INTEGRACIÓN DE FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Cálculo de primitivas
- Propiedades de las funciones integrables.

INTEGRAL DEFINIDA. INTEGRAL DE RIEMANN

1 Definición

Definición (Partición).- Dados dos números reales tales que $a < b$*, recibe el nombre de partición del intervalo cerrado* $[a, b]$ *todo conjunto finito de puntos de* $[a, b]$*, de los cuales uno es* a *y otro es* b*:*

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \,/\, a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$$

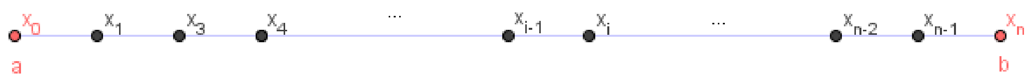


Figura 1.- Ejemplo de una partición de $[a, b]$.

Definición (Norma de una partición).- Llamaremos norma de la partición P, y la designaremos por $\|P\|$ *a la longitud del subintervalo más largo, es decir,*

$$\|P\| = \max_{1 \le i \le n} |x_i - x_{i-1}|$$

Si todos los puntos de la partición son equidistantes, se habla de **partición regular**. En este caso se cumple $\|P\| = \Delta x$.

Definición (Integrabilidad).- Dada una función $y = f(x)$ *acotada en un intervalo cerrado* $[a, b]$*, se dice que es integrable en este intervalo* $[a, b]$ *si para cualquier partición P, existe el límite siguiente:* $\lim\limits_{\substack{\|P\| \to 0 \\ (n \to \infty)}} \left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i \right)$ con $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$

En este caso, el valor del límite recibe el nombre de integral definida o integral de Riemann de $f(x)$ *sobre* $[a,b]$ *y se denota por* $\int_a^b f(x)dx$.

En esta expresión, los números a *y* b *se llaman, respectivamente, límite inferior y límite superior de integración.*

Si $f(x)$ *es integrable en cualquier intervalo* $[a,b]$ *contenido en* $\mathbb{R}$ *se dice que es integrable en todo* $\mathbb{R}$.

Observación: Si P es regular, se verifica $\lim\limits_{\substack{\|P\|\to 0 \\ (n\to\infty)}} \left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\right) = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0 \\ (n\to\infty)}} \left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x\right)$

La expresión $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ se llama *Suma de Riemann* de $f(x)$ en $[a,b]$, correspondiente a una partición regular con *n* subintervalos, de tamaño $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Definición (Suma inferior, suma superior y suma central de Riemann).- Se definen la suma inferior, la suma superior y la suma central de Riemann de la función $f(x)$ *correspondientes a la partición regular P, y las designaremos por* $s(f,P)$, $S(f,P)$ *y* $\sigma(f,P)$, *respectivamente, como*

- $s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dfrac{b-a}{n}$, *siendo* $m_i = \text{mín}\left\{f(x) \,/\, x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}$
- $S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \dfrac{b-a}{n}$, *siendo* $M_i = \text{máx}\left\{f(x) \,/\, x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}$
- $\sigma(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \left(i - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{b-a}{n}\right) \cdot \dfrac{b-a}{n}$

IMPORTANTE.- Si la función es integrable, el valor de la integral de Riemann se puede calcular como el límite de cualquier suma de Riemann correspondiente a cualquier partición regular *P*, cuya norma tienda a 0.

OBSERVACIÓN.- Si f es creciente en $[a,b]$, las sumas superior e inferior de Riemann para una partición regular son, respectivamente:

$$S(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n} \qquad s(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n}$$

Si f es decreciente, las sumas superior e inferior de Riemann se definen intercambiando las definiciones anteriores.

2 Interpretación geométrica de la Integral de Riemann

El valor de la integral de Riemann de una función $f(x)$ acotada y positiva en $[a,b]$, se puede interpretar como:

> "El área de la región limitada por el eje horizontal, las rectas verticales $x=a$ e $y=b$ y la gráfica de $f(x)$ en $[a,b]$"

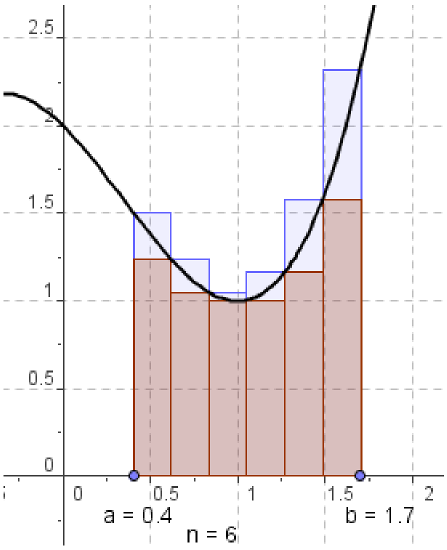


Figura 2.- Interpretación geométrica de la integral de Riemann

3 Condiciones de integrabilidad

TEOREMA.- Toda función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ es integrable en dicho intervalo.

IMPORTANTE.-También es integrable en $[a,b]$ toda función acotada que tenga en este intervalo un número finito de puntos de discontinuidad.

TEOREMA.- Toda función monótona en un intervalo cerrado $[a,b]$ es integrable en él.

IMPORTANTE.-También es integrable en $[a,b]$ toda función no monótona y acotada que pueda descomponerse en un número finito de intervalos donde sea monótona.

TEOREMA.- Es condición necesaria para que $f(x)$ sea integrable en el intervalo $[a,b]$, que esté acotada en él.

4 Propiedades de la integral de Riemann

PROPIEDAD 1 (*Carácter lineal de la integral definida*).- *Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones integrables en [a, b] también son integrables las funciones $f(x) \pm g(x)$ y $kf(x)$ con $k \in \mathbb{R}$, cumpliéndose:*

(i) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(ii) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

PROPIEDAD 2 (Inversión de los límites de integración).- *Si se invierten los límites de una integral ésta cambia de signo,* $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

PROPIEDAD 3.- *Para todo número real a se tiene:* $\int_a^a f(x)dx = 0$

PROPIEDAD 4 (Propiedad aditiva del intervalo de integración).- *Si f es integrable en los intervalos $[a,b]$ y $[b,c]$ entonces f es integrable en $[a,c]$ siendo,*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

PROPIEDAD 5 (Positividad).- *Si f es integrable y no negativa en $[a,b]$, entonces* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

PROPIEDAD 6 (Propiedad de monotonía).- Si f y g son integrables en $[a,b]$ y además $f(x) \leq g(x) \;\; \forall x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

PROPIEDAD 7 (Acotación modular).- Se verifica $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$

5 Teorema del Valor Medio Integral

Definición (Valor medio).- Si f es una función integrable en $[a,b]$, entonces el valor medio de f en este intervalo se define como: $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Nota: El valor medio de una función de variable continua, constituye una generalización de la media aritmética de n números.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO.- Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ entonces existe un número c comprendido entre a y b tal que $\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a)$

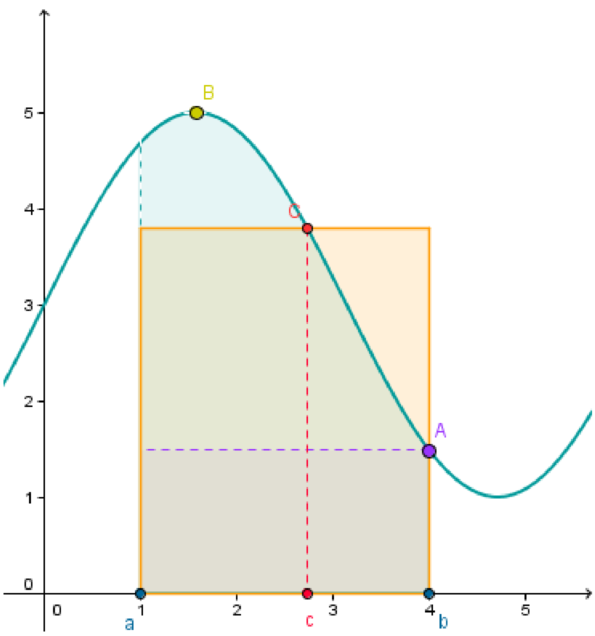


Figura 3.- Interpretación geométrica del teorema del valor medio para integrales.

Este teorema tiene una *interpretación geométrica* sencilla (ver figura 3): "El área limitada por la curva en el intervalo $[a,b]$ es igual a la de un rectángulo de base igual a la amplitud del intervalo y de altura igual a la ordenada de la curva en un punto de dicho intervalo".

Según el teorema anterior una función f, continua en el intervalo $[a,b]$, toma su valor medio, μ, en algún punto $c \in [a,b]$.

6 Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Este teorema relaciona estrechamente conceptos aparentemente tan dispares como el de primitiva e integral definida de una función continua y, a partir de él se obtiene un procedimiento sencillo para calcular integrales definidas sin usar límites de sumas.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL.- Sea $f(t)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$. Entonces, la función $F(x)$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{con} \quad x \in [a,b]$$

es derivable en dicho intervalo verificándose $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$

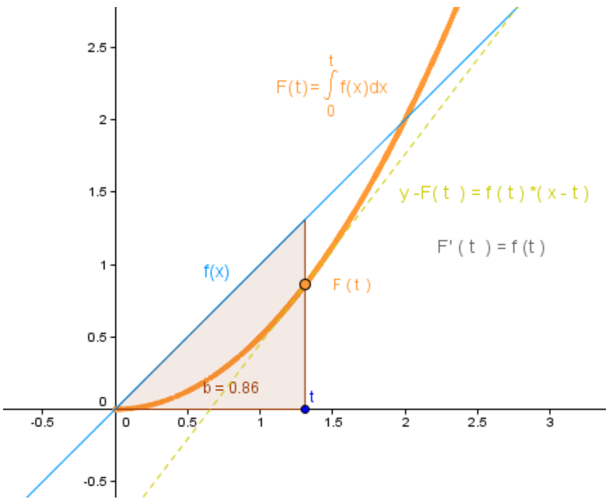


Figura 4.- Representación gráfica para ilustrar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

A partir de este teorema se puede probar la Regla de Barrow, que es la regla práctica para calcular integrales definidas. Pero además, el teorema fundamental, es una nueva forma de definir funciones no elementales.

7 Regla de Barrow

Esta regla, explica cómo utilizar las primitivas en el cálculo de integrales definidas de funciones continuas en el intervalo de integración.

REGLA DE BARROW.- Si f es una función continua en el intervalo $\left[a,b\right]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

donde $G(x)$ es cualquier primitiva de $f(x)$, es decir, cualquier función que verifique que $G'(x) = f\left(x\right)$

8 Cálculo de integrales definidas

En general, las integrales definidas se calculan mediante la regla de Barrow. En el caso de que se utilice un cambio de variable para obtener la primitiva, los límites de integración de la integral en la nueva variable, se ven modificados de la forma indicada por el siguiente teorema.

TEOREMA (Cambio de variable en integrales definidas).- Si la función $t = g(x)$ tiene derivada continua en $\left[a,b\right]$ y f es continua en el rango de g, entonces

$$\int_a^b f\left[g(x)\right] g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

Si la integral indefinida se resuelve por partes, los límites de integración afectarán naturalmente tanto a la nueva integral que se debe calcular como a la parte ya calculada de la primitiva. Es decir,

$$\int_a^b udv = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b vdu$$

En el caso de que las funciones del integrando tengan la propiedad de ser pares, impares o periódicas, las integrales pueden simplificarse de la forma que indica el siguiente teorema.

TEOREMA (Integración de funciones pares, impares y periódicas).- Sea f integrable en $\mathbb{R}$

(1) Si f es una función par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

(2) Si f es una función impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

(3) Si f es una función periódica con periodo T, entonces

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad ; \quad \int_0^{nT} f(x)dx = n\int_a^{a+T} f(x)dx$$

9 Interpretaciones de la integral definida

Hemos visto que la integral definida puede representar un área, pero también es la respuesta a muchos otros problemas planteados por la física y la tecnología. En la tabla se recogen algunas interpretaciones de la integral definida, dependiendo del significado físico de $f(x)$.

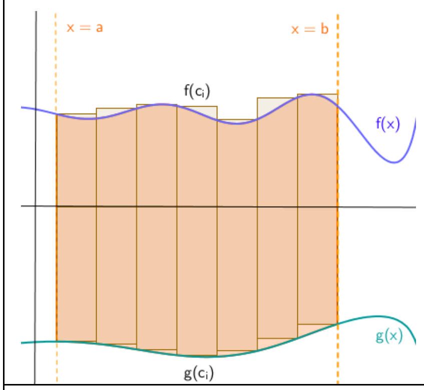
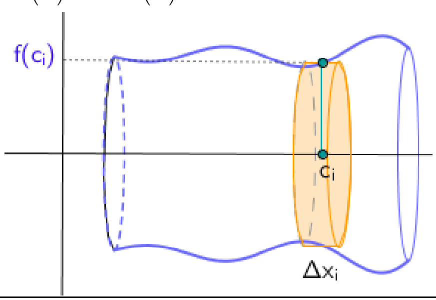
Función $h(x)$	Interpretación del rectángulo aproximante $h(c_i)(x_i - x_{i-1})$	Significado de la integral definida $\int_a^b h(x)\,dx$
Densidad lineal $\delta(x)$	Estimación de la masa en $[x_{i-1}, x_i]$ $\delta(c_i)(x_i - x_{i-1})$	Masa $\int_a^b \delta(x)\,dx$
Altura de una región plana limitada por dos curvas $h(x) = f(x) - g(x)$ 	Área de un rectángulo aproximante de anchura $(x_i - x_{i-1})$ y altura $f(c_i) - g(c_i)$ $\left[f(c_i) - g(c_i)\right](x_i - x_{i-1})$	Área de una región plana comprendida entre dos curvas $\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$
Área de una sección plana del cuerpo de revolución obtenido al girar la curva $f(x)$ $h(x) = \pi f(x)^2$ 	Volumen de una rebanada del sólido de radio $f(c_i)$ y grosor $(x_i - x_{i-1})$ $\pi\left[f(c_i)\right]^2 (x_i - x_{i-1})$	Volumen del sólido de revolución $\int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$
Velocidad $v(t)$	Estimación de la distancia recorrida entre los tiempos t_{i-1} y t_i $v(c_i)(t_i - t_{i-1})$	Distancia $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$

Tabla 1.- Interpretaciones de la integral definida.

