Prácticas Cálculo I

Práctica 4 (25- X-2017)

Objetivos

- Utilizar Octave como calculadora numérica y gráfica para la resolución de problemas.
- Representar polinomios de Taylor de una función en un punto comprobando la aproximación que proporcionan en las proximidades de dicho punto.

Polinomios de Taylor:

Supongamos que $f(x)$ es una función derivable n veces en el punto $x = a$. Se define el polinomio de Taylor de grado n correspondiente a la función f en el punto $x = a$ como

$$T_n\left[f(x);a\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En el caso en que $a = 0$ el polinomio se llama de MacLaurin.

Polinomios de Taylor de grado siendo $x \approx 0$
$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$
$\operatorname{sen}(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

A partir de ciertos polinomios conocidos se pueden obtener el de otras funciones teniendo en cuenta que:

Sean f y g dos funciones y $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ los polinomios de Taylor de grado n en a respectivamente. Entonces:

a) El polinomio de Taylor de grado n en a para $f+g$ es $P_n(x) + Q_n(x)$

b) El polinomio de Taylor de grado n en a para fg es la parte hasta el grado n del polinomio producto

c) El polinomio de Taylor de grado n en a para f/g se obtiene dividiendo el polinomio entre el polinomio, pero ordenados de la potencia menor a la potencia mayor, hasta llegar al grado n en el cociente

Ejemplo: El polinomio de Taylor de grado 2 de $\operatorname{sen}(x)+\cos(x)$ es

$$T_2(x) = \underbrace{(x)}_{\substack{polinomio \\ \operatorname{sen}(x)}} + \underbrace{\left(1-\frac{1}{2!}x^2\right)}_{polinomio\ \cos(x)} = 1 + x - \frac{1}{2!}x^2$$

Si $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de f grado n en a y $Q_n(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n en $f(a)$ para la función g entonces el polinomio de Taylor de grado n para la función compuesta, $g \circ f$, en a se obtiene como el polinomio de grado n del polinomio $Q_n(T_n(x))$

Ejemplo: El polinomio de Taylor de grado 2 de $\cos(e^x - 1)$ teniendo en cuenta que:

$$f(x) = e^x - 1 \qquad P_2(x) = x + \frac{x^2}{2!}$$

$$g(x) = \cos x \qquad Q_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$$

sería para $(g \circ f)(x) = \cos(e^x - 1)$, el polinomio de grado 2 de

$$1 - \frac{1}{2!}\left(x + \frac{x^2}{2!}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2!}\left(x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!}\right)$$

es decir,

$$T_2(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2$$

Ejercicio

1

(a) Utilizando la tabla anterior, calcular los dos primeros términos no nulos de los polinomios de Taylor en el punto $a = 0$ de las siguientes funciones:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \log(1+x^2) \qquad \log(1-x^2)$$

$$sen(x^2)\log(1+x) \qquad x^5 e^{x^2}$$

(b) Calcula el valor aproximado de las funciones en el punto $x = 0.5$ que devuelve Octave y el valor aproximado que devuelve el primer término no nulo del polinomio de la función correspondiente.

PROPOSICIÓN.- Consideremos una función $y = f(x)$ con derivadas hasta el orden $n+1$ en el punto a, entonces se podrá escribir

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Supongamos que $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1}(a) = 0$, entonces

- Si n es par y $f^{(n}(a) > 0$ entonces en el punto a la función tiene un mínimo local.
- Si n es par y $f^{(n}(a) < 0$ entonces en el punto a la función tiene un máximo local.
- Si n es impar en el punto a hay un punto de inflexión.

Ejercicio 2

Determina qué tipo de extremo tiene las siguientes funciones en los puntos indicados:

(a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$, $a = 1$

(b) $f(x) = x^2 e^{x^4}$, $a = 0$

(c) $f(x) = 0.1\ sen(x^2)(\cos x - 1)$, $a = 0$

(d) $f(x) = sen\left(-(x-1)^2\right)e^{2x-2}$, $a = 1$

Comprueba el resultado que has obtenido dibujando gráficamente la función en las proximidades del punto.

Indicación apartado a

Para representar la función en las proximidades del punto a:

```
x=0:0.1:2;
y=x.^4+4+x.^3+6+x.*2+4*x+1;
Plot(x,y)
```

Ejercicio 3

Determinar la relación que debe cumplir a y b de forma que la función siguiente sea un infinitésimo para a=0 de orden 1

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{a}\cdot \mathrm{sen}(x) + b\left(e^x - \cos(x)\right)$$

Resumen de comandos

Estos son los comandos utilizados en esta práctica que se darán por conocidos en las prácticas siguientes y que conviene retener porque se podrán preguntar en las distintas pruebas de evaluación.

- Para definir una función inline: : `inline`