha explicado, no forma parte del contenido de la asignatura.

Ejercicio 3

Dada la función $f\left(x\right)=arctg\left(x\right)$ y el punto 1, calcula un valor aproximado de $f\left(1.2\right)$ al considerar su polinomio de Taylor de grado 3 y dar una cota del error de la aproximación. ¿Cuántas cifras significativas se considerarían con la aproximación?

Nota: Este es un ejercicio para comprender el proceso de acotación del resto por lo que puedes ayudarte de la representación de la derivada que corresponda para obtener una cota de $R_3\left(1.2\right)$.

Solución

```
syms x
f=atan(x);
%Forma 1 del cálculo del polinomio de Taylor
polinomio=taylor(f,'ExpansionPoint',1,'Order',4)
%Forma 2 del cálculo del polinomio de Taylor
derivadas=[f diff(f)    diff(f,2)   diff(f,3)
diff(f,4)]
coefTaylor=subs(derivadas,1)./[1 1 2 6 24]
polinomio=sum(coefTaylor.*(x-1).^[0 1 2 3 4])
%Valor de la aproximación con el polinomio de Taylor
valPol=subs(polinomio,x,1.2)
format long
valAprox=double(valPol)
%Valor que da matlab de arctg(1.2)
val=double(atan(1.2))
%Cota del resto de Lagrange
der4=diff(f,4);
ezplot(abs(der4),[1,1.2])%Se observa que es creciente
cotaerror=subs(abs(der4),1.2)*0.2^4/factorial(4)
double(cotaerror)
```