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

10 Cálculo de áreas planas

Curva en explícitas

El área limitada entre $y = f(x)$, el eje OX y las rectas x=a y x=b es

$$A = \int_a^b \left| f(x) \right| dx$$

El área entre dos curvas f y g en el intervalo $[a,b]$ se calcula como:

$$A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$$

Nota: Para resolver estas integrales se debe calcular previamente $\left| f(x) - g(x) \right|$, es decir, cuál de las dos funciones es la mayor dentro del intervalo $[a,b]$.

Curva en paramétricas

Sea C la curva dada por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ con $t \in [t_1, t_2]$

El área limitada por la curva C y el eje OX es

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \left| y(t)\ x'(t) \right| dt$$

El área limitada por C y el eje OY es

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \left| x(t)\ y'(t) \right| dt$$

Curva en polares

El área encerrada por la curva C dada por $\rho = \rho(\theta)$, para $\theta \in [\theta_a, \theta_b]$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_a}^{\theta_b} \rho(\theta)^2\, d\theta$$

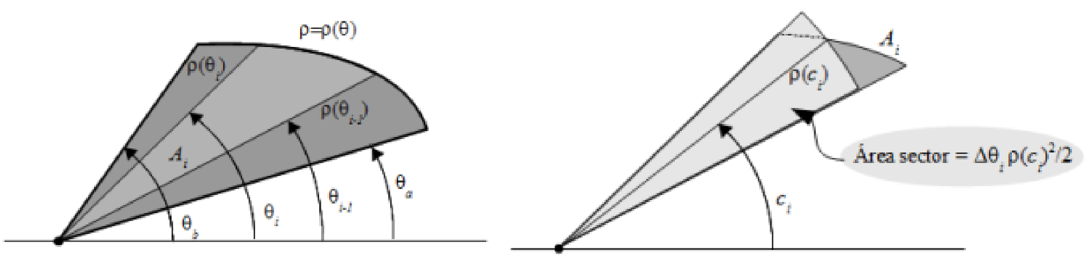


Figura 5. Representación gráfica del área de un sector diferencial en polares.

11 Volúmenes de sección conocida

Si el sólido H cumple que la sección transversal perpendicular al eje OY tiene área conocida, $A(y)$ para cada $y \in [a,b]$, entonces el volumen de H se calcula como

$$V = \int_a^b A(y)\, dy$$

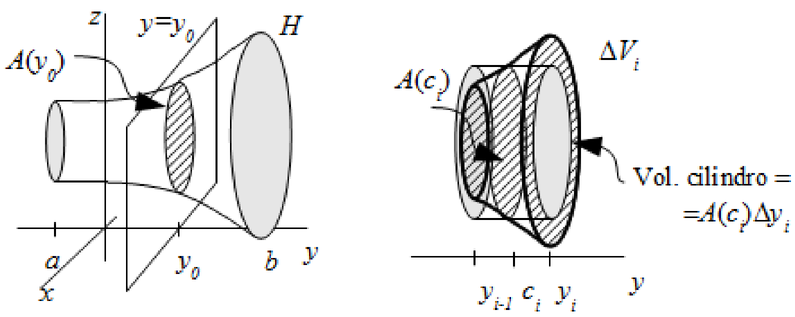


Figura 6. Volumen sección conocida

12 Volúmenes de sólidos de revolución

Si f es una función derivable en el intervalo $[a,b]$, entonces el volumen del sólido generado al girar el área bajo la curva $y = f(x)$ respecto del eje OX entre $x = a$ y $x = b$ es

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

El volumen del sólido generado al girar dicha área respecto al eje OY es

$$V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx$$

En este caso la función tiene que ser positiva.

13 Área de superficies de revolución

Si f es una función derivable con derivada continua en el intervalo $[a,b]$, entonces el área de la superficie generada haciendo girar alrededor del eje OX el arco de la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

14 Longitudes

Si f es una función derivable con derivada continua en el intervalo $[a,b]$, la longitud de la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$$

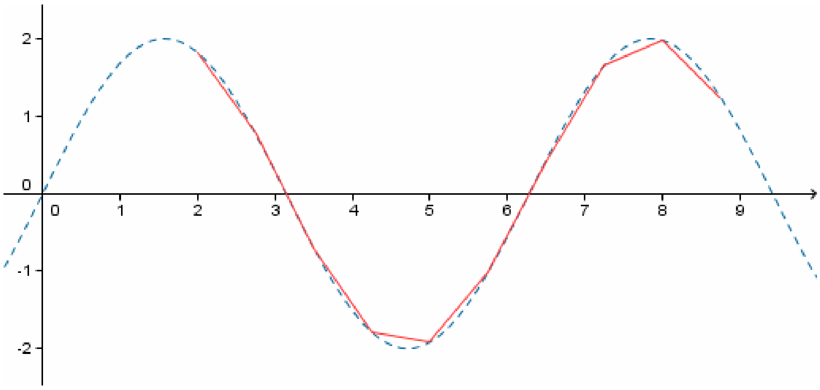


Figura 7. Longitud de una curva

INTEGRACIÓN INDEFINIDA

15 Función primitiva

Definición (Función primitiva).- Se dice que $F(x)$ es una función primitiva de otra función $f(x)$ si y sólo si se verifica

$$F'(x)=f(x) \qquad \forall x\in D_f$$

siendo D_f el dominio de la función $f(x)$.

Obsérvese que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ también se verificará $dF(x)=f(x)dx$.

PROPOSICIÓN.- Si $F(x)$ es un primitiva de $f(x)$, también serán primitivas de $f(x)$ todas aquellas funciones $G(x)$ que verifiquen $G(x)=F(x)+C$ y sólo esas.

TEOREMA (Existencia de primitiva).- La condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ tenga función primitiva en un intervalo I, es que sea continua en I.

16 Integral indefinida

El proceso de cálculo de primitivas se denomina *integración* y se denota por el símbolo ∫, llamado *signo integral*.

Definición (Integral indefinida).- Dada una función, $f(x)$ continua en un intervalo I, se llama integral indefinida de $f(x)$ y se representa por

$$\int f(x)dx$$

al conjunto de funciones que tienen por derivada $f(x)$ (tienen por diferencial $f(x)dx$). Es decir,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donde $f(x)$ se llama integrando o función subintegral y C constante de integración. Debiendo verificarse $\frac{d}{dx}\left[F(x)+C\right] = f(x)$

Propiedades de la Integral indefinida.- Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo abierto I. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

P1.- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, siendo k una constante

P2.- $\int \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Las propiedades P1 y P2 confieren al operador $\int$ carácter lineal.

Una forma coloquial de expresar que dos operadores son inversos, consiste en decir que cada uno anula o destruye el efecto producido por el otro. Resulta inmediato comprobar que la integración es la operación inversa de la diferenciación.

TEOREMA.- Los operadores ∫ (integración) y d (diferenciación), son inversos, si bien cuando se aplican en el orden ∫ d debe añadirse una constante arbitraria.

17 Integrales inmediatas

A continuación se incluye una tabla con algunas de las integrales inmediatas más frecuentes. Convendremos en llamar integrales inmediatas a todas aquellas cuya solución puede escribirse sin más recursos que el recuerdo de las reglas de derivación.

Tabla de integrales inmediatas	
1.	$\int a dx = ax + C$
2.	$\int (x+a)^m dx = \frac{(x+a)^{m+1}}{m+1} + C \qquad (m \neq -1)$
3.	$\int \frac{dx}{x+a} = \log\left\|x+a\right\| + C$
4.	$\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + C \qquad (a \neq 0)$

Tabla de integrales inmediatas	
5.	$\displaystyle\int k^{ax}\,dx = \frac{k^{ax}}{a\log k} + C \qquad (k > 0,\quad a \neq 0)$
6.	$\displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a} + C \qquad (a \neq 0)$
7.	$\displaystyle\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + C \qquad (a \neq 0)$
8.	$\displaystyle\int \operatorname{tg} ax\,dx = -\frac{1}{a}\log\left\lvert\cos ax\right\rvert + C \qquad (a \neq 0)$
9.	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{\lvert a\rvert} + C \qquad (a \neq 0)$
10.	$\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \qquad (a \neq 0)$
11.	$\displaystyle\int \operatorname{Sh} ax\,dx = \frac{\operatorname{Ch} ax}{a} + C \qquad (a \neq 0)$
12.	$\displaystyle\int \operatorname{Ch} ax\,dx = \frac{\operatorname{Sh} ax}{a} + C \qquad (a \neq 0)$
13.	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{ArgSh}\frac{x}{\lvert a\rvert} + C = \log\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a^2}\right\rvert + C \quad (a \neq 0)$
14.	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{ArgCh}\frac{x}{\lvert a\rvert} + C = \log\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + C \quad (a \neq 0)$
15.	$\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ArgTh}\frac{x}{a} + C = \frac{1}{2a}\log\left\lvert\frac{a + x}{a - x}\right\rvert + C \qquad (a \neq 0)$

Tabla 2.- Integrales inmediatas.

El cálculo de primitivas interesa sobre todo como auxiliar del cálculo de integrales definidas, por lo que los métodos que se presentan son de tipo práctico pero también de alcance limitado.

Es importante señalar que todos los métodos de integración están inspirados en la misma idea: *reducir la integral planteada a una integral inmediata*.

18 Integración por cambio de variable

El cambio de variable es una de las técnicas más utilizadas para obtener la primitiva de una función.

TEOREMA.- Se considera la integral $\int f(x)dx$ *y el cambio de variable* $x = g(t)$. *Si* f *y* g *verifican:*

(a) f *es continua en el intervalo* I_1.

(b) g *tiene derivada continua en el intervalo* I_2.

(c) $g(I_2) \subseteq I_1$

entonces:

$$\int f(x)dx = \int f\left[g(t)\right] g'(t)dt \quad \text{con} \quad x \in I_1,\ t \in I_2$$

De esta forma se obtiene una nueva integral en la variable t que debe ser más sencilla de resolver que la integral de partida. La primitiva que se obtenga debe expresarse en la variable inicial, por lo que se deshará el cambio de variable una vez realizada la integración.

19 Integración por partes

Este método es eficiente para integrandos en los que aparezcan productos de funciones trascendentes.

TEOREMA.- Sean $u = u(x)$ *y* $v = v(x)$ *dos funciones con derivadas continuas en un cierto intervalo I. Entonces:* $\int udv = uv - \int vdu$

20 Integración de funciones racionales

Recordemos que se llama función racional $R(x)$, a toda función en la que sólo se efectúan con x las cuatro operaciones racionales. Cualquier función racional puede expresarse como cociente de polinomios:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Este apartado está dedicado al cálculo de integrales de funciones de este tipo. Es decir, integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

Distinguiremos dos casos:

1. Grado de $P(x) \geq$ Grado $Q(x)$

En este caso se divide $P(x) \geq$ entre $Q(x)$, obteniéndose

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int c(x)dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)} dx$$

siendo $\int c(x)dx$ la integral de un polinomio (por tanto inmediata) y $\int \frac{r(x)}{Q(x)}dx$ una integral racional en la que el grado del numerador es inferior al del denominador que se estudia en el caso siguiente.

2. Grado de $P(x) <$ Grado $Q(x)$

Estas integrales se resuelven por *descomposición en fracciones simples*. Para ello se descompone Q(x) en factores irreducibles,

$$Q\left(x\right)=\left(x-x_1\right)^{m_1}\left(x-x_2\right)^{m_2}\cdots\left(x-x_q\right)^{m_q}\cdot\left[a_1x^2+b_1x+c_1\right]\cdots\left[a_jx^2+b_jx+c_j\right],$$

donde los últimos factores tienen raíces complejas (se cumple $b_k^{\,2}-4\,a_kc_k<0$).

Nota: Supondremos en este curso que Q no tiene raíces complejas múltiples.

La descomposición en fracciones simples es la siguiente:

$$\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}=\frac{A_1}{\left(x-x_1\right)}+\frac{A_2}{\left(x-x_1\right)^2}+\cdots+\frac{A_{m_1}}{\left(x-x_1\right)^{m_1}}+\frac{B_1}{\left(x-x_2\right)}+\frac{B_2}{\left(x-x_2\right)^2}+\cdots+\frac{B_{m_2}}{\left(x-x_2\right)^{m_2}}+\cdots+$$
$$+\frac{\alpha_1x+\beta_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{\alpha_2x+\beta_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\cdots+\frac{\alpha_jx+\beta_j}{a_jx^2+b_jx+c_j}$$

Las integrales que resultan son todas de los tipos siguientes:

$$\int\frac{A_1}{\left(x-x_1\right)}\cdot dx=A_1\log\left|x-x_1\right|+C$$
$$\int\frac{A_{m_1}}{\left(x-x_1\right)^{m_1}}\cdot dx=\frac{-A_{m_1}}{\left(m_1-1\right)\left(x-x_1\right)^{m_1-1}}+C;$$
$$\int\frac{\alpha_jx+\beta_j}{a_jx^2+b_jx+c_j}\cdot dx=\quad\text{logaritmo}\quad+\quad\text{arco tangente}$$

OBSERVACIÓN**:** Es interesante darse cuenta de que la primitiva de una función racional, en el caso más general, está compuesta por una parte racional y otra parte trascendente y que, además, la componente racional procede únicamente de la integración de raíces múltiples.

21 Integración de funciones trigonométricas

Son integrales de la forma $\int R\left(\operatorname{sen}x,\cos x\right)dx$ donde R indica una función racional.

Estas integrales se resuelven mediante un cambio de variable que depende de la forma de la función $R(\operatorname{sen}x,\cos x)$. Los más frecuentes son:

1. Si $R(\operatorname{sen}x,\cos x)$ es par en $(\operatorname{sen}x,\cos x)$, el cambio es $\operatorname{tg}x=t$

   con lo que:

$$\operatorname{sen}x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\qquad\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\qquad dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

2. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es impar en cos x, el cambio es $\operatorname{sen} x = t$.

3. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es impar en sen x, el cambio es $\cos x = t$.

4. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ no tiene ninguna de las paridades anteriores, entonces el cambio general aplicable es $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$

   En este caso: $\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\qquad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\qquad dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

Expresiones básicas de las funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \qquad \operatorname{sen} 2x = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{tg\ x}{\sqrt{1+tg^2 x}}$$

22 Integración de productos de senos y cosenos

Son integrales de la forma

$$I = \int \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} mx \\ \cos mx \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} nx \\ \cos nx \end{Bmatrix} dx \qquad \text{con} \qquad m, n \in \mathbb{Z}$$

Las distintas integrales que surgen al combinar de todas las formas posibles estos productos se resuelven recordando las fórmulas de trigonometría que enseñan a transformar productos de senos y cosenos en sumas o diferencias. Estas fórmulas son las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \operatorname{sen} a \cos b &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\right] \\ \cos a \operatorname{sen} b &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)\right] \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \\ \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right] \end{aligned}\right.$$

Aplicando estas fórmulas, las integrales se convierten en inmediatas.

Ejercicios propuestos

1 Considerar la función $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[1,3]$.

(a) Representar gráficamente $f(x)$ en el intervalo $[1,3]$ y destacar sobre la gráfica la región del plano cuyo área viene dado por $\int_1^3 (x^2+1)dx$.

(b) Aproximar el área anterior mediante sumas de Riemann, utilizando *n* rectángulos, de la misma base y de altura el valor de *f* en el extremo izquierdo de cada uno de ellos. Tomar los siguientes valores de *n*:
b1) $n = 10$ b2) $n = 20$

(c) Obtener una fórmula general que proporcione una estimación del área tomando *n* rectángulos como los anteriores.

(d) Calcular el valor exacto del área como límite de la expresión anterior para *n* tendiendo a infinito.

(e) Calcular el error cometido en las aproximaciones calculadas en el apartado b).

Solución:
a) Representar con Matlab.

b) $Saprox = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(1+(i-1)\frac{2}{n}\right)^2+1\right]\frac{2}{n}$,

$Saprox(10) = 9,88$, $Saprox(20) = 10,27$

c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x =$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{8}{n^3}-\frac{8}{n^2}+\frac{4}{n}+\frac{8}{n^3}k^2-\frac{16}{n^3}k+\frac{8}{n^2}k\right]$$

d) $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{32}{3}$

e) $error(10) = 0,79$ $error(20) = 0,40$

SUMAS ENÉSIMAS FRECUENTES:

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2 Aproximar el área bajo la curva $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ en el intervalo $[0,\pi/2]$, utilizando sumas de Riemann con particiones regulares de 10 y 20 intervalos y considerando el valor de la función en el punto medio de cada intervalo.

Solución: $Saprox(10) = 1,3712$
$Saprox(20) = 1,3709$

3 Se considera la función $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

(a) Analiza la integrabilidad de $f(x)$ en cualquier intervalo de la recta real.

(b) Acota inferior y superiormente la integral $I = \int_0^3 \sqrt{1+x^2}\,dx$ utilizando propiedades de la integral definida.

(c) Ordenar los siguientes números

$$I_1 = \int_{-1}^{3} f(x)dx \quad I_2 = \int_{-1}^{2} f(x)dx$$

$$I_3 = \int_{0}^{-1} f(x)dx \quad I_4 = \int_{0}^{-2} f(x)dx$$

Solución: Ejercicio 1 del apartado *Condiciones de Integrabilidad* de la página:
http://www.giematic.unican.es/index.php/integracion-simple/material-interactivo

4 (a) Ordena los siguientes números

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx\,, \quad \int_0^1 e^{x^2}dx$$

(b) Utilizando las propiedades de la integral definida, hallar una cota inferior y una cota superior de la integral $\int_1^3 \frac{dx}{x^2+1}$.

(c) Utilizando las propiedades de la integral definida, razonar las siguientes afirmaciones:

(c.1) $\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+\cos^2 x}\, dx = 0$

(c.2) $8 \le \int_1^9 \sqrt{x}\, dx \le 24$

(c.3) $\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{tg}^2 x \operatorname{sen} x}{1+x^2+x^4}\, dx = 0$

(c.4) $\int_{-3}^{3} \cos x\ dx = 2\int_0^3 \cos x\, dx$

(c.5) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{1+x^4}\, dx = 0$

Solución:

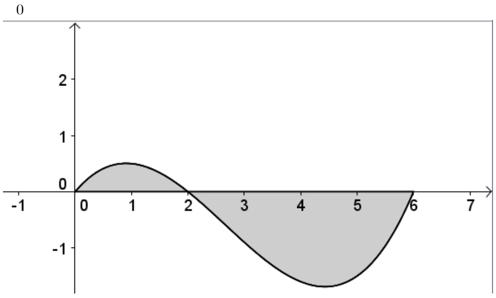
a) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx \ge \int_0^1 e^{x^2} dx$;

b) $1 \ge \int_1^3 \frac{dx}{x^2+1} \ge \frac{1}{5}$

c.1), c.3) y c.5) La función subintegral es impar en x, estando el intervalo de integración centrado en el origen, luego la integral vale cero.

c.4) La función subintegral es par en x, estando el intervalo de integración centrado en el origen, luego la integral se puede escribir como el doble de su valor en la parte positiva del intervalo.

5 La gráfica de la función f se muestra en la figura. La región sombreada tiene un área de 5 unidades cuadradas y $\int_0^6 f(x)\,dx = -4$.



(a) Usar esta información para calcular el valor de las siguientes integrales.

(a.1) $\int_0^2 f(x)\,dx$ (a.2) $\int_2^6 f(x)\,dx$

(a.3) $\int_0^6 \left|f(x)\right| dx$ (a.4) $\int_0^2 -2f(x)\,dx$

(a.5) $\int_0^2 \left(2+f(x)\right) dx$

(b) Calcular el promedio de f sobre el intervalo $[0,6]$.

Solución: (a.1) 1/2 (a.2) -9/2 (a.3) 5 (a.4) -1 (a.5) 9/2 (b) -2/3

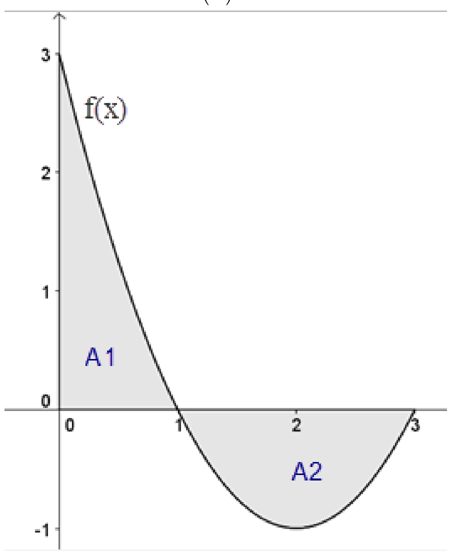
6 (a) ¿Tiene la función $si(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ algún tipo de simetría?

(b) ¿En qué puntos se obtienen los extremos relativos de $si(x)$?

(c) Calcular los extremos de la función $h(x) = \int_0^{x^2} sen(t^2)\,dt$

(d) En la siguiente figura se representa la gráfica de la función $f(x)$. ¿En qué valor x alcanza el valor máximo la función $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$?

(d) Suponiendo que el área de A1 es 3 unidades de área y el de A2 es 4, ¿cuál es el valor medio de $f(x)$ en el intervalo [0,3]?



Solución: a) $\mathrm{si}(x)$ es impar. Extremos en $x_k = k\pi,\quad k \in \mathbb{Z},\quad k \ne 0$. Mínimos en

$x_n = 2n\pi$ y en $x_n = -(2n-1)\pi$, $n \in \mathbb{N}$.
Máximos en $x_n = (2n-1)\pi$ y en $x_n = -2n\pi$.
(b) $x = 0,\ x_n = \pm\sqrt[4]{n\pi}$ con $n \in \mathbb{N}$.
Mínimos en $x = 0$ y en $x_n = \pm\sqrt[4]{2n\pi}$.
Máximos en $x_n = \pm\sqrt[4]{(2n-1)\pi}$.
(c) x=1. El valor medio es -1/3

7 Sin resolver la integral, calcular los extremos de la función $F(x) = \int_{-1}^{x} \sqrt{t^4+1}\,dt$

Solución: F es creciente en todo $\mathbb{R}$.

8 Aplicar el Teorema del Valor Medio a las siguientes funciones, en el intervalo indicado. Como consecuencia de dicha aplicación, calcular el valor medio de la función $f(x)$ en el correspondiente intervalo:

a) $f(x) = x^2$, en el intervalo cerrado $[-1,2]$.

b) $f(x) = \sqrt{x}$, en el intervalo [0,2].

c) $f(x) = \operatorname{tg} x$, en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

d) Hallar el valor medio de la función

$f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ en el intervalo $[0,2]$ y los valores de x donde la función toma su valor medio, justificando la existencia de dichos puntos.

Solución: a) valor medio = 1; b) valor medio = $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; c) valor medio = $\dfrac{3}{\pi}\log(2)$

d) $\mu = \dfrac{1}{3},\quad c = 3-\sqrt{3}$

9 Calcular las siguientes integrales aplicando la regla de Barrow:

(a) $\int_0^1 (2x^3-1)\sqrt{x^4-2x+1}\ dx$

(b) $\int_1^e \dfrac{\log^2 x}{x}\cdot dx$

(c) $\int_0^\pi (\pi - x)\operatorname{sen} x\ dx$

(d) $\int_0^{1/2} \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Solución: a) -1/3 b) 1/3 c) π d) $\dfrac{\pi^2}{72}$

10 (a) Integrando respecto a la variable y, calcular el área de la región encerrada por las curvas: $y^2 + x - 3 = 0$, $x - y - 1 = 0$.

(b) Calcular el área de la región plana S comprendida entre las rectas de ecuaciones: $y = x$, $x = 2 - 2y$. $x = 1$, $x = 4$

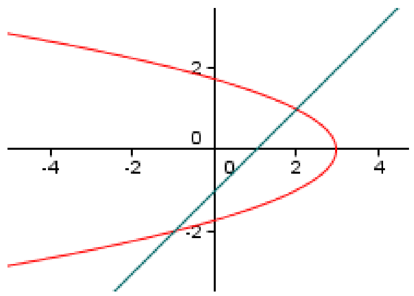
(c) Hallar el área determinada por la curva $y = (x-1)(x+2)$; las rectas $x = -3$, $x = 2$ y el eje OX.

(d) Calcular el área de la región plana D, encerrada por las curvas de ecuaciones:

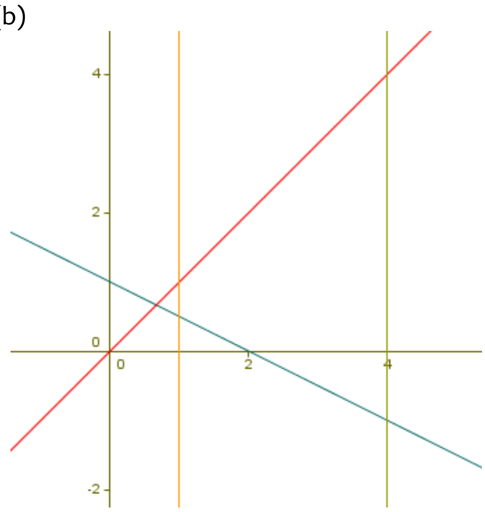
$y = \dfrac{1}{2}x^2$, $x = -\dfrac{1}{2}y^2$

Solución: a) área = 9/2 u^2; b) área = 33/4 u^2
c) área = 49/6 u^2 d) área = 4/3 u^2

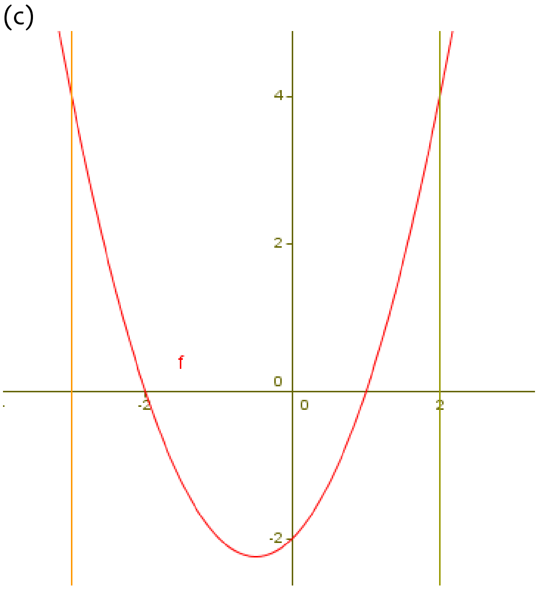
Gráficas
(a)



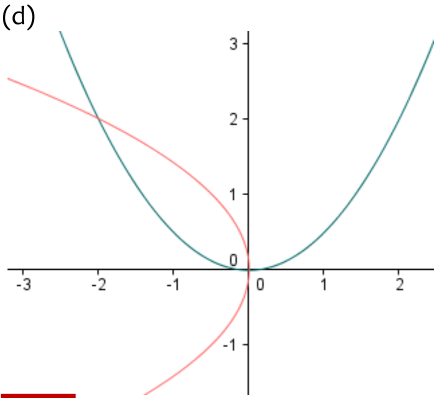
(b)



(c)



(d)



11 Para las parejas de funciones

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$,

$g(x) = 3 + 4x - x^2$

(b) $f(x) = x^2 - 5x + 4$,

$g(x) = 2x^2 + x - 23$

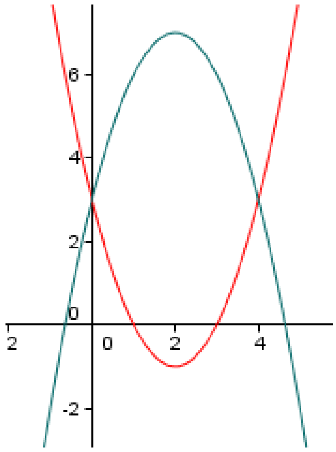
(c) $f(x) = -x^2 + 3x - 1$,

$g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

Se pide:

1. Determinar los puntos de corte de las gráficas de dichas funciones.
2. Dibujar de forma aproximada el dominio encerrado por dichas curvas.
3. Calcular el área encerrada por las dos curvas.

Solución: Apartado a) 1) los puntos de corte se encuentran en $x = 0$ y $x = 4$; 3) área = 64/3 u^2.



Apartados b y c: Ejercicios 1 y 2 respectivamente del apartado aplicaciones la página http://www.giematic.unican.es/index.php/integracion-simple/material-interactivo

12 Dada la función

$f(x) = a \log x + b\,x^2 + x$. Se pide:

(a) Determinar $a, b \in \mathbb{R}$ con la condición de que los puntos $x = 1$ y $x = 2$ sean críticos.

(b) Analizar, para los valores de a y b obtenidos, el tipo de puntos críticos que se producen en $x = 1$ y $x = 2$.

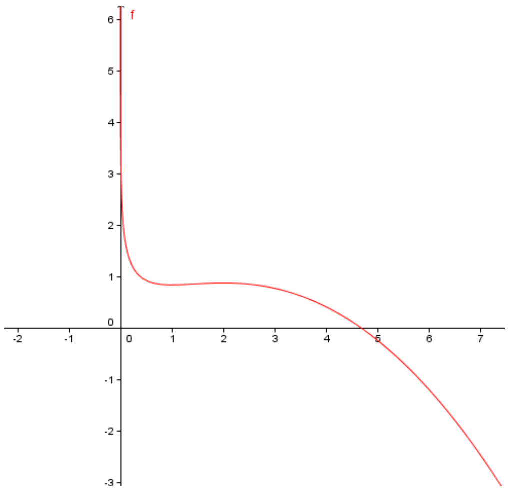
(c) Esbozar el dibujo de $y = f(x)$ calculando los elementos que se consideren necesarios.

(d) Determinar el área limitada por $y = f(x)$, el eje OX, las abscisas $x = 1$ y $x = 2$.

Nota: log 2 $\approx$ 0,69.

Solución: a) a = -2/3, b = -1/6 ; b) el punto $P_1\left(1, \frac{5}{6}\right)$ es mínimo relativo y el punto $P_2\left(2,\ 0'87\right)$ es máximo relativo.

d) área = 0,85 u^2.



13

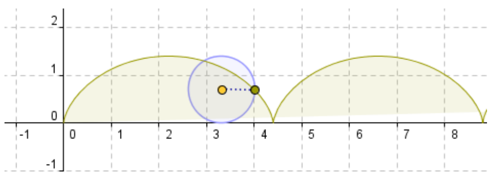
(a) Calcular el área limitada por la elipse de ecuaciones paramétricas:

$x = a\cos t,\ y = b\,\mathrm{sen}\,t$ con $t \in [0,\ 2\pi]$.

(b) Hallar el área encerrada entre un lazo de la cicloide y el eje OX. La parametrización de la cicloide es:

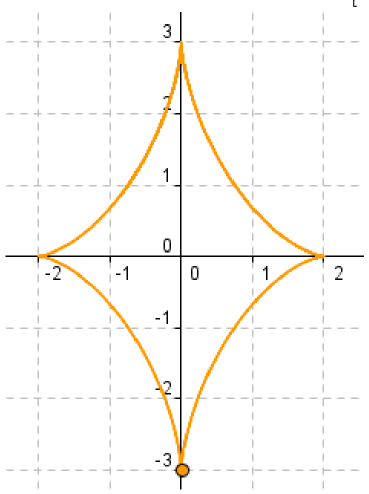
$x = R(t - \mathrm{sen} t),\ y = R(1 - \cos t),\ t \in \mathbb{R}$

Nota: Esta curva se genera al hacer girar una circunferencia de radio R sobre si misma al tiempo que se desplaza por el eje OX, sería la curva que describiría un puntero de tinta situado en un punto de esta circunferencia.



(c) Hallar el área contenida en el interior de la astroide de ecuaciones paramétricas:

$x = 2\cos^3 t,\ y = 3\,\mathrm{sen}^3 t$, con $t \in [0,\ 2\pi]$.



Solución: (a) y (b) Ejercicios 3 y 4 del apartado aplicaciones de la página http://www.giematic.unican.es/index.php/integracion-simple/material-interactivo

(c) $\dfrac{9\pi}{4}\ u^2$

14

(a) Calcular el volumen del semielipsoide dado por la ecuación

$z = \sqrt{64 - 4x^2 - y^2}$

(b) Calcular el volumen de una esfera de radio 5 cm haciendo girar la semicircunferencia

$y = \sqrt{25 - x^2}$ alrededor del eje X.

(c) Calcular el volumen del cuerpo limitado por la elipse $\dfrac{x^2}{25} + y^2 = 1$ al dar una vuelta completa alrededor del eje OX.

(d) Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje X los recintos limitados por las gráficas que se indican

(1) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$

(2) $f(x) = 4x$, $g(x) = 4$

(3) $y = \dfrac{1}{x}$, $x = y^2$, $x = 4$

Solución: Solución: (a) $\dfrac{512\pi}{3}\ u^3$ (b) $\dfrac{500\pi}{3}\ u^3$ (c) $\dfrac{20\pi}{3}\ u^3$ (d.1) $\dfrac{3\pi}{10}\ u^3$ (d.2) $\dfrac{32\pi}{3}\ u^3$ (d.3) $\dfrac{27\pi}{4}\ u^3$

Test de autoevaluación

1 El valor de la suma $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+1}{n^2}$ es:

A) 0
B) 1
C) $\frac{1}{2}$
D) Ninguna de las anteriores.

2 Sabiendo que $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$, se puede afirmar que:

A) $\int_{-2}^{0} x^2 dx = -\frac{8}{3}$
B) $\int_{-2}^{0} 3x^2 dx = 8$
C) $\int_{-2}^{2} x^2 dx = 0$
D) Ninguna de las anteriores

3 Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$, de forma que se cumple que $a < b$ y que $I = \int_a^b f(x)dx = 0$. Razonar cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones con verdaderas:

A) $f(x) = 0 \qquad \forall x \in [a,b]$.
B) $\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| = 0.$
C) $\int_a^b |f(x)|\, dx = 0.$
D) $I = \int_a^b [f(x)+1]\, dx = b - a.$

4 Sea $f(x)$ una función continua y par en $\mathbb{R}$. Sea μ el valor medio de $f(x)$ en el intervalo $[-a,a]$, con a>0. Indicar cuál de las siguientes respuestas es la correcta:

A) $\mu = 0$
B) μ =valor medio de $f(x)$ en $[0,a]$.
C) μ =doble del valor medio de $f(x)$ en $[0,a]$.
D) Ninguna de las anteriores es correcta.

5 Cuatro estudiantes no se ponen de acuerdo sobre el valor de la integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^8 x\, dx$. Uno de ellos está en lo cierto. ¿Quién es?

A) Víctor dice que es igual a π.
B) Lara dice que vale $\frac{35\pi}{128}$.
C) Jorge, que vale $\frac{3\pi}{90} - 1$.
D) Rosario afirma que es $\frac{\pi}{2}$.

6 El valor de la integral $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}$ es:

A) $2\sqrt{2}$
B) $\sqrt{2}$
C) $2\sqrt{2} - 2$
D) Ninguna de las anteriores.

7 El valor medio de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0,\pi]$ es:

A) $\operatorname{arcsen} \frac{2}{\pi}$
B) $2/\pi$
C) $1/\pi$
D) Ninguna de las anteriores.

8 El área de la región limitada por la curva $x = t - \operatorname{sen} t,\ \ y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$ y el eje OX es :

A) 3π
B) 2π
C) π
D) Ninguna de las anteriores.

9 Utilizando el teorema del Valor Medio para acotar $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$, podemos decir

A) $0 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq 1$

B) $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq \sqrt{5}$

C) $1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq \sqrt{2}$

D) Ninguna de las anteriores.

10 Supóngase que $f(x)$ tiene una derivada positiva para todos los valores de x, y que $f(1)=0$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones acerca de la función $y=\int_0^x f(t)dt$ son ciertas?

A) La gráfica de y tiene un punto de inflexión en $x=1$.

B) La gráfica de $\frac{dy}{dx}$ corta al eje OX en $x=1$.

C) La grafica de $f(x)$ tiene una tangente horizontal en $x=1$.

D) Ninguna de las anteriores.

Soluciones del Test:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	B D	B	B	C	B	A	C	B

Ejercicios resueltos

SUMA DE RIEMANN. INTEGRABILIDAD

1 Utilizando la definición de integral definida, calcular el valor de $\int_2^3 x\,dx$.

Nota: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Solución

Como la función $f(x)=x$ es integrable, se puede calcular la integral de la siguiente forma

$$\int_2^3 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

considerando

$$f(x)=x \qquad \Delta x = \frac{3-2}{n} \qquad c_i = 2+i\,\Delta x$$

Es decir,

$$\int_2^3 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[2+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[2+\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right] = 2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

2 Estudiar la integrabilidad de las siguientes funciones en el intervalo $\left[-2,2\right]$:

a) $f(x) = x^3 + \operatorname{sen} x$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ c) $f(x) = \operatorname{tg} x$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$ e) $f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 2 \end{cases}$

Solución a)

La función $f(x) = x^3 + \operatorname{sen} x$ es continua en el intervalo $\left[-2,2\right]$ luego es integrable.

Solución b)

La función $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ es continua en el intervalo $\left[-2,2\right]$ luego es integrable.

Solución c)

La función $f(x) = \operatorname{tg} x$ no es integrable en el intervalo $\left[-2,2\right]$ ya que presenta dos discontinuidades de salto infinito en este intervalo: $\pm\dfrac{\pi}{2}$.

Solución d)

La función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

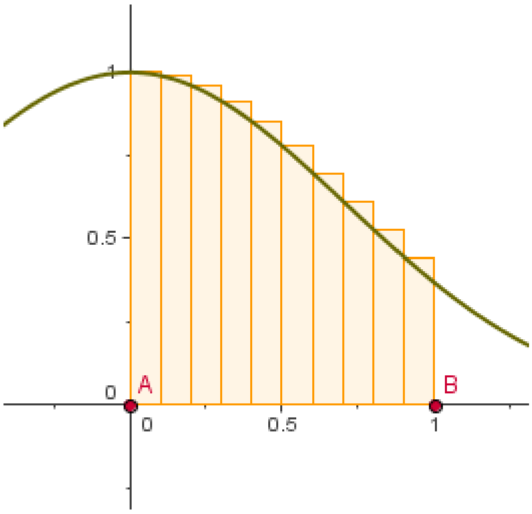
no es continua en el intervalo $\left[-2,2\right]$ ya que presenta una discontinuidad en el punto 1. Al ser de salto infinito la función no es integrable en el intervalo $\left[-2,2\right]$, ya que no está acotada en dicho intervalo.

Solución e)

La función $f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 2 \end{cases}$ no es continua en el intervalo $\left[-2,2\right]$ ya que presenta una discontinuidad en el punto 0. Al ser de salto finito la función es integrable en el intervalo $\left[-2,2\right]$ por estar acotada en dicho intervalo.

3 Aproximar el valor de la integral $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ mediante la suma superior de Riemann, obtenida dividiendo el intervalo $\left[0,1\right]$ en 10 subintervalos iguales. Se dibujará la gráfica de la función, y sobre ella se representará el significado geométrico de la suma superior de Riemann.

Solución



La suma superior de Riemann representa la suma de las áreas de los diez rectángulos de base 1/10 y altura el valor máximo de la función en cada subintervalo, que se obtiene en el extremo izquierdo del mismo:

$$s=\sum_{i=1}^{10} f(c_i)\Delta x=\left\{\begin{matrix}\Delta x=\dfrac{1}{10}\\ c_i=(i-1)\Delta x=\dfrac{i-1}{10}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} e^{-\left(\frac{i-1}{10}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{10}\left(1+e^{-\left(\frac{1}{10}\right)^2}+e^{-\left(\frac{2}{10}\right)^2}+e^{-\left(\frac{3}{10}\right)^2}+e^{-\left(\frac{4}{10}\right)^2}+\ldots+e^{-\left(\frac{9}{10}\right)^2}\right)=0.7778$$

A continuación, se escribe el código Matlab de las dos funciones externas que permiten dibujar los rectángulos junto con la función y calcular el valor de la suma superior de Riemann.

```
function AreaAprox=Rsumasizq(n)
% Esta función aproxima el área bajo y=e^(-x^2) en [0,1] utilizando
% sumas superiores de Riemann con n rectángulos
AreaAprox=0;
suma=0;
dx=1/n;
for i=1:n
   c=(i-1)*dx;
   h=exp(-c^2);
   suma=dx*h+suma;
end
AreaAprox=suma;

function dibujorectangulos(n)
dx=1/n;
for i=1:n
   c=(i-1)*dx;
   h=exp(-c^2);
   rectangle('position',[c 0 dx h],'FaceColor','g')
end
hold on
ezplot('exp(-x^2)',[0,1])
```

4 Calcular con Matlab un valor aproximado de $\int_1^2 \frac{e^{x^2}}{x^4}dx$ utilizando:

a) una partición regular de 100 subintervalos donde el punto considerado en cada subintervalo sea su extremo superior derecho.

b) una partición regular de 100 subintervalos donde el punto considerado en cada subintervalo sea el punto medio.

Para cada uno de los dos apartados se deberá escribir a mano la suma de Riemann que se está calculando.

Solución a)

La expresión de la suma de Riemann pedida es: $\sum_{i=1}^{100} \frac{e^{c_i^2}}{c_i^4}\Delta x$ siendo

$$\Delta x = \frac{2-1}{100} = \frac{1}{100} \qquad c_i = 1 + i\ \Delta x \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 100$$

Código Matlab

```
n=100;
incx=1/n;
ci=1+incx:incx:2;
f=inline('exp(x.^2)./(x.^4)','x');
sum(f(ci)*incx)
double(int(exp(x^2)/x^4,1,2))
```

Solución b)

La expresión de la suma de Riemann pedida es: $\sum_{i=1}^{100} \frac{e^{c_i^2}}{c_i^4}\Delta x$ siendo

$$\Delta x = \frac{2-1}{100} = \frac{1}{100} \qquad c_i = 1 + \frac{\Delta x}{2} + (i-1)\ \Delta x \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 100$$

Código Matlab

```
incx=1/n;
ci=1+incx/2:incx:2-incx/2;
f=inline('exp(x.^2)./(x.^4)','x');
sum(f(ci)*incx)
double(int(exp(x^2)/x^4,1,2))
```

5 Dada la función $f(x) = \cos(x^2)$, escribe el código Matlab para

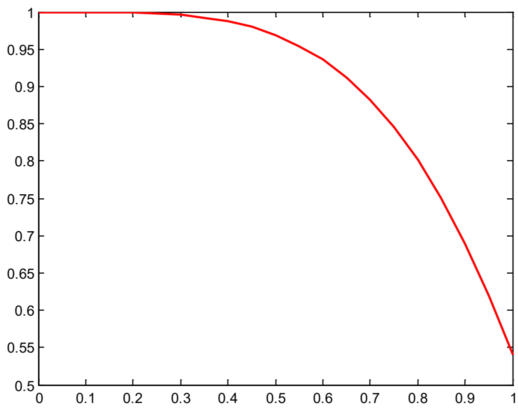
a) obtener una cota superior y una cota inferior de la integral $\int_0^1 f(x)\ dx$ utilizando sumas de Riemann con una partición regular de 10 y 1000 subintervalos. Escribe las sumas de Riemann utilizadas y justifica la respuesta.

b) Obtener el valor medio de $f(x)$ en el intervalo $[0,1]$.

Solución a)

Encontrar el punto c que garantiza el Teorema del Valor Medio aplicado a la función $f(x)$ en el intervalo $[0,1]$ mostrando en una figura la interpretación geométrica de este Teorema justificando la respuesta.

```
x=0:0.05:1;
f=inline('cos(x.^2)');
plot(x,f(x))
```




```
%  La función es decreciente.
%  Una cota superior mediante sumas de Riemann se obtiene
%  considerando el punto de cada subintervalo el extremo inferior
    n=10;
    incx=1/n;
    ci=0:incx:(1-incx);
    cotaSup=sum(f(ci))*incx
%  Una cota inferior mediante sumas de Riemann se obtiene
%  considerando el punto de cada subintervalo el extremo superior
    n=10;
    incx=1/n;
    ci=incx:incx:1;
    cotaInf=sum(f(ci))*incx
% Valor medio de la función en [0, 1]
    valor=quad(f,0,1)
% Cálculo del punto c pedido
    c=solve('cos(x^2)==0.90452','x')
% Otra posibilidad para calcular el punto c
    ecuacion=strcat('cos(x^2)==',num2str(valor))
    c=solve(ecuacion)
% El valor que buscamos es el segundo elemento de c: 0.66
% Interpretación geométrica
    hold on
    altura=f(c(2))
    plot([0 1],[altura altura])
    plot([c(2) c(2)],[0 altura],'*')
    hold off
```

Nota:

- En el caso de que la suma de Riemann sea con 1000 subintervalos sólo habría que cambiar el valor de n. Las sumas de Riemann para n=10 son

$$\text{cota Superior} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\cos\left(\frac{\left(i-1\right)^2}{10^2}\right)$$

$$\text{cota inferior} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\cos\left(\left(\frac{i}{10}\right)^2\right)$$

6

(A) En un fichero llamado areaaprox.m escribimos

```
function A=areaaprox(n)
h=1/n; c=h/2:h:1-h/2; f=2/c+1; A=sum(f)*h;
end
```

si en la ventana de comandos ejecutamos suma=areaaprox(10), **justificar** si son ciertas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones:

a) El valor de `suma` será la suma de Riemann de la función $f\left(x\right)=\frac{2}{x+1}$ en el intervalo $[0,1]$ tomando 10 subintervalos y sería una cota superior del valor de la integral de f en el intervalo.

b) Dará error porque en la ventana de comandos deberíamos poner A=areaaprox(10) en vez de suma=areaaprox(10).

(B) Escribe una función para que calcule una suma de Riemann tomando 15 subintervalos que sea cota superior del valor de la integral de $f\left(x\right)=\frac{2}{x+1}$ en el intervalo [a, b].

Solución (A)

Las dos afirmaciones son falsas, la función

```
function A=areaaprox(n)
h=1/n; c=h/2:h:1-h/2; f=2/c+1; A=sum(f)*h;
end
```

da error de ejecución porque para considerar la función $f\left(x\right)=\frac{2}{x+1}$ debería haberse escrito: `f=2./(c+1).`

La suma de Riemann considera como punto del intervalo el punto medio, no sería en cualqueir caso una cota superior del valor de la integral.

En la ventana de comandos se puede poner areaaprox(10) y guardar su valor en cualquier variable pero no se obtendría ningún valor como se ha indicado anteriormente.

Solución (B)

Como la función es decreciente, para obtener una cota superior en el intervalo se debería considerar el punto inferior de cada subintervalo.

```
function A=areaaprox(a,b)
n=15;h=(b-a)/n; c=a:h:b-h; f=2./(c+1); A=sum(f)*h;
end
```

PROPIEDADES

7

a) ¿Qué propiedad de la integral definida prueba que $\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 \left|f(x)\right| dx$?

b) ¿Es cierto que el valor de $\int_x^{x+3} f(t)dt$ no depende de *x*?

Solución a)

Para todo *x* real se verifica $f(x) \le \left|f(x)\right|$ por lo que, aplicando la propiedad de monotonía de la integral definida, se puede afirmar que:

$$\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 \left|f(x)\right| dx$$

Solución b)

Resolviendo ésta integral por la regla de Barrow se tiene:

$$\int_x^{x+3} f(t)dt = F(x+3) - F(x)$$

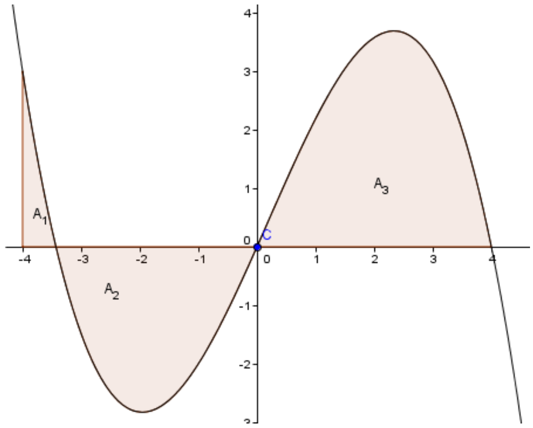
donde F es una primitiva de f .

Por tanto la integral siempre dependerá de x, salvo en algunos casos particulares como por ejemplo que $f(t)$ sea una función periódica de periodo 3 o una función constante.

8

Calcula el área de las tres áreas sombreadas A_1 , A_2 y A_3 sabiendo que

$$\int_{-4}^{4} f\left(x\right)dx = 4\,, \qquad \int_{-4}^{4} \left|f\left(x\right)\right|dx = 16.5\,, \qquad \int_{-4}^{0} -2f\left(x\right)dx = 11$$



Solución

El valor de las áreas será:

$$A_1 = \int_{-4}^{3.5} f(x)dx \qquad A_2 = -\int_{3.5}^{0} f(x)dx \qquad A_3 = \int_{0}^{4} f(x)dx$$

Se cumple que

$$\int_{-4}^{4} f(x)dx = 4 \Rightarrow \int_{-4}^{3.5} f(x)dx + \int_{3.5}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 = 4$$

$$\int_{-4}^{4} \left|f(x)\right|dx = 16.5 \Rightarrow \int_{-4}^{3.5} f(x)dx - \int_{3.5}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx = A_1 + A_2 + A_3 = 16.5$$

$$\int_{-4}^{0} -2f(x)\,dx = 11 \Rightarrow -2\int_{-4}^{3.5} f(x)dx - 2\int_{3.5}^{0} f(x)dx = -2(A_1 - A_2) = 11$$

Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & A_1 - A_2 + A_3 = 4 \\ (2) & A_1 + A_2 + A_3 = 16.5 \\ (3) & -2A_1 + 2A_2 = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} (2)-(1) & 2A_2 = 12.5 \rightarrow \boxed{A_2 = 6.25} \\ (3) & 2A_1 = 12.5 - 11 \rightarrow \boxed{A_1 = 0.75} \\ (1) & A_3 = 4 - A_1 + A_2 = 4 - 0.75 + 6.25 \rightarrow \boxed{A_3 = 9.5} \end{array}\right\}$$

9 Sin calcular su valor, ordenar las siguientes integrales justificando la respuesta:

$$I_1 = \int_1^7 \frac{e^x}{1+x^8}dx \qquad I_2 = \int_1^2 \frac{1}{1+x^8}dx$$

$$I_3 = \int_{-2}^2 \frac{x}{1+x^8}dx \qquad I_4 = \int_1^2 \frac{e^x}{1+x^8}dx$$

Solución

Utilizando las propiedades de las integrales se tiene que:

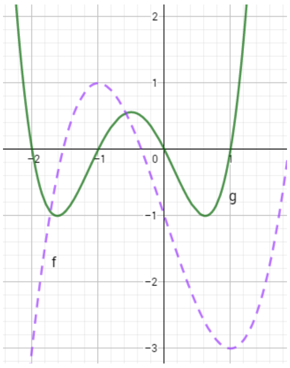
- $I_3 = 0$ ya que la función integrando es impar en el intervalo simétrico de integración [-2,2]. Las demás integrales son positivas ya que se integran funciones positivas en cada intervalo de integración.
- $I_2 = \int_1^2 \frac{1}{1+x^8}dx \le \int_1^2 \frac{e^x}{1+x^8}dx = I_4$ ya que en el intervalo [1,2] , se cumple, $\frac{1}{1+x^8} \le \frac{e^x}{1+x^8}$
- $I_4 = \int_1^2 \frac{e^x}{1+x^8}dx \le \int_1^7 \frac{e^x}{1+x^8}dx = I_1$ ya que la función a integrar es positiva y el intervalo es mayor en el caso de la integral I1.

10 Ordenar de mayor a menor el valor de las siguientes integrales justificando la respuesta

$$I_1 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx \qquad I_2 = \int_{-1}^{0} g(x)\,dx$$

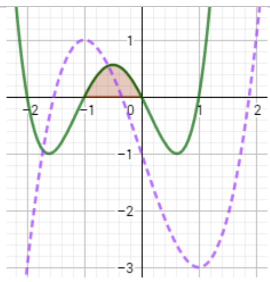
$$I_3 = \int_{-1}^{1} \big(g(x) - f(x)\big)\,dx \qquad I_4 = \int_{-2}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

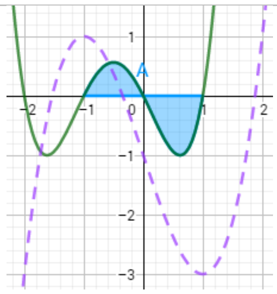
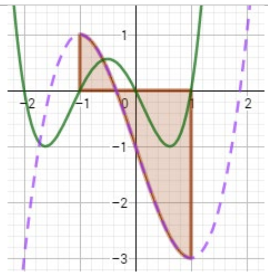
siendo f y g las curvas de la figura de la derecha (f trazo discontinuo, g trazo continuo).



Solución

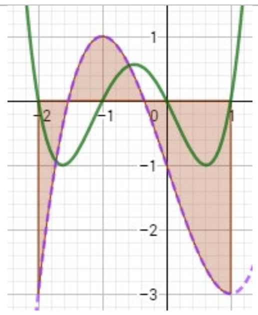
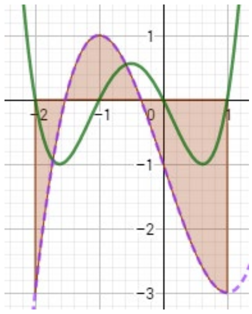
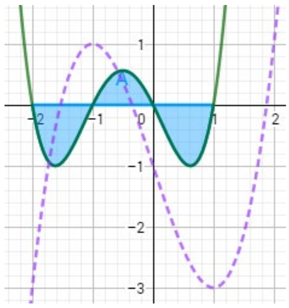
Integrales positivas

$I_2 = \int_{-1}^{0} g(x)\,dx$ Es positiva		
$I_3 = \int_{-1}^{1} \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$	Integral g en (-1,1) es negativa	Integral f en (-1,1) es negativa con valor más grande en valor absoluto que el de la integral de g

Es positiva		

Además $I_3 > I_2 > 0$

Integrales negativas

$I_1 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx$ es negativa		
$I_4 = \int_{-2}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$ negativa	Integral f en (-2,1) es negativa 	La integral g en (-2,1) es negativa con valor más pequeño en valor absoluto que el de la integral de f 

Además $I_1 < I_4 < 0$

11 Ordena de mayor a menor los siguientes valores sin calcular las integrales y justificando la respuesta

$$I_1 = \int_{-4}^{4} sen^2(x)\,dx \qquad I_2 = \int_{-4}^{4} x\,sen^2(x)\,dx \qquad I_3 = \int_{0}^{4} \big(1 + sen^2(x)\big)\,dx$$

Solución

$$I_1 = \int_{-4}^{4} sen^2(x)\,dx = 2\int_{0}^{4} sen^2(x)\,dx > 0$$

$$I_2 = \int_{-4}^{4} x\, sen^2\left(x\right)dx = 0 \qquad \text{por ser impar}$$

$$I_3 = \int_{0}^{4} \left(1 + sen^2\left(x\right)\right)dx = 4 + \int_{0}^{4} sen^2\left(x\right)dx$$

Se tiene que

$$I_3 = 4 + \int_{0}^{4} sen^2\left(x\right)dx \geq \int_{0}^{4} sen^2\left(x\right)dx + \int_{0}^{4} sen^2\left(x\right)dx = I_1 > 0 = I_2$$

12 ¿Qué valores de la constante C hacen que las siguientes igualdades sean ciertas? Justifica las respuestas.

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x^2 - 1)^3 2x dx = \int_{-1}^{C} u^3 du$

b) $\displaystyle\int_{0}^{x^2} f(t)dt = F(x^2) + C$, siendo F es una función primitiva de f.

c) $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)dx = C\int_{0}^{1} f(2t)dt$

Solución a)

Haciendo el cambio de variable $x^2 - 1 = u$ en la primera integral, se tiene:

$$\int_{0}^{1} (x^2 - 1)^3 2x dx = \left\{\begin{array}{l} x^2 - 1 = u \rightarrow 2xdx = du \\ x = 0 \rightarrow u = -1 \\ x = 1 \rightarrow u = 0 \end{array}\right\} = \int_{-1}^{0} u^3 du$$

Por tanto, $C = 0$.

Solución b)

Aplicando la regla de Barrow para resolver la integral se tiene:

$$\int_{0}^{x^2} f(t)dt = F(x^2) - F(0) \;\; \Rightarrow \;\; C = -F(0)$$

Solución c)

Haciendo el cambio de variable $x = 2t$ en la primera integral, se tiene:

$$\int_{0}^{2} f(x)dx = \left\{\begin{array}{l} x = 2t \rightarrow dx = 2dt \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 2 \rightarrow t = 1 \end{array}\right\} = 2\int_{0}^{1} f(2t)dt$$

Por tanto, $C = 2$.

13 Sin calcularlas, ordenar las siguientes integrales

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 sen(x)}{x^2+1} dx \qquad \int_{0}^{1} x^3 sen(x)\, dx$$

Solución

Como el integrando de la primera integral es par $g(x) = \frac{x^3 sen(x)}{x^2+1} = g(-x)$ se tiene que

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 sen(x)}{x^2+1} dx = 2\int_{0}^{1} \frac{x^3 sen(x)}{x^2+1} dx$$

Dado que para x cumpliendo $0 \le x \le 1$ se cumple

$$x^2+1 \le 2 \quad \Rightarrow \quad 1 \le \frac{2}{x^2+1} \quad \underset{x^3 sen(x) \ge 0}{\Rightarrow} \quad x^3 sen(x) \le \frac{2x^3 sen(x)}{x^2+1}$$

$$\int_{0}^{1} x^3 sen(x)\, dx \le 2\int_{0}^{1} \frac{x^3 sen(x)}{x^2+1} dx$$

14 Supongamos que $f(x) = f(-x)$, $f(x) \le 0$, $g(-x) = -g(x)$, $\int_{0}^{2} f(x)\, dx = -4$, $\int_{0}^{2} |g(x)|\, dx = 5$. Evalúa cada integral justificando la respuesta:

$$I_1 = \int_{-2}^{2} f(x)\, dx \qquad I_2 = \int_{-2}^{2} |f(x)|\, dx \qquad I_3 = \int_{-2}^{2} g(x)\, dx \qquad I_4 = \int_{-2}^{2} |g(x)|\, dx$$

$$I_5 = \int_{-2}^{2} [f(x) + f(-x)]\, dx \qquad I_6 = \int_{0}^{2} [2g(x) + 3f(x)]\, dx$$

Solución

$$I_1 = \int_{-2}^{2} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{2} f(x)\, dx = -8 \qquad I_2 = \int_{-2}^{2} |f(x)|\, dx = 8$$

$$I_3 = \int_{-2}^{2} g(x)\, dx = 0 \qquad I_4 = \int_{-2}^{2} |g(x)|\, dx = 10$$

$$I_5 = \int_{-2}^{2} [f(x) + f(-x)]\, dx = 2\int_{-2}^{2} f(x)\, dx = -16$$

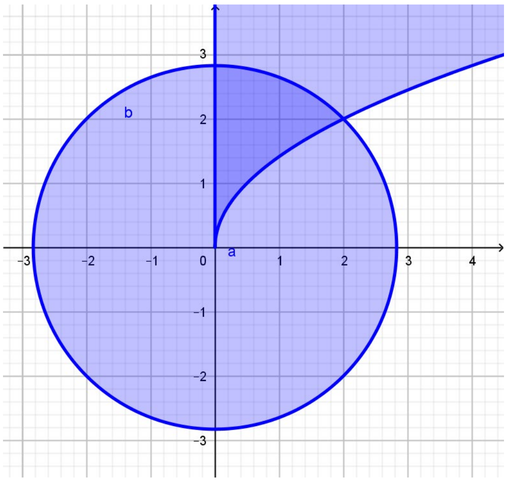
$$I_6 = \int_{0}^{2} [2|g(x)| + 3|f(x)|]\, dx = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4$$

15 Calcular el área del reciento D formado por los puntos (x,y) del plano que verifican $x^2+y^2\le 8$, $y\ge\sqrt{2x}$. Escribir el código Matlab para representar las curvas que delimitan la región D.

Solución

El punto de corte de las dos curvas es (2,2)

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=8 \\ y=\sqrt{2x}\end{array}\right\} \Rightarrow x^2+2x-8=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2} \Rightarrow \begin{array}{l}\boxed{x=2} \xrightarrow{y=\sqrt{2x}} \boxed{y=2} \\ x=-4 \text{ NO}\end{array}$$



$$\int_0^2\left(\sqrt{8-x^2}-\sqrt{2x}\right)\,dx=\underbrace{\int_0^2\sqrt{8-x^2}\;dx}_{I_1}-\underbrace{\int_0^2\sqrt{2x}\;dx}_{I_2}=$$

$$I_1=\int_0^2\sqrt{8-x^2}\;dx\underset{\substack{x=2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\\ dx=2\sqrt{2}\cos t\,dt\\ \\ x=0\quad t=0\\ x=2\quad t=\pi/4}}{=}\int_0^{\pi/4}8\cos^2(t)\,dt=\int_0^{\pi/4}8\,\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=4\left[t+\frac{\mathrm{sen}(2t)}{2}\right]_{t=0}^{t=\pi/4}=4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\pi+2$$

$$I_2=2\sqrt{2}\,\frac{x^{3/2}}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=2}=\frac{8}{3}$$

El área pedida es $I=\pi+2-\dfrac{8}{3}=\pi-\dfrac{2}{3}\quad u.a.$

VALOR MEDIO INTEGRAL. TEOREMA FUNDAMENTAL

16

Determina, justificando la respuesta, si es integrable la función $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+1 & 0<x<3\\ sen\left(x\right) & -2\pi<x<0\end{cases}$. Calcula su valor medio integral en el intervalo $\left(-2\pi,3\right)$

Solución

La función es integrable en el intervalo $\left(-2\pi,3\right)$ ya que es continua en este intervalo salvo en el punto 0 donde hay una discontinuidad de salto finito siendo, por lo tanto, acotada.

El valor medio es

$$\frac{1}{3+2\pi}\int_{-2\pi}^{3} f\left(x\right)dx=\frac{1}{3+2\pi}\left(\int_{-2\pi}^{0} sen\left(x\right)dx+\int_{0}^{3}\left(2x+1\right)dx\right)=\frac{1}{3+2\pi}\left(0+12\right)=\frac{12}{3+2\pi}$$

17

Calcular el valor medio de $\operatorname{sen}^2 x$ en el intervalo $\left[0,\pi\right]$. ¿Toma la función este valor en algún punto del intervalo, ¿por qué?. Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, calcula el valor de *x* donde la función toma su valor medio en el intervalo.

Solución

Calculamos el valor medio de la función en el intervalo, aplicando la definición:

$$\mu=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen}^2 x dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}\left(x-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)_{0}^{\pi}=\frac{1}{2}$$

Como $\operatorname{sen}^2 x$ es una función continua en $\left[0,\pi\right]$, el teorema del valor medio garantiza la existencia de x_0 tal que $f(x_0)=\dfrac{1}{2}$.

Calculamos x_0:

$$\operatorname{sen}^2 x_0=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\operatorname{sen} x_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad x_0=\operatorname{arcsen}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Existen cuatro soluciones, de las cuales sólo dos están en el intervalo $\left[0,\pi\right]$, que son:

$$x_0=\frac{\pi}{4}\ \text{ y }\ x_0=\frac{3\pi}{4}$$

18

Acotar la integral $\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$ utilizando el Teorema del Valor Medio para una integral definida.

Solución

La función $\sqrt{1+x^2}$ es estrictamente creciente en el intervalo [0, 1] y por tanto el mínimo absoluto m lo alcanza en x=0, es decir,

$$m = \sqrt{1+0^2} = 1$$

análogamente el máximo absoluto M lo alcanza en x=1, por tanto

$$M = \sqrt{1+1^2} = \sqrt{2}$$

se puede escribir

$$1\cdot(1-0) \le \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \le \sqrt{2}\,(1-0)$$

simplificando

$$1 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^2}.dx \le \sqrt{2}$$

19 Acotar, mediante el teorema de la media para integrales definidas, $\int_0^2 e^{x^2-x}\,dx$

Solución

Determinaremos los extremos absolutos de la función $f(x) = e^{x^2-x}$ en el intervalo $[0,2]$; la función es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Los posibles extremos relativos serán los valores que anulen $f'(x)$, $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x}$; haciendo $f'(x)=0$ se obtiene x=1/2 $\rightarrow$ f(1/2)= $e^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{4}}$.

- Comparamos con los valores en los extremos del intervalo $f(0)=e^0=1$ y $f(2)=e^2$. En este caso, el mínimo absoluto es $m = e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ y el máximo absoluto es $M = e^2$.

Recordando el teorema de la media para integrales definidas, podemos escribir

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \rightarrow \frac{2}{\sqrt[4]{e}} \le \int_0^2 e^{x^2-x}\,dx \le 2\,e^2.$$

20 Calcula el valor medio de la función $f(x) = \dfrac{3x+5}{2+x^2}$ en el intervalo [-1,2].

Solución

El valor medio es

$$\mu = \frac{1}{2+1}\int_{-1}^{2} \frac{3x+5}{2+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} \frac{3x}{2+x^2}\,dx + \frac{5}{3}\int_{-1}^{2} \frac{1}{2+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} \frac{2x}{2+x^2}\,dx + \frac{5}{3\sqrt{2}}\int_{-1}^{2} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(2+x^2\right)\Big]_{x=-1}^{x=2} + \frac{5}{3\sqrt{2}}\,arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Big]_{x=-1}^{x=2} = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{5}{3\sqrt{2}}\left(arctg\left(\sqrt{2}\right) - arctg\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

21 Calcula el valor medio de la función $f\left(x\right) = \sqrt{4-\left(x-1\right)^2}$ en el intervalo [0,3].

Solución

El valor medio es

$$\mu = \frac{1}{3}\int_0^3 \sqrt{4-\left(x-1\right)^2}\;dx$$

Para calcular la integral, se hace el siguiente cambio,

$$\operatorname{sen} t = \frac{x-1}{2} \quad\rightarrow\quad \cos t\,dt = \frac{dx}{2}$$

$$\left\{\begin{matrix} x=0 \rightarrow t = -\frac{\pi}{6} \\ x=3 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\}$$

$$\sqrt{4-\left(x-1\right)^2} = \sqrt{4\left(1-\frac{\left(x-1\right)^2}{4}\right)} = 2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = 2\cos t$$

Se obtendría:

$$\mu = \frac{1}{3}\int_0^3 \sqrt{4-\left(x-1\right)^2}\;dx = \frac{4}{3}\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t\;dt = \frac{4}{3}\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}\left[t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_{t=-\frac{\pi}{6}}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}+0+\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{4\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Dada la función $f\left(x\right) = \int_0^x \frac{e^t}{t^2+1}\,dt$, calcular $f\,'\left(1\right)$. Justifica la respuesta.

22 Calcula $\frac{d}{dx}\left[\int_x^1 \cos 3t dt\right]$

Solución

Esta derivada se calcula aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

$$\frac{d}{dx}\left[\int_x^1 \cos 3t dt\right] \underset{*}{=} -\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \cos 3t dt\right] \underset{**}{=} -\cos 3x$$

* En este paso se aplica la propiedad de la inversión de los límites de integración de una integral definida.

** En este paso se aplica el Teorema Fundamental del Cálculo Integral:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

23 Siendo $f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t^2+1} dt$, calcular $f'(1)$.

Solución

Dado que $g(t) = \frac{e^t}{t^2+1}$ es una función continua, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo: $f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t^2+1} dt \to f'(x) = \frac{e^x}{x^2+1} \to f'(1) = \frac{e}{2}$

24 ¿Es creciente la función $f(x) = \int_0^x \log(1+t)\,dt$?

Solución

Es creciente ya que utilizando el teorema fundamental del cálculo se tiene

$f'(x) = \log(1+x) > 0$

ÁREA LIMITADAS POR CURVAS

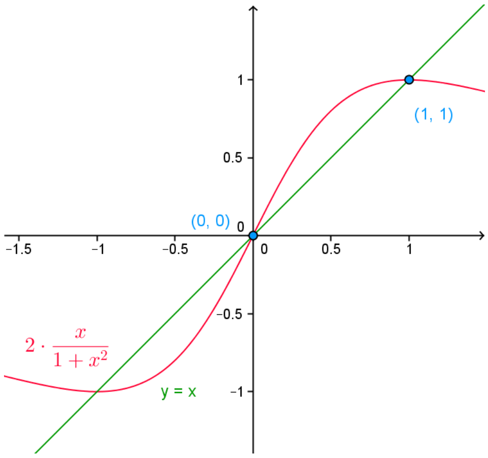
25 Halla el área de la región del primer cuadrante que está acotada por la recta $y = x$ y la curva $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

Solución

Puntos de corte $x = \frac{2x}{1+x^2} \to x(1+x^2) = 2x \to x = 0;\ x = \pm 1$

Puntos $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$

$$Area = \int_0^1 \left(\frac{2x}{1+x^2} - x\right)dx = \left[\log(1+x^2) - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \log 2 - \frac{1}{2}$$

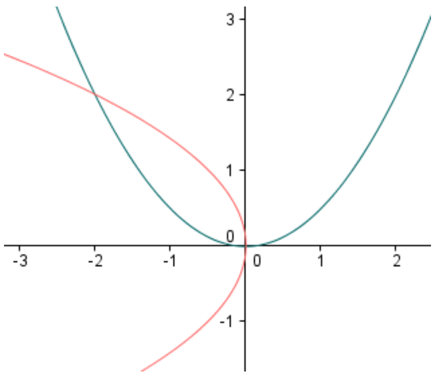


26 Calcular el área de la región plana D, encerrada por las curvas de ecuaciones: $y = \frac{1}{2}x^2$, $x = -\frac{1}{2}y^2$ integrando en la variable x y en la variable y.

Solución

Los puntos de corte de las dos curvas, $y=\frac{1}{2}x^2$, $x=-\frac{1}{2}y^2$, son (0,0) y (-2,2) ya que

$$\left.\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}y^2 \\ y=\frac{1}{2}x^2 \end{array}\right\} \qquad y=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}y^2\right)^2 \Rightarrow y=\frac{1}{8}y^4 \Rightarrow y\left(y^3-8\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 & x=0 \\ y=2 & x=-2 \end{cases}$$



Integrando respecto a x, el área encerrada por las dos curvas es

$$área = \int_{-2}^{0}\left(\sqrt{-2x} - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[\frac{(-2x)^{3/2}}{(-2)\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{x=-2}^{x=0} = -\frac{4^{3/2}}{-3} + \frac{(-2)^3}{6} = \frac{8}{3} - \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Integrando respecto a y, el área encerrada por las dos curvas es

$$\acute{a}rea = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}y^2 - \left(-\sqrt{2y}\right)\right)dy = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3} + \frac{(2y)^{3/2}}{2\cdot\frac{3}{2}}\right]_{y=0}^{y=2} = -\frac{2^3}{6} + \frac{4^{3/2}}{3} = -\frac{8}{6} + \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

27 Determinar el área de la región limitada por las curvas $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ e $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, esbozando previamente un dibujo de la misma.

Solución

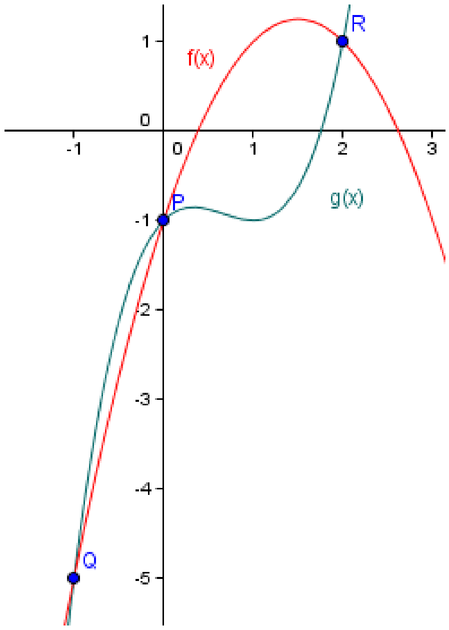
$$f(x) = g(x) \to -x^2 + 3x - 1 = x^3 - 2x^2 + x - 1 \to x^3 - x^2 - 2x = 0$$

de aquí salen las raíces x=-1, x=0 y x=2 abscisas de los puntos de intersección de $f(x)$ y de $g(x)$, obtenemos las ordenadas correspondientes:

para x=-1 $\to$ $f(-1) = g(-1) = -5$

para x=0 $\to$ $f(0) = g(0) = -1$

para x=2 $\to$ $f(2) = g(2) = 1$



Para determinar la posición de las curvas, damos valores intermedios:

para x=-1/2 $\to$ $f(-1/2) = -11/4$, $g(-1/2) = -17/8$ $\to$

f está por debajo de g en el intervalo (- 1, 0)

para x=1 $\to$ $f(1) = 1$, $g(1) = -1$ $\to$

f está por encima de g en el intervalo (0, 2).

El área vendrá expresada por

$$A=\int_{-1}^{0}\left(g\left(x\right)-f\left(x\right)\right)dx+\int_{0}^{2}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)dx=\int_{-1}^{0}(x^{3}-x^{2}-2x)\,dx$$

$$+\int_{0}^{2}(-x^{3}+x^{2}+2x).dx = =\left[\frac{x^{4}}{4}-\frac{x^{3}}{3}-x^{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^{4}}{4}+\frac{x^{3}}{3}+x^{2}\right]_{0}^{2}=\frac{37}{12}\ u^{2}$$

28 Se consideran las funciones $f\left(x\right)=2-x^{2}$ y $g\left(x\right)=x$. Se pide:

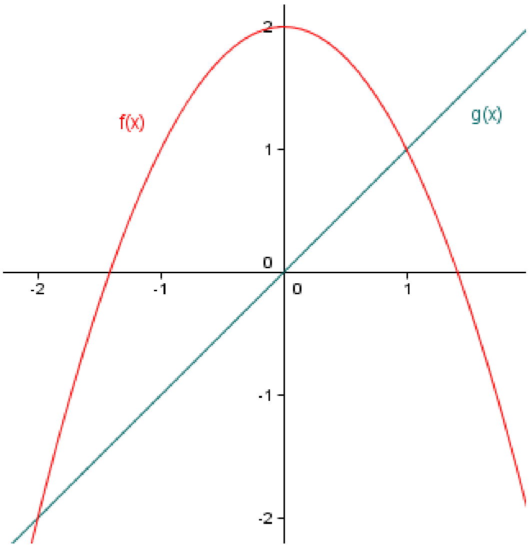
Hallar el área de la región plana de dimensiones finitas, limitada por las gráficas de las funciones $f\left(x\right)$ y $g\left(x\right)$ esbozando el dibujo de $f\left(x\right)$ y $g\left(x\right)$.

Solución

Determinamos la intersección de las dos curvas:

$$\begin{cases} f(x)=2-x^{2} \\ g(x)=x \end{cases} \rightarrow\ 2-x^{2}=x\rightarrow x^{2}+x-2=0\rightarrow x=-2,\ x=1$$

Los puntos de corte son $\left(-2,-2\right)$) y $(1,1)$.



el área será:

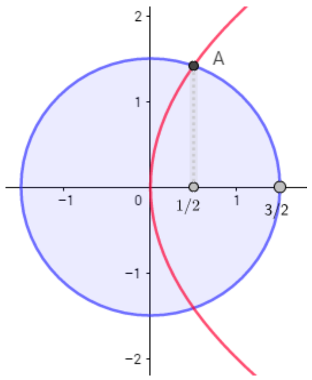
$$\text{A=}\int_{-2}^{1}\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_{-2}^{1}\left[2-x^{2}-x\right]dx=\left[2x-\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{2}}{2}\right]_{-2}^{1}=2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-$$

$$-\left[2\ (-2)-\frac{(-2)^{3}}{3}-\frac{(-2)^{2}}{2}\right]=\frac{9}{2}\ u^{2}$$

29 Calcula el área de las dos partes en que la parábola $y^{2}=4x$ divide a la circunferencia $x^{2}+y^{2}=\dfrac{9}{4}$.

Solución

La representación de las dos curvas es la siguiente



Calculando los puntos de corte

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=\dfrac{9}{4} \\ y^2=4x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+4x=\frac{9}{4} \Rightarrow x^2+4x-\frac{9}{4}=0$$

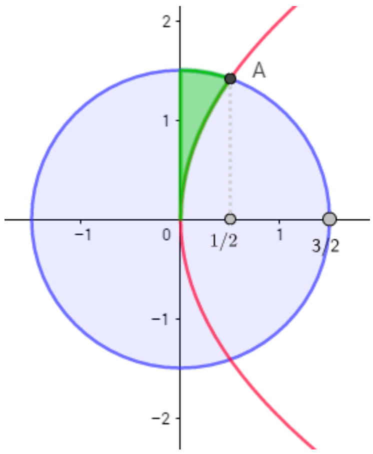
$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+9}}{2}=\frac{-4\pm 5}{2}=\begin{cases} 1/2 \\ -9/2 \end{cases}$$

La solución -9/2 no es válida ya que se debe cumplir que $y^2=4x$. Los puntos de corte son

$\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$ $\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$

Hay distintas formas de resolver este ejercicio, planteamos a continuación dos de ellas:

Método 1.



$$I=\int_0^{1/2}\left(\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}-\sqrt{4x}\right)dx$$

Entonces, teniendo en cuenta que el área del círculo es $A_c=\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9\pi}{4}$

el área de las dos regiones pedidas sería

$$A_1=\frac{A_c}{2}-2I \qquad A_2=\frac{A_c}{2}+2I$$

Calculamos la integral $I=J-K$

- $$J=\int_0^{1/2}\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}\,dx \underset{\left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2}sent \quad dx=\frac{3}{2}\cos t \\ x=0\rightarrow t=0 \\ x=1/2\rightarrow t=\text{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right)\end{array}\right]}{=} \int_0^{arcsen\left(\frac{1}{3}\right)}\frac{9}{4}\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{9}{4}\int_0^{arcsen(1/3)}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{9}{4}\left[\frac{1}{2}t+\frac{sen\,(2t)}{4}\right]_0^{arcsen\left(\frac{1}{3}\right)}=$$

$$=\frac{9}{8}arcsen\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{9}{16}sen\left(2arcsen\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

Nota: La solución tal y como está escrita se puede considerar correcta aunque podría simplificarse más teniendo en cuenta que

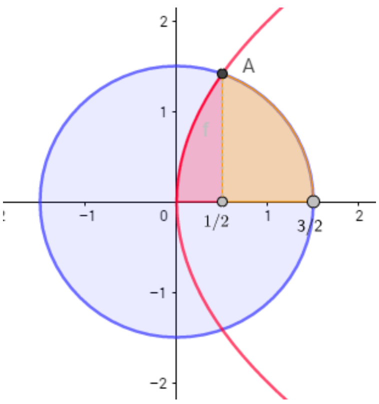
$$\alpha = arcsen\left(\frac{1}{3}\right) \to sen\alpha = \frac{1}{3} \to \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$sen\left(2\alpha\right) = 2\ sen\alpha\ \ \cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$J = \frac{9}{8}arcsen\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{9}{16}\frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{9}{8}arcsen\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

- $K = \int_0^{1/2} \sqrt{4x}\,dx = \frac{4}{3}x^{3/2}\Big|_{x=0}^{x=1/2} = \frac{2}{3\sqrt{2}}$

Método 2.



$$I = \int_0^{1/2} \sqrt{4x}\,dx$$

$$J = \int_{1/2}^{3/2} \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}\,dx$$

Entonces el área de las dos regiones pedidas sería

$A_1 = 2\left(I + J\right)$ $\qquad$ $A_2 = A_c - A_1$

Calculamos las dos integrales

$$I = \int_0^{1/2} \sqrt{4x}\,dx = \frac{4}{3}x^{3/2}\Big|_{x=0}^{x=1/2} = \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$J = \int_{1/2}^{3/2} \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}\,dx \underset{\left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2}sent \quad dx=\frac{3}{2}\cos t \\ x=1/2 \to t=arcsen\left(\frac{1}{3}\right) \\ x=3/2 \to t=\frac{\pi}{2} \end{array}\right]}{=} \int_{arcsen\left(\frac{1}{3}\right)}^{\pi/2} \frac{9}{4}\cos^2 t dt = \frac{9}{4}\int_{arcsen\left(\frac{1}{3}\right)}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

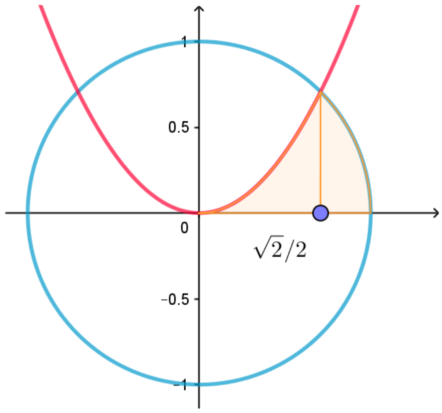
$$= \frac{9}{4}\left[\frac{1}{2}t + \frac{sen\left(2t\right)}{4}\right]_{t=arcsen\left(\frac{1}{3}\right)}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{16}\pi - \frac{9}{8}arcsen\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{9}{16}sen\left(2arcsen\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

30

Se considera la región del plano limitada por la curva $y = \sqrt{2}\,x^2$, la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y el eje OX con $x > 0$. Representa la región y calcula su área.

Solución

La región limitada es



Los puntos de corte son

$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{2}\,x^2 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{y}{\sqrt{2}}=x^2 \\ \dfrac{y}{\sqrt{2}}+y^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2}\,y^2+y-\sqrt{2}=0 \rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

El área se obtendría mediante la siguiente integral

$$área=\int_0^{\sqrt{2}/2}\sqrt{2}\,x^2dx+\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{6}+\frac{\pi-2}{8}=\frac{3\pi-2}{24}$$

Nota: Para la segunda integral hay que hacer el cambio $x=sent$

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{1-sen^2\left(t\right)}\cos tdt=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2 tdt=$$

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1+\cos\left(2t\right)}{2}dt=\left(\frac{t}{2}+\frac{sen\left(2t\right)}{4}\right)\Bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}^{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}=\frac{\pi-2}{8}$$

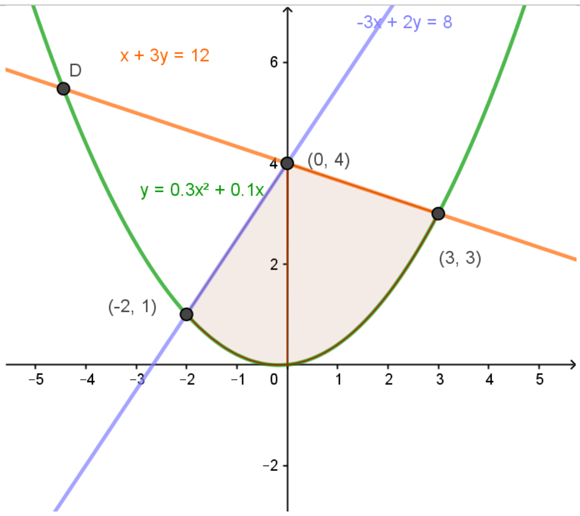
31 Dadas las siguientes curvas

$$-3x+2y=8 \qquad x+3y=12 \qquad y=0.3\,x^2+0.1\,x$$

a) Representa las tres curvas y selecciona una de las regiones limitadas por estas tres curvas. Puedes ayudarte de Octave/Matlab/Geogebra para hacer la representación.
b) Calcula una aproximación del área de la región del apartado a) utilizando para cada integral que se considere una suma de Riemann tomando una partición regular de 15 subintervalos.

Solución

Representación de la región



Integral o integrales para calcular el área pedida

$$\acute{a}rea = \int_{-2}^{0}\left(\frac{8+3x}{2}-\left(0.3x^2+0.1x\right)\right)dx+\int_{0}^{3}\left(\frac{12-x}{3}-\left(0.3x^2+0.1x\right)\right)dx$$

Cálculo Simbólico (CAS)

1	Integral((8+3*x)/2-0.3x^2-0.1x,x,-2,0)+Integral((12-x)/3-0.3x^2-0.1x,x,0,3)
	$\rightarrow \frac{47}{4}$

Expresión de las sumas de Riemann

Consideramos para cada una de las integrales una suma de Riemann tomando una partición regular con 15 subintervalos eligiendo en cada uno de ellos el punto medio

$$\sum_{i=1}^{15}\left(\frac{8+3c_i}{2}-\left(0.3c_i^2+0.1c_i\right)\right)\frac{2}{15}+\sum_{i=1}^{15}\left(\frac{12-d_i}{3}-\left(0.3d_i^2+0.1d_i\right)\right)\frac{3}{15}$$

siendo

$$c_i=-2+\frac{1}{15}+\left(i-1\right)\frac{2}{15} \qquad i=1,2,\ldots,15$$

$$d_i=\frac{3}{2\cdot 15}+\left(i-1\right)\frac{3}{15}=\frac{1}{10}+\left(i-1\right)\frac{1}{5}\; i=1,2,\ldots,15$$

Código utilizado para evaluar la suma de Riemann y valor que devuelve el ordenador

```
a=-2;b=0;
incx=(b-a)/n;
mi=(a+incx/2):incx:(b-incx/2);
f=inline('(8+3*x)/2-0.3*x.^2-0.1*x');
area1=sum(f(mi))*incx
a=0;b=3;
incx=(b-a)/n;
mi=(a+incx/2):incx:(b-incx/2);
f=inline('(12-x)/3-0.3*x.^2-0.1*x');
```

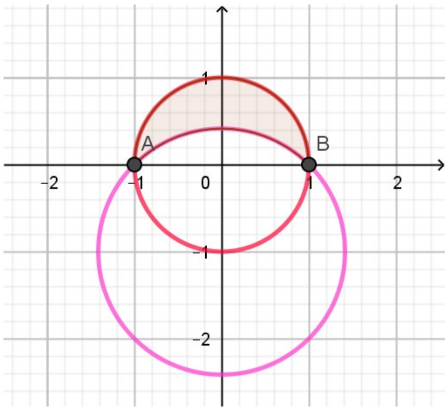
```
area2=sum(f(mi))*incx
area1+area2
```

Resultado dado por Matlab: 11.75388

32 Calcular el área de los dos trozos en los que la circunferencia $x^2+\left(y+1\right)^2=2$ divide a la circunferencia $x^2+y^2=1$. Representar gráficamente las regiones.

Solución

Se trata de dos circunferencias, la primera centrada en el punto (0, -1) y de radio $\sqrt{2}$ y la segunda centrada en el origen y de radio 1.



El área de la región sombreada es:

$$A_1=2\int_0^1\left(\sqrt{1-x^2}-\left(\sqrt{2-x^2}-1\right)\right)dx=2\underbrace{\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx}_{\substack{x=sen t\\ dx=\cos t dt\\ x=0\to t=0\\ x=1\to t=\frac{\pi}{2}}}-2\underbrace{\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx}_{\substack{x=\sqrt{2}\,sen t\\ dx=\sqrt{2}\cos t dt\\ x=0\to t=0\\ x=1\to t=\frac{\pi}{4}}}+2=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\ dt-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\sqrt{2}\cos^2 t dt+2=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt-2\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt+2=$$

$$=\left(t+\frac{sen\,2t}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}-2\left(t+\frac{sen\,2t}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}}+2=\frac{\pi}{2}-2\frac{\pi}{4}-1+2=1$$

El área de la otra región encerrada por las dos curvas sería el área del circulo unidad salvo el área calculada

$$A_2=\pi\cdot 1^2-1=\pi-1$$

33 Dibuja la región del plano cuya área puede calcularse resolviendo la siguiente integral:

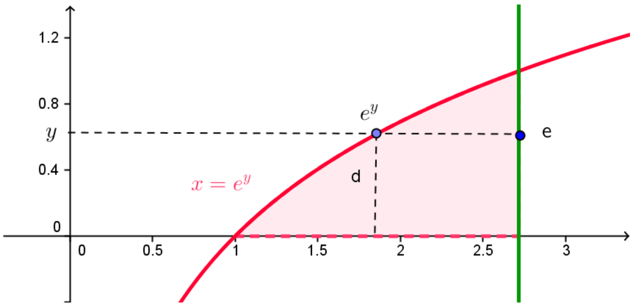
$$\int_0^1 (e - e^y)dy$$

Solución

Sea $x = x(y)$ la ecuación de cada una de las curvas que acotan la región del plano. Entonces, la integral propuesta calcula el área de la región definida por las siguientes desigualdades:

$$\begin{cases} e^y \leq x(y) \leq e \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

cuyo dibujo es el siguiente:

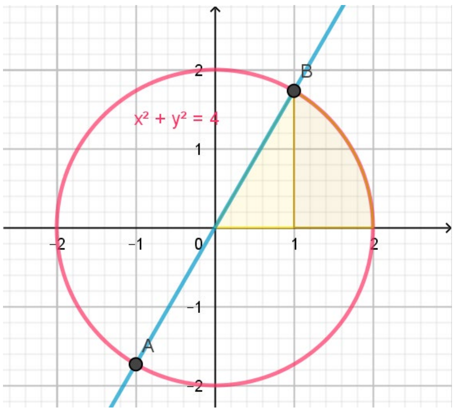


34 Determinar, mediante la utilizacion de integrales, el área de la región limitada por $y = \sqrt{3}\,x$, $x^2 + y^2 = 4$ y el eje positivo de las x.

Solución

Calculamos en primer lugar la intersección entre la recta y la circunferencia:

$$\left.\begin{matrix} y = \sqrt{3}\,x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = \sqrt{3}\,x \\ x^2 + 3x^2 = 4 \to x^2 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\left(-1, \sqrt{3}\right) \quad B\left(1, \sqrt{3}\right)$$



Para calcular el área consideraremos el área del triángulo determinado por los puntos (0,0), (1,0) y B que será igual a

$$Área_1 = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Para calcular el área de la zona roja del gráfico se considerará la integral

$$\acute{A}rea_2=\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx \underset{\left[\begin{array}{l} x=2sent\\ dx=2\cos t\\ \sqrt{4-x^2}=2\cos t\\ x=1\rightarrow sent=\frac{1}{2}\rightarrow t=\frac{\pi}{6}\\ x=2\rightarrow sent=1\rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{array}\right]}{=} \int_{\pi/6}^{\pi/2}4\cos^2 t dt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}4\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=2\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(1+\cos 2t\right)dt=2\left[t+\frac{sen\left(2t\right)}{2}\right]_{t=\pi/3}^{t=\pi/2}=2\frac{\pi}{2}+sen\left(\pi\right)-2\frac{\pi}{6}-sen\left(\frac{2\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

El área total es: $\acute{A}rea=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pi}{3}u^2$

Observación: El área pedida se podría haber obtenido sin calcular integrales utilizando la fórmula para calcular el área de un sector circular de ángulo α es

$$\acute{A}rea=\pi r^2\frac{\alpha}{2\pi}=\pi\cdot 4\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}=\frac{2\pi}{3}$$

ÁREA EN PARAMÉTRICAS

35 (a) Calcular el área encerrada por la curva

$$x=\frac{a\cos t}{1+\operatorname{sen}^2 t},\qquad y=\frac{a\operatorname{sen} t\cos t}{1+\operatorname{sen}^2 t},\qquad 0\le t\le 2\pi$$

b) Calcular el área interior a la circunferencia de radio 1 y exterior a la curva de ecuación

$$x=2\operatorname{sen}^2 t,\qquad y=2\operatorname{tg} t\operatorname{sen}^2 t,\qquad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$$

Solución a)

$$\acute{a}rea=\int_0^{2\pi}\left|y\left(t\right)x'\left(t\right)\right|dt$$

Calculamos $x'(t)$

$$x'(t)=\frac{-a\operatorname{sen} t-a\operatorname{sen}^3 t-2a\operatorname{sen} t\cos^2 t}{(1+\operatorname{sen}^2 t)^2}=\frac{a\operatorname{sen}^3 t-3a\operatorname{sen} t}{(1+\operatorname{sen}^2 t)^2}$$

Sustituimos en la integral,

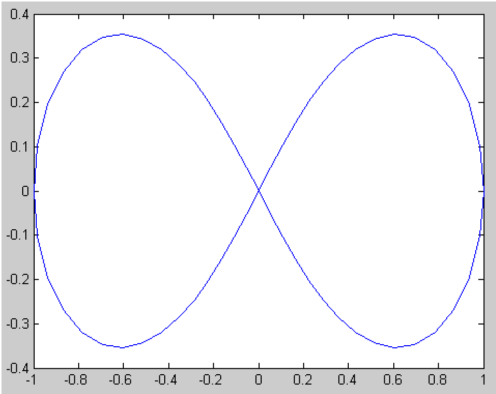
$$\acute{a}rea=\int_0^{2\pi}\left|y(t)x'(t)\right|dt=4a^2\int_0^{\pi/2}\left|\frac{\operatorname{sen}^4 t\cos t-3\operatorname{sen}^2 t\cos t}{(1+\operatorname{sen}^2 t)^3}\right|dt=4a^2\left(\frac{1}{4}\right)=a^2$$

Para calcular la integral utilizamos Matlab:

```
syms z
Y=int((sin(z)^4*cos(z)-3*sin(z)^2*cos(z))/(1+sin(z)^2)^3,z,0,pi/2)
double(Y)
```

Representación de la curva

```
>> t=0:pi/30:2*pi;
>> x=cos(t)./(1+sin(t).^2);
>>y=sin(t).*cos(t)./(1+sin(t).^2);
>> plot(x,y)
```



Solución b)

Calculamos $x'(t)$

$$x'(t) = 4\operatorname{sen} t \cos t$$

Sustituimos en la integral,

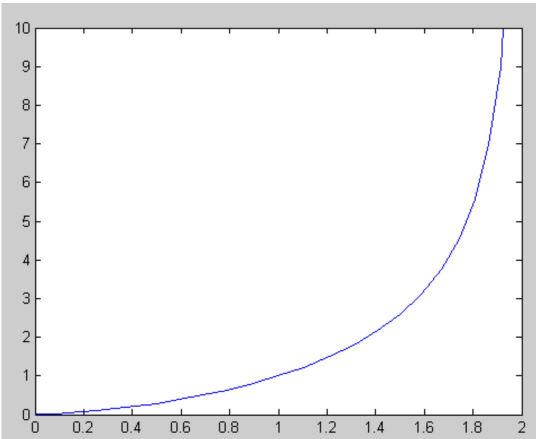
$$\acute{a}rea = \int_0^{\pi/2} \left| y(t)x'(t) \right| dt = \int_0^{\pi/2} \left| 8\operatorname{sen}^4 t \right| dt = 8\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t dt = \frac{3\pi}{2}$$

Calculamos aparte la integral,

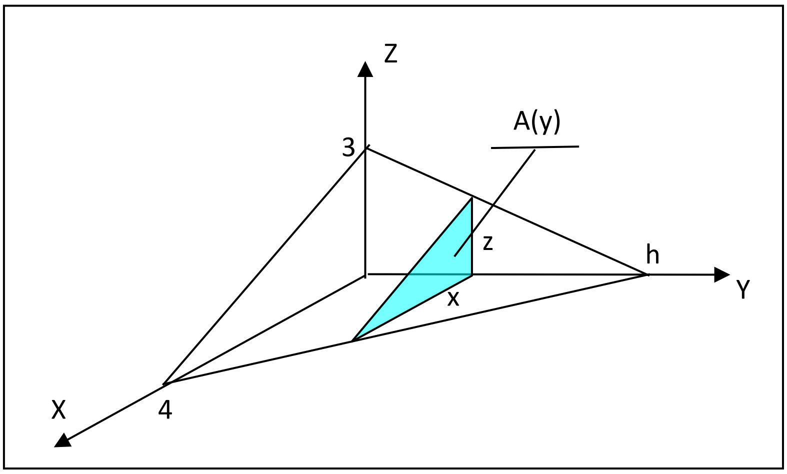
$$\int \operatorname{sen}^4 t dt = \int \left(\frac{1-\cos 2t}{2} \right)^2 dt = \int \frac{1-2\cos 2t + \cos^2 2t}{4} =$$
$$= \frac{t}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + \frac{1}{4}\int \cos^2 2t dt = \frac{t}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4t}{2} dt =$$
$$= \frac{3t}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4t}{32}$$

Representación de la curva

```
>> t=0:pi/60:pi/2;
>> x=2*sin(t).^2;
>> y=2*tan(t).*sin(t).^2;
>> plot(x,y);
>> axis([0 2 0 10]);
```



36 Calcula el volumen de la pirámide de la figura mediante una integral definida, utilizando secciones perpendiculares al eje Y:



Solución

Utilizando secciones perpendiculares al eje Y, el volumen elemental sería la rebanada de la figura, de área $A(y)$ y espesor dy. Entonces, el volumen de la pirámide sería:

$$V = \int_0^h A(y)dy$$

siendo $A(y)$ el área del triángulo de base $x(y)$ y altura $z(y)$, por tanto

$$A(y) = \frac{1}{2}x(y)z(y).$$

Para calcular $x(y)$ y $z(y)$ necesitamos las ecuaciones de las rectas en $z=0$ y en $x=0$ respectivamente.

- Ecuación de la recta situada en $z=0$: $y = -\frac{h}{4}x + h \quad \rightarrow \quad x = \frac{4}{h}(h-y)$
- Ecuación de la recta situada en $x=0$: $z = -\frac{3}{h}y + 3 = \frac{3}{h}(h-y)$

Sustituyendo en la ecuación del área del triángulo se tiene:

$$A(y) = \frac{1}{2}x(y)z(y) = \frac{6}{h^2}(h-y)^2$$

Y sustituyendo finalmente en la integral

$$V = \int_0^h A(y)dy = \frac{6}{h^2}\int_0^h (h-y)^2 dy = \left(-\frac{6}{h^2}\frac{(h-y)^3}{3}\right)_0^h = 2h \quad \text{u. vol.}$$

37 (a) Calcular el volumen del sólido generado cuando la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^{2n+1}$ y $g(x) = x^{2n+3}$ en el intervalo $[0,1]$, gira alrededor del eje OX. (n es natural distinto de 0).

b) La base de un sólido es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y las secciones perpendiculares al eje OY, son triángulos isósceles con un cateto en la base del sólido y altura constante h. Calcular el volumen del sólido

Solución a)

Puntos de intersección de las curvas,

$$x^{2n+3} = x^{2n+1} \qquad \Rightarrow \qquad x = 0, \quad x = 1$$

Además $x^{2n+3} \leq x^{2n+1}$, para todo x en $[0,1]$.

El volumen pedido es:

$$V = \pi \int_0^1 \left[\left(x^{2n+1} \right)^2 - \left(x^{2n+3} \right)^2 \right] dx = \pi \left(\frac{x^{4n+3}}{4n+3} - \frac{x^{4n+7}}{4n+7} \right)_0^1 =$$
$$= \pi \left(\frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+7} \right) = \frac{4\pi}{(4n+3)(4n+7)}$$

Solución b)

El área de cada sección perpendicular al eje OY es,

$$A(y) = \frac{1}{2} bh = \frac{h}{2} (2\sqrt{a^2 - y^2}) = h\sqrt{a^2 - y^2}$$

El volumen de una rebanada de área $A(y)$ y espesor dy es, $dV = A(y)dy$.

Para calcular el volumen total bastará sumar los diferenciales de volumen de todas las rebanadas que se forman cuando $0 \leq y \leq a$ y multiplicar por 2 teniendo en cuenta la simetría:

$$V = 2h \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \left\{ y = a \operatorname{sen} t \right\} = 2a^2 h \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt =$$
$$= 2a^2 h \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi a^2 h}{2}$$